Les treillis

par Maurice THUILIÈRE,
Santiago du Chili.

Mon attention avait été attirée par un articulet d'une revue scientifique américaine qui parlait d'une « amusante » transcription des notations de la théorie des ensembles. Il s'agissait de considérer l'ensemble E des diviseurs de 210 (16 éléments) :

$$1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210.$$

Pour deux éléments a et b quelconques de cet ensemble, on définit :
— la « réunion » (notée $a \vee b$) sera le PPCM de a et b,
— l' « intersection » (notée $a \wedge b$) sera le PGCD de a et b,
— on dira que a est « inclus » dans b (notation $a \subset b$) si et seulement si a est un diviseur de b (au sens « large »).

L'article faisait alors remarquer que ces deux opérations possédaient les mêmes propriétés que l'union et l'intersection dans un ensemble de parties et que, de plus, structuré par la relation d'ordre, l'ensemble des diviseurs formait un treillis. En désignant par « ensemble plein » l'élément 210 et « ensemble vide » l'élément 1, il devenait possible de définir le « complémentaire » de a par la formule

$$\bar{a} = \frac{210}{a} \text{ (naturellement alors, } \bar{\bar{a}} = a).$$

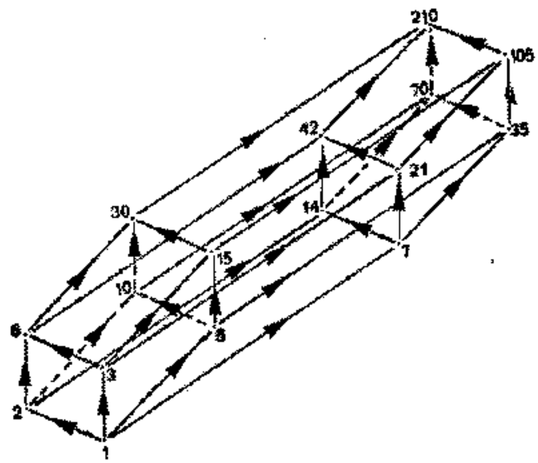
Ces notations représentaient pour moi une nouveauté, mettant en évidence certaines analogies entre calculs dans cet ensemble de nombres et calculs dans l'ensemble des parties d'un ensemble (et qui devait conduire à d'autres idées que celles suggérées par la définition habituelle du PGCD et du PPCM comme générateurs de certains sous-groupes de $\mathbf{Z}$).

Je décidai de pousser un peu l'analogie, car l'article s'arrêtait là. Dans un premier temps, j'improvisai rapidement un énoncé d'exercice pour mes élèves (niveau Première C française). Il s'agissait d'abord de leur faire reconnaître les propriétés habituelles du PGCD et du PPCM sous la forme énoncée ci-dessus, de leur faire dessiner le treillis et, ce qui était le moins évident pour eux, de leur faire trouver la formule donnant le complémentaire (on caractérise chaque nombre par sa propriété, puis on prend la négation de cette propriété; exemple : 42 est associé à la propriété « être multiple de 2, et de 3, et de 7, ne pas être multiple de 5 »; sous cette forme, il devient clair que le complémentaire de 42 est 5).

Je leur demandai alors de vérifier (sur des exemples) que les lois de Morgan étaient encore valables..., puis de définir dans cet ensemble l'opération « différence symétrique ».

Et c'est là, en préparant le corrigé que j'allais leur faire, que je fis mes « découvertes ». En sont-elles pour tout le monde?

D'abord, et je n'ai trouvé la remarque dans aucun livre, c'est que les propriétés du PGCD et du PPCM peuvent n'être considérées que comme des conséquences des lois de Morgan et du calcul propositionnel.



C'est ma seconde remarque qui me remplit d'enthousiasme.

Nous avons donc un sous-ensemble E de N, partiellement ordonné et muni de deux opérations $\vee$ et $\wedge$. On a, en outre, défini le complémentaire d'un élément. On fabrique alors l'opération « différence symétrique », notée w, telle que $awb = (a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b})$. On peut constater rapidement qu'une méthode pratique de calcul de awb est de prendre les décompositions en facteurs premiers de a et b, de supprimer les facteurs communs et de prendre pour awb le produit des facteurs restants. Autrement dit, $awb = (a \vee b) : (a \wedge b)$ (division habituelle).

Alors (E, w) *est un groupe abélien*, de neutre 1, et $a^{-1} = a$.

On vient ainsi de construire un sous-ensemble de N qui, muni d'une opération convenable, a une structure de groupe abélien!

Me vinrent alors à l'esprit les questions suivantes :

— pouvait-on définir l'opération w dans N tout entier?

— pour le moins, pouvait-on l'étendre à certains sous-ensembles de N plus vastes que celui de l'exercice?

— pouvait-on trouver des interprétations géométriques simples?

Je m'attaquai d'abord à la dernière question :

1° a et $\bar{a}$ sont symétriques par rapport au centre de symétrie du treillis!

2° je fus bientôt conduit à situer les éléments du treillis par les flèches qui y arrivaient ou qui en partaient; je notai + une flèche qui s'en allait de a, — une flèche qui y arrivait (le contraire, et je n'aurais peut-être pas trouvé).

Ceci me donnait par exemple :

$$6 \begin{cases} - \text{(vert, direction 2)} \\ - \text{(bleu, direction 3)} \\ + \text{(noir, direction 5)} \\ + \text{(rouge, direction 7)} \end{cases} \qquad 105 \begin{cases} + \text{vert} \\ - \text{bleu} \\ - \text{noir} \\ - \text{rouge} \end{cases}$$

un calcul direct donne : $6w105 = 70$.

Or, comme représentation de 70, on découvre $70 \begin{cases} - \text{vert} \\ + \text{bleu} \\ - \text{noir} \\ - \text{rouge.} \end{cases}$

Le calcul de awb se ramenait donc tout simplement... à la règle des signes!

Remplaçant alors + par 0 et — par 1, on voit aisément que notre ensemble (E, w) était isomorphe à $((\mathbb{Z}/(2))^4, +)$, l'addition de deux quadruplets étant bien entendu définie par

$$(a, b, c, d) + (a', b', c', d') = (a + a', b + b', c + c', d + d') \text{ (modulo 2)}$$

et, fait remarquable, l'élément 1 est associé à $(0, 0, 0, 0)$ et l'élément 210 à $(1, 1, 1, 1)$.

Pour ce qui est des deux autres questions, on se rend d'abord compte qu'il n'est plus possible de définir le complémentaire d'un élément.

On peut cependant continuer à garder comme définition $awb = \dfrac{a \vee b}{a \wedge b}$.

Dans N, 1 est encore élément neutre, on a toujours $awa = 1$, l'opération est interne et commutative, mais... elle n'est plus associative!

$$(3^2w3^3)w3^5 = 3w3^5 = 3^4 \qquad \text{alors que} \qquad 3^2w(3^3w3^5) = 3^2w3^2 = 1.$$

J'en suis donc arrivé aux conclusions partielles suivantes :

— si A est un sous-ensemble fini de N tel que chaque élément de A admette une décomposition en facteurs premiers *simple* (c'est-à-dire sans facteur premier de puissance supérieure à 1) et si G est l'ensemble de tous les nombres premiers intervenant dans les décompositions de A, E, le treillis construit sur G comme « base », est un sur-ensemble de A qui forme un groupe pour l'opération w;

— ceci peut sans doute se généraliser à tout sous-ensemble A (même infini) de N tel que la décomposition en nombres premiers de chaque élément de A soit simple (je n'ai pas cherché à démontrer l'associativité dans ce cas).

Des gens plus courageux ou plus compétents que moi pourraient peut-être mettre ceci en forme et en tirer partie...