3

Échanges

L'équation, cette inconnue...

Voici quelques années, la Commission du Dictionnaire avait attaqué le mot « ÉQUATION »; il s'est si bien défendu qu'elle a décidé de le mettre au frigidaire... Provisoirement!

Mais tous les professeurs de mathématiques, tous les élèves, l'emploient très fréquemment, non sans malaise.

Les cinq articles qui suivent reflètent bien cette situation. Chacun d'eux mérite réflexion et leur juxtaposition augmente encore leur intérêt :

— M. Pauly lie étroitement *« équation »* et *« égalité »*; Y. Oddos généralise *« équation »* sous le nom de *« situation »*; G. Schacherer introduit une inconnue qui est, non pas un nombre, mais un signe relationnel.

— Les *« transformations régulières »* sont prônées ici, qualifiées de *« poussiéreuses »* là.

— La nécessité de déterminer *« le domaine de validité »*, ou *« l'existentiel »*, d'une équation est mise en doute, plus ou moins nettement.

— D'autres mots perfides s'introduisent : Qu'est-ce que *« déterminer »* un ensemble? Qu'est-ce qu'une *« expression »*? une *« expression algébrique »*?

— Les quantificateurs, l'implication, ont leur mot à dire : autres sujets brûlants...

Le débat est ouvert entre les auteurs, entre eux et les lecteurs...

Louis DUVERT.

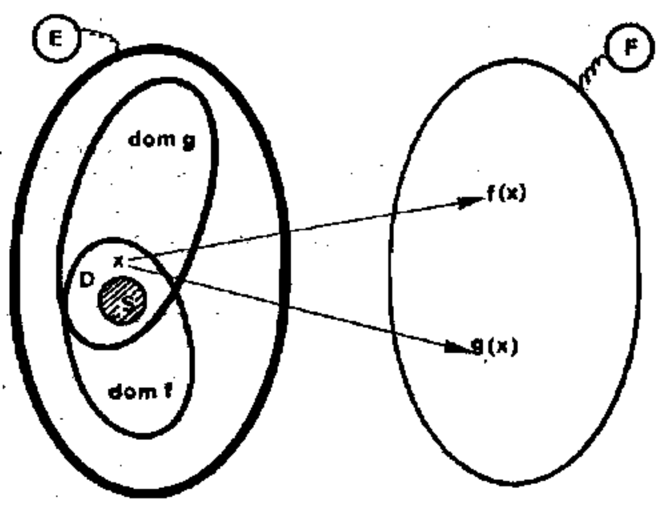
1. — Équations et égalités

par Maurice PAULY,
Lycée Pierre de Fermat, Toulouse.

Le nouveau programme de Première ramène à de justes proportions le chapitre des équations. Il serait intéressant, mais trop long, d'étudier l'évolution au point de vue pédagogique du concept d'équation et des méthodes de résolution, évolution qui a suivi, mais avec quelque retard, semble-t-il, l'introduction dans notre enseignement des notions fondamentales de mathématique contemporaine. Au stade actuel on enregistre une assez grande diversité de traitements, mais, malgré d'appréciables améliorations, tous ne sauraient encore être cités comme des modèles de logique et de cohérence. Néanmoins, l'accord est maintenant à peu près réalisé sur la façon de poser le problème :

Si f et g désignent des fonctions d'un ensemble E vers un ensemble F « *Résoudre l'équation* f(x) = g(x), *c'est déterminer l'ensemble S des éléments de E pour lesquels l'égalité* f(x) = g(x) *est vraie.* »

Soit (1) cet énoncé.



L'ensemble S, c'est-à-dire $\{x ; x \in E, f(x) = g(x)\}$, est inclus dans D ($D = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$) souvent appelé « *domaine de validité de l'équation* ».

Quitte à substituer à f et g leurs restrictions à D, il est théoriquement possible de n'envisager que des *applications*. Mais c'est là s'imposer une contrainte qui risque de compliquer la résolution du problème, car la détermination préalable de D, non indispensable, peut être difficile, voire impossible, et d'autre part E a souvent une structure familière commode, ce qui n'est généralement pas vrai pour D lorsqu'il est distinct de E. Il importe plutôt de souligner la généralité de l'énoncé en ne se limitant pas, par tradition, à des fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Entre autres, on rencontre très souvent le cas où E ou F sont des espaces vectoriels ou affines, éventuellement euclidiens, mais on n'en a pas toujours conscience, peut-être parce que, dans notre enseignement, le point de vue fonctionnel est apparu plus tard en géométrie qu'en algèbre ou en analyse. Les élèves doivent être persuadés qu'il n'y a pas de différence de nature entre la recherche de l'ensemble des points M d'un plan euclidien tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{MB'}$ et celle de l'ensemble des réels x tels que : $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{6}{x^2-9}$, si ce n'est que les fonctions qui interviennent dans ce deuxième exemple ne sont pas des applications.

L'inconvénient majeur de l'énoncé (1), franchement signalé par certains auteurs, est qu'il ne définit pas le mot *« équation »* mais seulement la locution : « *Résoudre l'équation* f(x) = g(x) ». Or, l'utilisation en mathématique d'une expression verbale contenant un mot essentiel non primitif, un substantif qui plus est, n'ayant pas été l'objet d'une définition, apparaît en elle-même extrêmement gênante et de plus elle grève irrémédiablement le terme d'une lourde hypothèque puisque, sous peine d'incorrection et même de non-sens, on devra par la suite s'interdire de l'employer ailleurs que dans cette expression. Cette interdiction s'avère très difficile à respecter! Par exemple, ne dit-on pas couramment : « *Soit l'équation* f(x) = g(x) » et ne parle-t-on pas *« d'équations équivalentes »* pour exprimer que deux problèmes (1) admettent le même ensemble de solutions?

D'ailleurs, pourquoi le qualificatif *« équivalentes »* et pourquoi la notation $\Leftrightarrow$ généralement employée à son sujet? Peut-il s'agir d'une relation (binaire) d'équivalence? Il faudrait pour cela, non seulement que le mot équation soit défini, mais encore que les équations soient des objets mathématiques. Est-ce le cas, même si on ne considère que les fonctions d'un seul ensemble E vers un seul ensemble F? Et pour quelle raison une relation d'équivalence serait-elle notée $\Leftrightarrow$? L'emploi de ce symbole serait justifié s'il s'agissait de propositions ou de prédicats (ou fonctions propositionnelles). Mais l'énoncé (1) est-il une chose pouvant être qualifiée de vraie ou de fausse? Cependant, le symbole $\Leftrightarrow$ pourrait à peu de frais recouvrer sa légitimité si on voulait bien ne voir dans l'écriture $f(x) = g(x)$ autre chose qu'une égalité. L'adoption de ce point de vue ôte, il est vrai, tout intérêt à ces notions *« d'équations équivalentes »* et de *« transformations régulières »*. On peut effectivement se demander si cette « théorie », vis-à-vis de laquelle on prend d'ailleurs tant de libertés, née d'un louable souci de rigueur à une époque où le fait d'écrire une égalité signifiait qu'elle était vraie, où l'emploi non encore codifié de l'implication exigeait cependant implicitement la vérité de l'hypothèse, n'est pas aujourd'hui pour le moins périmée. Et dans une certaine mesure n'en est-il pas de même de la coutume consistant à rechercher systématiquement le *« domaine de validité »*, ce qui ne va pas toujours sans inconvénient? Ainsi, à propos d'exemples tels que : $\frac{x}{x-3} - \frac{1}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$, déjà cité, on pourrait encore rencontrer des rédactions du style suivant :

« Le domaine de validité est $D = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

Plaçons-nous dans D.

Réduisons au même dénominateur :

$$\frac{x(x+3)}{x^2-9} - \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{6}{x^2-9}.$$

Il vient :

$$x(x+3) - (x-3) = 6.$$

Ce qui donne :

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3) = 0.$$

D'où :

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -3.$$

Or, -3 n'appartient pas à D. Donc l'équation a une seule racine : 1. »

Outre sa tournure archaïque, une telle solution présente une contradiction puisque, si x appartient à D, lorsqu'on est parvenu à $x^2 + 2x - 3 = 0$, la conclusion doit être $x = 1$ et non $x = 1$ ou $x = -3$. N'est-il pas plus simple et plus rigoureux, en faisant la part de l'abus de notation habituel au sujet de la « transitivité » de l'implication ou de l'équivalence, de procéder ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left(\frac{x}{x-3} - \frac{1}{x+3} = \frac{6}{x^2-9} \Leftrightarrow \frac{x}{x-3} - \frac{1}{x+3} - \frac{6}{x^2-9} = 0 \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-3}{x^2-9} = 0$$

$$\left. \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ \text{et} \\ x^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -3 \\ \text{et} \\ x^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \right)$$

Donc $S = \{1\}$.

Bien que le danger de méprise soit minime, l'objet des parenthèses est de souligner que le quantificateur agit sur les équivalences et non sur les égalités. La présence de ce $\forall x \in \mathbb{R}$, logiquement indispensable, risque cependant d'apparaître ici insolite car (... sans doute à la suite d'un accord tacite!) l'usage est assez répandu de sous-entendre le quantificateur $\forall$ devant une implication ou une équivalence. Et son absence contribue certainement à accréditer l'opinion selon laquelle on utiliserait rarement l'implication lorsque l'hypothèse est fausse, alors qu'il n'en est rien. En effet, de très nombreux raisonnements consistent à prouver que, si A et B sont deux prédicats définis dans un ensemble E, le prédicat $A \Rightarrow B$ a pour ensemble associé E lui-même, c'est-à-dire que la proposition $\forall x \in E; (A(x) \Rightarrow B(x))$ est vraie; mais on écrit seulement : $A(x) \Rightarrow B(x)$, ce qui semble en soi un non-sens. Par exemple, si E est un plan euclidien et si Δ est la médiatrice de [AB], on écrit : $M \in \Delta \Rightarrow MA = MB$ pour : $\forall M \in E; (M \in \Delta \Rightarrow MA = MB)$; de même, à propos de l'inversion $\mathcal{J}$ de pôle O et de puissance k, on écrit : $M = \mathcal{J}(M) \Leftrightarrow OM^2 = k$ pour : $\forall M \in E; (M = \mathcal{J}(M) \Leftrightarrow OM^2 = k)$. Pour éviter de se heurter à des difficultés de rédaction qui ne manqueraient pas de surgir, il semble raisonnable de souscrire à cette convention, sans en faire pour cela une règle absolue, car elle pourrait dans certains cas s'avérer dangereuse, notamment pour la formation de négations. Mais il conviendrait qu'elle devienne explicite sans être pour autant introduite prématurément.

Attention, objectera-t-on, écrire par exemple :

$$\forall x \in \mathbf{R}; \left(\frac{x}{x-3} - \frac{1}{x+3} = \frac{6}{x^2-9} \Leftrightarrow x = 1\right)$$

c'est faire de l'égalité $\frac{x}{x-3} - \frac{1}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$ un prédicat défini dans $\mathbf{R}$ alors qu'il ne l'est que dans $\mathbf{R} - \{-3, 3\}$. C'est en fait un prédicat défini dans $\mathbf{R}$ si l'on adopte l'attitude qui consiste à associer à toute partie P d'un ensemble E la fonction propositionnelle $\mathcal{R}$ telle que $\mathcal{R}(x)$ soit vraie pour x appartenant à P et fausse pour x appartenant à E — P. Dans le cas présent, P est le sous-ensemble S que l'on cherche, autrement dit l'égalité $\frac{x}{x-3} - \frac{1}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$ est fausse si l'un des membres au moins ne représente pas un réel ou si les deux membres représentent des réels distincts, ce qui semble d'ailleurs logiquement conforme à la formulation de la négation d'une égalité si, par définition, $a = b$ est vraie uniquement lorsque les lettres a et b représentent le même objet. Lorsque E est un produit cartésien $F \times G$, cette attitude conduit à considérer une relation de F vers G (correspondance de F vers G pour d'autres) comme un triplet (F, G, P), ce qui permet une définition précise de l'égalité des relations et en particulier des fonctions. Une telle conception rend possible la résolution de problèmes (1), même si on n'est pas en mesure de déterminer le *« domaine de validité »* D. Par exemple, quel est l'ensemble S des réels tels que l'égalité

$\sqrt{2x^5 - x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 2x + 1} = 2x^2 + x - 1$ soit vraie?

$$\forall x \in \mathbf{R}; \left(\sqrt{2x^5 - x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 2x + 1} = 2x^2 + x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^5 - x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = (2x^2 + x - 1)^2 \\ \text{et} \\ 2x^2 + x - 1 \geqslant 0 \end{cases}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} x^3(2x^2 - 5x + 2) = 0 \\ \text{et} \\ 2x^2 + x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 2\right).$$

Donc $S = \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$.

On procèderait de façon analogue pour la détermination de l'ensemble :

$$\left\{ x;\ x \in \mathbf{R},\ \frac{x^2 + x - 1}{x^5 + 2x^4 - x^2 + 1} = \frac{x}{x^4 + x^3 + 1} \right\}.$$

Ainsi envisagé, le problème (1) apparaît comme un cas particulier du problème (2) suivant : « *Déterminer l'ensemble* $\{x;\ x \in E,\ \mathcal{R}(x)\}$ », $\mathcal{R}$ désignant un prédicat défini dans l'ensemble E.

Dans nos classes, on rencontre quotidiennement, dans des domaines divers, des problèmes de ce genre et les élèves sont aujourd'hui particulièrement bien outillés pour les traiter, du moins à partir de la Seconde. Ils ont seulement à mettre en œuvre les notions fondamentales de logique et d'algèbre mises à leur disposition : propositions et prédicats, implication et équivalence, relations, structures usuelles (dont celle de $\mathbf{R}$)... et bien entendu à réfléchir. L'utilisation de ces notions permet, sinon impose, d'unifier les procédés de résolution et les présentations des solutions et dispense de tout cours théorique sur les équations (et inéquations). Certes, les cas où $\mathcal{R}(x)$ est de la forme $f(x) = g(x)$, y compris ceux où f et g sont des fonctions de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, gardent toute leur importance, mais n'est-ce pas du gaspillage, n'est-ce pas entretenir une situation anachronique que de continuer à leur réserver un traitement particulier, non satisfaisant de surcroît. Est-ce que le moment n'est pas venu, sans renier pour autant ceux qui nous les ont transmis, de renoncer à un vocabulaire vieilli et à des méthodes désuètes, propres à introduire des difficultés factices et à masquer ainsi la simplicité et la généralité des idées? Et même, puisqu'il est entaché d'une déficience originelle, qu'il a engendré et risque de perpétuer un certain malaise, ne peut-on aller jusqu'à s'interroger sur la nécessité et l'opportunité de continuer à employer le mot « *équation* «, du moins à propos du problème (1)? Si on estimait devoir le conserver, ne serait-ce que parce qu'il est profondément enraciné, consacré par l'usage, il serait souhaitable de pouvoir le munir d'une définition. La conception actuelle de l'égalité n'autoriserait-elle pas à appeler « *équation* » toute égalité de la forme $f(x) = g(x)$? Alors, apparaîtraient la fragilité de la distinction, sur laquelle on a tant insisté, entre les mots « *égalité* » et « *équation* » et par là-même une des raisons pour lesquelles on avait du mal à préciser le sens de ce dernier, ainsi que son caractère non indispensable. La suppression du mot « lieu », en géométrie, a contribué à démystifier des problèmes (2); est-ce que l'abandon du mot « *équation* » n'aurait pas le même effet salutaire sur le problème (1)? Il serait loisible de réserver le terme aux courbes à propos desquelles il serait susceptible d'une définition, mais ne désignerait pas nécessairement une égalité. Et, dans la mesure où l'on tiendrait absolument à une formule abréviative pour résumer l'énoncé (1), pourquoi ne dirait-on pas simplement : « *Résoudre l'égalité* $f(x) = g(x)$ »?

Remarque.

Les problèmes cités comme exemples ont été traités en utilisant des équivalences. Comme tous les problèmes (2) ils peuvent aussi être résolus en employant seulement des implications, c'est-à-dire par analyse et synthèse.

Ce dernier procédé est peut-être plus sûr mais moins instructif puisqu'il dispense souvent d'une part de réflexion et la synthèse peut, dans certains cas, exiger des calculs longs et pénibles.

D'autre part, toutes les équivalences envisagées sont implicitement affirmées vraies. On peut donc, si on le juge utile, remplacer $\Leftrightarrow$ par tout autre symbole destiné à exprimer la vérité d'une équivalence, par exemple $\vdash\!\dashv$ adopté dans certains ouvrages.

2. — Sur le problème des équations et inéquations

par Mme G. Michau,
L.E.G., Belfort.

Ce qui me paraît de plus en plus essentiel, à mesure que je réfléchis pour mon enseignement, c'est de donner aux élèves le souci de savoir avec certitude, lorsqu'ils sont amenés à résoudre un problème, si c'est bien *ce problème* qu'ils ont résolu et non un problème *voisin*. Autrement dit, traitant ce problème et ayant été amenés à le transformer, sont-ils passés, oui ou non, par des *transformations régulières?*

Le chapitre relatif aux équations et inéquations me paraît, à ce titre, d'une importance considérable et c'est un de ceux qui m'a coûté le plus de remises en cause pendant de nombreuses années. Ce que je dirai ici paraîtra des plus banals à beaucoup, j'en suis persuadée, mais je ne le pense pas inutile pour tous.

Je suis, en effet, étonnée que beaucoup de manuels continuent à s'accrocher à l'idée, qu'ils semblent considérer comme primordiale, de faire poser aux élèves, *avant tout*, le fameux domaine de définition. Or, il m'est apparu que, non seulement dans certains problèmes ce point de vue pouvait amener à des études aussi complexes qu'inutiles, mais, également, que, sur le plan dont je parle au début de cet article, il est plutôt nuisible. En effet, les élèves ayant posé leur domaine de définition se sentent tout à fait tranquillisés et à l'abri de toute surprise, au cours des transformations qu'ils seront amenés à effectuer : leur seul souci sera de trouver des solutions appartenant au domaine de définition.

Je pense que le chapitre sur les équations et inéquations doit être ramené aux points essentiels suivants :

1) Exposé des principales transformations régulières classiques, à savoir :

a) La *transposition* d'un terme d'un membre dans l'autre. Toujours sans danger.

b) Les transformations dues au calcul, qui sont régulières *sous réserve expresse* qu'elles remplacent une expression par une autre, *égale*.

Et c'est ici que je me permets d'insister.

La *notion d'égalité*, curieusement, apparaît comme une de celles qui, historiquement, a eu le plus de mal à se dégager avec netteté. L'idée que deux êtres mathématiques notés a et b ne puissent être égaux que si a et b désignent *un seul et même être mathématique* se trouve instinctivement refusée par des esprits déformés par une mathématique traditionnelle longuement cultivée en marge de la théorie des ensembles.

Or, le chapitre qui nous occupe est un lieu privilégié pour insister sur cette notion d'égalité. Ayant posé que des expressions algébriques sont des images par une certaine fonction, que j'appelle génératrice, *elles sont égales si et seulement si les fonctions génératrices sont égales : c'est-à-dire si ces dernières ont même domaine de définition et fournissent la même image pour tout antécédent.*

Et voilà le moment où il sera nécessaire, très particulièrement, de s'intéresser à des domaines de définition.

Ainsi, l'équation

$$x + \sqrt{x-3} = 1 + \sqrt{x-3}$$

à résoudre, par exemple dans $\mathbb{R}$, ne se remplacera pas régulièrement par $x = 1$ parce que l'expression $\sqrt{x-3} - \sqrt{x-3}$ n'est pas *égale* à l'expression 0.

c) Autres transformations régulières :

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \wedge B \neq 0$$

$$AB = 0 \Leftrightarrow (A = 0 \wedge B \text{ existe}) \vee (B = 0 \wedge A \text{ existe})$$

$$A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2 \wedge AB \geqslant 0$$

dont la conséquence classique est

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow (A = B^2) \wedge B \geqslant 0.$$

Je cite cette dernière équivalence pour illustrer l'*inutilité* d'une recherche *a priori* de domaine de définition. Il n'est que de penser à la résolution d'une équation comme celle-ci :

$$\sqrt{x^3 + 3m^2x + 1} = 2x - 1.$$

2) Conseil fondamental et universel.

Lorsqu'on est amené à une transformation non répertoriée comme classique, il faut d'abord étudier son domaine de régularité et partager le problème en deux :

a) Lorsque la transformation est régulière : résoudre en transformant.

b) Lorsqu'elle ne l'est pas : ici, il faut donc résoudre *sans transformer*. Ceci ne relève évidemment que du bon sens.

Dans l'exemple ci-dessus :

Dans le domaine $x > 3$, $x + \sqrt{x-3} = 1 + \sqrt{x-3}$ se remplace par $x = 1$, régulièrement. Et il n'y a pas de solutions dans ce domaine.

Dans le domaine $x < 3$, elle n'a pas davantage de solutions.

Je termine sur un exemple simple pour illustrer la démarche que j'impose à mes élèves.

$$① \quad \frac{x}{x-1} = a \quad \begin{array}{l}\text{à résoudre dans } \mathbb{R} \\ (a \text{ paramètre})\end{array}$$

$$① \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - a = 0 \text{ (transposition).}$$

Le premier membre est formé d'une expression *égale* à la suivante :

$$\frac{x(1-a)+a}{x-1} \text{ (dire pourquoi).}$$

Donc :

$$① \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-a)+a = 0 & ② \\ \text{et} \quad x-1 \neq 0 & ③ \end{cases}$$

Et

$$① \Leftrightarrow ② \wedge ③.$$

Traitons ②

Il n'est pas régulier de diviser par $1-a$.

D'où :

α) pour $1-a \neq 0$, ② $\Leftrightarrow x = \dfrac{a}{a-1}$.

Solution qui satisfait à ③, donc à ①.

β) pour $1-a = 0$, ② est « impossible ».

Résumé, etc.

J'ai bien conscience d'enfoncer des portes ouvertes. Mais, pour peu que l'on soit amené à utiliser des formules de transformation en trigonométrie, on risque, sans précautions relatives à l'idée des expressions égales parce que de même fonction génératrice, d'enrichir ou d'appauvrir fâcheusement l'ensemble des solutions d'un problème.

3. — Énoncés — Relations — Équations

par Mme G. MICHAU,
L.E.G., Belfort.

L'introduction de la logique en seconde, les contacts qu'une année d'I.R.E.M. m'a permis de prendre avec ceux qui, dans les autres académies, se sont intéressés à la logique, m'ont amenée à certaines réflexions que je livre ici, sans pour autant penser qu'elles soient autrement originales et au sujet desquelles je souhaiterais avoir des avis autorisés.

Faire des mathématiques, c'est jouer, en particulier, avec des énoncés ou phrases à caractère mathématique et qui, lorsqu'elles ont un sens, s'associent, dans notre logique bivalente, à deux valeurs de vérité : le *vrai* et le *faux*.

Remarque. — Je considère que : *« il est clair que »* nous savons reconnaître le caractère mathématique d'un énoncé, et s'il a ou non un sens. (Chacun sait que la locution *« il est clair que »* est précisément toujours employée pour voiler pudiquement un embarras et une incapacité à s'expliquer.)

Nous distinguerons, suivant une terminologie appartenant à M. Lacombe, deux types d'énoncés :

A) ***Les énoncés clos***, c'est-à-dire ceux dont la valeur de vérité est sans ambiguïté. Exemples :

1) $3 + 2 = 4 + 1$,

2) $3 = \dfrac{1}{1-2}$,

3) $\begin{cases} f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ \quad x \mapsto 2x + 3, \end{cases}$

est une application surjective.

B) ***Les énoncés non clos.***

Exemples :

4) $y = x^2$,

5) $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$,

6) $x^2 - 3x = 7$,

7) $\forall x \in \mathbf{R},\ [(a + x = b + x) \Rightarrow (a = b)]$.

La valeur de vérité n'est pas immédiate, du fait de la présence de lettres (dont il faudrait déjà préciser ce qu'elles représentent pour savoir au moins si les énoncés ont un sens).

Comment passer d'un énoncé non clos à un énoncé clos?

1° On peut individualiser les lettres et leur donner à chacune une « valeur ».

2° On peut utiliser des *mutificateurs* — c'est dans cette catégorie que rentrent nos *quantificateurs.*

Exemple : Voir que 5) devient clos et vrai avec $\forall x \in \mathbf{R}$, ou avec $\exists x \in \mathbf{R}$. Voir que 6) devient clos et vrai avec $\exists x \in \mathbf{R}$ et faux, bien sûr, avec $\forall x \in \mathbf{R}$. On peut clore 7) avec $\forall a \exists b$ ou $\forall a \forall b$ et le rendre vrai.

Voir aussi que l'énoncé 3) est clos, bien qu'apparemment il y figure la lettre x. Mais $\mapsto$ est précisément aussi un mutificateur — comme M. Chevallier l'a indiqué dans son article du *Bulletin* n° 271.

Insistons sur le fait qu'une faute ou abus courant consiste à poser des énoncés que l'on prétend vrais alors qu'ils sont *non clos* et en omettant de préciser la façon de les clore.

Exemple 1 :

On dit que

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \text{ est vrai.}$$

On n'aurait pas idée de dire de la même façon que :

$$x^2 - 3x - 7 = 0 \text{ est vrai.}$$

Les deux énoncés sont non clos et on peut les rendre vrais et clos en quantifiant convenablement et écrire pour le deuxième par exemple :

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x - 7 = 0.$$

Exemple 2 :

Si on fait l'étude suivante : « R et S » étant deux relations d'équivalence dans le même ensemble, (R ou S) est-elle d'équivalence?

On conclura facilement : (R ou S) est réflexive et symétrique mais non transitive.

En fait, la conclusion devrait être :

$\forall$R $\forall$S *si* R d'équivalence et S d'équivalence, *alors* (R ou S) est réflexive et symétrique.

$\exists$R$\exists$S, R d'équivalence et S d'équivalence (et) (R ou S) non transitive.

Exemple 3 : (tiré d'un manuel de Terminale C).

Prouver que (p est premier) équivaut à $[(a \times b \in [p])$ implique $(a \in [p]$ ou $b \in [p])]$.

Ici, l'absence de quantificateurs, sur plusieurs étages d'ailleurs, est plus qu'un abus. Nous y reviendrons.

Énoncés synonymes :

L'exemple ci-dessus me conduit à dire un mot de ces équivalences utilisées constamment dans nos manuels et qui sont, en fait, des énoncés non clos, composés de deux énoncés eux-mêmes non clos, connectés par le connecteur $\Leftrightarrow$ dont nous perdons plus ou moins la signification de connecteur pour lui attribuer le sens de : « a même signification que », « a les mêmes solutions que ».

Exemples : M appartient au cercle de centre A et de rayon R $\Leftrightarrow MA^2 = R^2$

$$(x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-1=0) \vee (x-3=0).$$

Lorsque nous pensons « a même signification que », nous sous-entendons un quantificateur universel : c'est pour les mêmes individus que les deux énoncés ont un sens et, lorsqu'ils ont un sens, leur valeur de vérité pour chaque individu est la même.

M. Lacombe appelle de tels énoncés : *synonymes* — qui me paraît un terme très commode si on veut s'éviter de quantifier constamment.

J'en reviens alors à l'exemple ci-dessus qui semblait traduire une synonymie entre les deux énoncés de part et d'autre du « équivaut ». L'énoncé de gauche contenant la seule lettre libre p et celui de droite en contenant trois : a, b, p, la synonymie apparaît vite douteuse.

La mutification de a et b s'impose à droite et on découvre que l'on aurait dû écrire :

$$\forall p \ [(p \text{ est premier}) \Leftrightarrow \forall a \forall b (ab \in [p] \Rightarrow (a \in [p] \text{ ou } b \in [p]))].$$

A défaut de ces précisions, en individualisant a, b, p, de la façon suivante dans l'énoncé, tel qu'il est donné dans l'exemple 3 :

$$a = 2 \qquad b = 5 \qquad p = 4$$

l'énoncé de gauche serait faux et celui de droite serait vrai, puisque le premier terme de l'implication serait faux.

En conclusion, il me semble que nous puissions aider nos élèves à formuler plus correctement leurs énoncés en ayant un souci d' « homogénéité » dans les synonymies.

Exemples :

1) « a est multiple de b » est synonyme de « $\exists k \in \mathbf{Z}, a = kb$ ».

Le premier énoncé comporte deux lettres libres et le deuxième aussi, k étant mutifiée.

2) Si l'on écrit « $f \neq I_E$ » est synonyme de « $f(x) \neq x$ », manifestement, l'homogénéité n'est pas respectée. Les élèves sentiront le besoin d'un mutificateur.

Relations-Équations.

Ces termes me trouvent, chaque année, plus embarrassée dans leur définition. Il me semble, maintenant, que, à leur propos, il est question d'un *énoncé non clos* au sujet duquel on s'intéresse à la partie E_1 de l'ensemble E dans lequel il s'individualise, *formée des éléments qui le rendent vrai.*

(E est un ensemble simple ou un produit cartésien, selon le nombre de lettres libres.)

Quand on parle de *relation*, E_1 est le *graphe de la relation.*

Quand on parle d'*équation*, E_1 est l'*ensemble des solutions.*

Transformer régulièrement un énoncé, c'est le remplacer par un énoncé autant que possible synonyme, mais *dont au moins la partie « vraie » soit la même.*

Ceci m'amène à hésiter à suivre les auteurs qui écrivent :

$$\sqrt{x-1} = x+2 \Leftrightarrow (x-1=(x+2)^2) \wedge (x+2 \geqslant 0)$$

Sans parler du remplacement de « $\Leftrightarrow$ » par « synonyme », je préférerais mettre « a les mêmes solutions que ».

4. — Des équations et autres situations

par Y. Oddos,
Lycée de La Mure.

I. Équations.

A. Divergences sur le mot « équation ».

Dans la plupart des expressions usuelles où le mot « équation » apparaît, sa principale utilité est d'interpréter une relation (*) d'égalité (de la forme $a = b$) comme condition portant sur une lettre ou sur des lettres. Or, de telles interprétations, tout en aidant l'intuition, n'influent pas sur la validité des raisonnements; elles sont, d'autre part, difficilement perceptibles dans l'écriture de la phrase mathématique : comment reconnaître, par exemple, si $x + 1 = y$ doit être regardée comme condition portant sur x, plutôt que sur y, ou sur (x, y), ou même sur une autre lettre ou un autre n-uplet?

Le souci de donner un rôle prépondérant à une lettre (x) pour justifier le nom « équation en x » et aussi, peut-être, l'espoir de dire, par l'écriture adoptée, que l'intérêt doit se porter sur x, ont conduit à différents procédés de fabrication de l'équation. Examinons ceux qui reviennent le plus souvent dans les manuels scolaires.

(*) Compte tenu des divergences actuelles sur le mot « relation », je précise que je donne à « relation » et aussi à « terme » leur sens bourbakiste (cf. Bourbaki. Théorie des ensembles. chap. I) Intuitivement, on peut entendre par relations : « phrases mathématiques exprimant des assertions sur des objets appelés termes ». Je dis aussi « relation A » pour « relation désignée (ou symbolisée) par A », « terme a » pour « terme désigné (ou symbolisé) par a ». De même, quand je parle de formalisation, c'est de formalisation bourbakiste qu'il s'agit.

1. *Quantification d'une relation d'égalité.*

En marquant l'intérêt accordé à une lettre au moyen du symbole existentiel, on aboutit au résultat suivant : la lettre x, que l'on veut mettre en évidence par les symboles abréviateurs $(\exists x)(a = b)$, $(\exists x \in E)(a = b)$, disparaît des mêmes relations formalisées; autrement dit, dans ces symboles x est une « variable muette ». Autre défaut : les relations $(\exists x)(a = b)$ ou $(\exists x \in E)(a = b)$ sont inutiles dans la résolution, par rapport à x, de $a = b$. Et, ce qui est plus grave, la terminologie devient incohérente quand on parle de « l'ensemble des x solutions de l'équation ».

2. *Utilisation de symboles interrogatifs.*

Exprimer l'équation en agrémentant la relation d'égalité — quantifiée ou non — d'un point d'interrogation, quelle que soit la place de ce nouveau symbole, n'avance à rien : la phrase appelée équation n'est plus une phrase mathématique car l'emploi du signe « ? » n'est pas codifié — comme est codifié, par exemple, l'emploi des signes relationnels fondamentaux ($\in$ et $=$) — par des schémas. En outre, je vois mal pourquoi une équation devrait être une question : pensons à « équation d'une droite » qui est plutôt une réponse!

3. *Utilisation des fonctions.*

Faire de l'équation un cas particulier de la relation d'égalité et amener implicitement une lettre et un ensemble référentiel dans l'équation par le biais des fonctions est une technique plus séduisante que les précédentes. Cependant, on complique ainsi, bien inutilement, une notion qui devrait rester une notion de base. De plus, dire qu'une équation est la relation $f(x) = g(x)$ — où chacune des fonctions f et g est une application d'une partie de l'ensemble E (référentiel) dans un ensemble F — est maladroit dans la mesure où le graphe de l'une de ces fonctions n'est pas connu autrement que par l'intermédiaire d'une... équation (par exemple, comme ensemble des couples (x, y) de $E \times F$ tels que $y = b$, b étant un terme qui ne dépend pas de y).

La diversité des concepts nommés « équations » — et je ne les ai pas tous passés en revue! — montre assez que l'unanimité est loin d'être réalisée. L'attitude la plus sage serait sans doute de tenir « équation » pour synonyme exact de « relation d'égalité » si, pour éviter le double emploi, une autre affectation du mot litigieux n'était pas souhaitable.

B. Équations (à référentiel).

La relation d'égalité, quand elle est interprétée comme condition portant sur une lettre x, est souvent complétée par une relation d'appartenance $x \in E$. Bien que l'adjonction de $x \in E$ à $a = b$ ne modifie pas les termes a et b — qui sont formés avant de former $a = b$ —, elle peut agir comme si elle limitait leur « contenu » : par exemple, lorsque dans a et b sont utilisés des symboles polysémiques ($+$, $.$, $\times$, etc.).

Souvent aussi, on dispose d'un théorème de la forme ($a = b \Rightarrow x \in E$).

Ainsi, explicitement ou implicitement, on travaille sur des relations de la forme ($x \in E$ et $a = b$) beaucoup plus fréquemment que sur des relations d'égalité seules. Je propose donc d'utiliser « équation » — éventuellement « équation à référentiel » — pour nommer de telles relations.

1. *Définition.*

x étant une lettre qui ne figure pas dans E, j'appelle « *équation en* x *de référentiel* E *et de membres* a *et* b » la relation ($x \in E$ et $a = b$).

2. *Commentaires.*

« Équation en x de référentiel E et de membres a et b » est donc un autre symbole abréviateur pour la conjonction de la relation d'appartenance $x \in E$, où l'ensemble E est donné indépendamment de x, et de la relation d'égalité $a = b$.

Dans la relation formalisée, comme dans son symbole abréviateur ($x \in E$ et $a = b$), la position de la lettre x est privilégiée; cette prééminence et la présence des termes symbolisés par E, a, b, justifient le nom donné à cette relation. Il ne faut toutefois voir dans ce nom aucune allusion à une éventuelle résolution; aussi je m'abstiens d'appeler x « l'inconnue de l'équation ». On pourrait dire que x est « la lettre principale ». On pourrait aussi, bien sûr, choisir pour ($x \in E$ et $a = b$) d'autres noms : « Équation de lettre principale x, de référentiel E et de membres a et b » ou « Équation en x sur E... » ou « E — équation en x... » ou encore « x — équation sur E... » à condition d'adapter le vocabulaire introduit ensuite.

3. *Incidences sur la terminologie traditionnelle.*

Dans « équation en x de référentiel E et de membres a et b », le mot « équation » apparaît comme le nom commun par lequel on désigne les relations de la forme ($x \in E$ et $a = b$). Cette modification, par rapport à l'emploi le plus usuel du mot — comme synonyme approximatif de relation d'égalité — a peu d'incidences sur les habitudes de langage; celles-ci y retrouvent parfois une certaine cohérence : on peut parler en toute sérénité de « l'ensemble des x solutions de l'équation » car ($x \in E$ et $a = b$) est *collectivisante en* x, c'est-à-dire, en gros, équivalente à $x \in S$; S est noté $\{x,\ x \in E \text{ et } a = b\}$. Dans la mesure où aucune autre « inconnue » n'a été désignée, il est sans doute possible de nommer S « l'ensemble des solutions de ($x \in E$ et $a = b$) » : c'est affaire de convention. Nous pouvons admettre aussi, sous les mêmes conditions, l'abus de langage « résoudre ($x \in E$ et $a = b$) » à la place de « résoudre, par rapport à x, ($x \in E$ et $a = b$) ». De toutes manières, c'est par de telles expressions, avec ou sans abus de langage, et non par la phrase mathématique ($x \in E$ et $a = b$) seule, que nous accorderons à x un intérêt particulier pour en faire « l'inconnue de l'équation ».

A propos de résolution, les expressions « *équation impossible* » et — sur-tout — « *équation indéterminée* » ne sont pas meilleures avec la nouvelle acception du mot « équation » et, si elles disparaissaient un jour de notre vocabulaire, ainsi que les poussiéreuses « transformations régulières d'équations », la perte ne serait pas très lourde. De même des expressions comme « $x = 1$ est la solution de l'équation » restent des abus de langage à éviter.

4. *Intervention des fonctions.*

Si f et g sont deux fonctions définies sur les parties D_f et D_g de E et si les termes a et b sont respectivement de la forme $f(x)$ et $g(x)$ — ce qui n'implique pas que la construction de a et b fasse intervenir f et g —, l'ensemble $\{x, x \in E \text{ et } a = b\}$ est contenu dans $D_f \cap D_g$ et f et g coïncident dans cet ensemble $\{x, x \in E \text{ et } a = b\}$. Pour $D_f \cap D_g$ une dénomination particulière se référant à l'équation : « ensemble de définition de l'équation » n'est pas indispensable.

5. *Équations en* (x, y).

L'équation en (x, y) de référentiel $E \times F$ et de membres a et b est la relation $((x, y) \in E \times F$ et $a = b)$, les lettres x et y ne figurant ni dans E ni dans F.

Nous retrouvons le cas classique des « équations à deux inconnues ». La généralisation à un n-uplet de lettres est évidente.

II. Situations (à référentiel).

A étant une relation, les relations de la forme ($x \in E$ et A) généralisent la notion d'équation. A cause de leur « pouvoir » collectivisant (en x), j'utilise, pour les nommer, le mot « situation » dépourvu d'affectation précise en mathématique; « situation à référentiel » pourrait convenir aussi.

A. Définition.

x étant une lettre qui ne figure pas dans E, et A une relation, la relation ($x \in E$ et A) est appelée *« situation en* x *de référentiel E suivant A »*.

B. Cas particuliers.

1. Si A est la relation d'égalité $(\exists\alpha)(a = b)$, nous obtenons pour ($x \in E$ et A) une « équation *paramétrique* » à distinguer de ($x \in E$ et $a = b$) où intervient la lettre α, dans les termes E, a ou b (équation *paramétrée* par α).

2. Avec ($x \in E$ et $(\exists\alpha \in P)(a = b)$) nous parlerons, par analogie avec le cas précédent, d'équation paramétrique sur P, bien que, dans le cadre des définitions proposées, le mot « situation », à la place de « équation », soit plus correct car $(\exists\alpha \in P)(a = b)$ n'est pas une relation d'égalité.

3. Pour ($x \in E$ et $a \leqslant b$) « ordination » conviendrait et permettrait de réserver « inéquation » à ($x \in E$ et $a \neq b$).

4. ($x \in E$ et (non A)) est la situation contraire de ($x \in E$ et A).

5. Avec ($x \in E$ et ($a = b$ et $a' = b'$)) nous avons affaire au classique « système de deux équations » noté aussi $x \in E$ et $\left\{\begin{array}{l} a = b \\ a' = b' \end{array}\right.$ et qu'il vaudrait mieux appeler « équation-double ».

Notons qu'elle est équivalente à l'équation $x \in E$ et $(a, a') = (b, b')$.

C. Situations en (x, y).

Les lettres x et y ne figurant ni dans E ni dans F, A étant une relation, la relation ($(x, y) \in E \times F$ et A) est appelée « situation en (x, y) de référentiel $E \times F$ suivant A ».

Ces situations en (x, y) servent par exemple à définir une correspondance de E vers F, le graphe de la correspondance étant l'ensemble des couples (x, y) solutions de $\{(x, y) \in E \times F$ et A$\}$.

Si $E = F$, ($(x, y) \in E \times E$ et A) sera éventuellement une relation d'équivalence dans E (par rapport aux lettres x et y) ou une relation d'ordre dans E (par rapport aux lettres x et y).

D. Remarques.

Notons ① la situation $x \in E$ et ($y \in F$ et A) et ② la situation $y \in F$ et ($x \in E$ et A).

① est une situation en x de référentiel E tandis que ② est une situation en y de référentiel F équivalente à la précédente.

$x \in E$ et $y \in F$ et A étant mis pour ($x \in E$ et $y \in F$) et A, remarquons la nécessité des parenthèses et la place de ($x \in E$) et ($y \in F$) dans ① et ② en liaison avec des symboles abréviateurs différents qui correspondent eux-mêmes à des assemblages formalisés tout à fait distincts.

De même, les relations ($x \in E$ et A) et (A et $x \in E$) sont distinctes. J'ai donné la préférence (en la désignant par un nom) à la première à cause de la permanence de x à une place bien précise (la 5°) dans l'écriture formalisée, particularité que nous ne retrouvons pas avec les relations de la forme (A et $x \in E$). Si rien n'interdit de donner un nom à (A et $x \in E$), peut-on choisir le même que pour ($x \in E$ et A)? En tous cas, il serait vain de donner le même nom particulier à toutes les relations équivalentes.

E. Quelques théorèmes.

1. *Symboles existentiels ou universels relativisés et situations.*

On a les théorèmes suivants :

$$(\exists x \in E)A \Leftrightarrow \{x, x \in E \text{ et } A\} \neq \phi$$
$$(\forall x \in E)A \Leftrightarrow \{x, x \in E \text{ et } (\text{non } A)\} = \phi.$$

Ces théorèmes permettent une approche ensembliste naïve de la notion de quantificateur relatif à un ensemble E. Ils permettent aussi de comprendre pourquoi les relations $(\exists x \in E)A$ et $(\forall x \in E)A$ ne dépendent pas de la lettre x.

2. *Conjonction et disjonction de situations en* x.

Les théorèmes suivants sont fréquemment utilisés dans les résolutions les plus classiques :

$$[(x \in E \text{ et } A) \text{ ou } (x \in E \text{ et } A')] \Leftrightarrow [x \in E \text{ et } (A \text{ ou } A')]$$
$$[(x \in E \text{ et } A) \text{ et } (x \in E' \text{ et } A')] \Leftrightarrow [x \in E \cap E' \text{ et } (A \text{ et } A')].$$

Ce ne sont d'ailleurs que des cas particuliers de théorèmes plus généraux sur la conjonction et la disjonction de relations.

3. *Sur la résolution, par rapport à* x, *de situations en* x.

Pour identifier l'ensemble des x solutions de $(x \in E \text{ et } A)$ on est amené à écrire des implications ou des équivalences entre des situations en x. Or, les relations suivantes sont équivalentes :

$$(\forall x \in E)(A \Rightarrow A')$$
$$(\forall x)[x \in E \Rightarrow (A \Rightarrow A')]$$
$$(\forall x)[(x \in E \text{ et } A) \Rightarrow (x \in E \text{ et } A')].$$

Par suite, lorsque nous disposerons du théorème $(\forall x \in E)(A \Rightarrow A')$, nous pourrons raisonner dans la théorie plus forte obtenue en posant (comme axiome supplémentaire) $x \in E$, puis utiliser le théorème de la nouvelle théorie : $A \Rightarrow A'$. Ceci permet d'alléger l'écriture des démonstrations dans la résolution, par rapport à x, de $(x \in E \text{ et } A)$ tant que les situations manipulées gardent le même référentiel : après avoir écrit $x \in E$, nous écrivons seulement des implications telles que $A \Rightarrow A'$ (ou des équivalences telles que $A \Leftrightarrow A'$, si nous disposons du théorème $(\forall x \in E)(A \Leftrightarrow A')$).

F. Fonctions résolvantes de situations.

A la situation $(x \in E \text{ et } A)$ dont l'ensemble des x solutions est noté S, ainsi qu'à toute relation équivalente, on associe la fonction caractéristique de la partie S de E, φ_S, application de E dans $\{0, 1\}$ définie par

$$(\forall x \in E)(\varphi_S(x) = 1 \Leftrightarrow A).$$

On voit que φ_S permet d'interpréter la résolution de $(x \in E \text{ et } A)$: je l'appelle « fonction résolvante (par rapport à x) de $(x \in E \text{ et } A)$ ».

D'autres fonctions interpréteraient aussi bien cette résolution : par exemple, l'application Φ de $\{0, 1\}$ dans $\mathcal{P}(E)$ telle que $\Phi(1) = S$ et $\Phi(0) = \complement_E S$; mais la fonction caractéristique se prête mieux au calcul. En effet, lorsque A est exprimée (logiquement) au moyen des relations $A_1, A_2, \ldots, A_n$, S_i étant $\{x, x \in E$ et $A_i\}$, φ_S s'exprime comme combinaison linéaire à 2^n coefficients dans $\mathbf{Z}$ des fonctions φ_E, φ_{S_i}, et des produits à 2, 3, ..., n facteurs des φ_{S_i}.

G. Utilisation des situations.

1. *Situation caractéristique d'un ensemble.*

($x \in E$ et A) est caractéristique de $\{x, x \in E$ et $A\}$ puisque cet ensemble est parfaitement déterminé par cette relation.

Exemples :

a) $\mathcal{P}$ étant un plan affine, P un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan vectoriel sur $\mathbf{R}$ appelé direction de $\mathcal{P}$ [$M \in \mathcal{P}$ et $(\exists\alpha \in \mathbf{R})\ (\overrightarrow{PM} = \alpha\vec{u})$] est une équation paramétrique sur $\mathbf{R}$ (caractéristique) de la droite passant par P et de vecteur directeur $\vec{u}$.

b) Avec les notations classiques pour le produit scalaire, le déterminant et la longueur, $\mathcal{U}$ désignant l'ensemble des vecteurs unitaires du $\mathbf{R}$-plan vectoriel $\mathcal{V}$ (euclidien et orienté), la situation

$$(u', v') \in \mathcal{U}^2 \text{ et } \left(u' . v' = \frac{u . v}{|u||v|} \text{ et } \det(u', v') = \frac{\det(u, v)}{|u||v|}\right)$$

est caractéristique de l'angle du couple (u, v) de vecteurs non nuls de $\mathcal{V}$ et peut servir à définir cet angle.

c) En calcul des probabilités, Ω étant l'univers associé à une épreuve, ($x \in \Omega$ et A) est caractéristique d'un *événement*. A est une relation de la théorie ensembliste adaptée, par des axiomes convenables, au problème envisagé; mais il n'y a aucun inconvénient à symboliser A dans le langage courant par des phrases — comme « la carte tirée est un roi », « le joueur gagne le tiercé dans l'ordre », etc. — se référant au problème qui a été « mathématisé ».

2. *Les situations et certaines notions floues de nos programmes.*

Exemple : les modalités d'un caractère statistique.

C étant un caractère statistique (application d'un ensemble fini $\mathcal{P}$ dans un ensemble X), la notion de « modalité » reste très nébuleuse dans les ouvrages scolaires. En disant : « les relations A_i seront appelées *modalités* (pour les valeurs du caractère C) lorsque les ensembles S_i des x solutions des situations ($x \in X$ et A_i) forment une partition de X », on serre d'assez près le sens intuitif de « modalité » pour obtenir un concept à la fois précis et respectueux des habitudes de langage.

3. *Justification de certaines techniques.*

Exemple : résolution par changement d'inconnue.

x et y étant deux lettres qui ne figurent ni dans E ni dans F et f une application de E dans F, supposons que A soit la relation obtenue à partir de la relation A' — où x ne figure pas — en remplaçant dans A' la lettre y par $f(x)$. Les relations suivantes sont alors équivalentes :

① $x \in E$ et A.

② $x \in E$ et $(\exists y)(y \in F$ et A' et $y = f(x))$.

③ $x \in E$ et $(\exists y \in Y)(y = f(x))$ où Y est l'ensemble $\{y, y \in F$ et A'$\}$.

Par ① ⇔ 3 la résolution de ($x \in E$ et A) est ramenée à la résolution d'une « équation paramétrique sur Y_{-1} » et on a

$$\{x, x \in E \text{ et } A\} = f^{-1} < Y >.$$

Remarque : ① est aussi équivalente à $(\exists y)\left[(x, y) \in E \times F \text{ et } \begin{cases} y = f(x) \\ A' \end{cases}\right]$ qui nous fournit $\{x, x \in E$ et A$\}$ comme première projection du graphe $\mathcal{G}$, ensemble des (x, y) solutions de $[(x, y) \in E \times F$ et $(y = f(x)$ et A'$)]$.

III. Conclusion.

Partant de la construction bourbakiste, j'ai choisi certains mots, à savoir : équation, situation, etc., pour symboliser certaines relations. Je ne prétends pas que la terminologie introduite soit la seule valable aujourd'hui dans notre enseignement : d'autres, partant des mêmes bases ou de bases plus intuitives, verront sous les mêmes mots d'autres concepts mathématiques.

Cependant, les phrases de la forme ($u \in E$ et A) — où u est un n-uplet de lettres —, quelles que soient les appellations plus ou moins interprétatives qui leur sont attribuées, peuvent jouer un rôle important — aussi bien dans la formulation des raisonnements que dans la présentation de nombreuses notions — et contribuer ainsi au renforcement de la cohésion entre les différents chapitres de nos programmes.

5. — " Équations " d'un genre particulier

par G. Schacherer,
Épernay.

Il est arrivé à tout professeur de proposer à ses élèves des exercices du genre :

1° Démontrer l'égalité $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$.

2° Comparer les nombres $5\sqrt{2} - 7$ et $7 - 4\sqrt{3}$.

Un des premiers réflexes de l'élève est de remplacer les nombres qui figurent dans les exercices de ce genre par des valeurs approchées et de comparer ces valeurs approchées.

Il est évident, du moins pour le professeur, que dans l'exercice 1° cela ne saurait être une démonstration. Quant à l'exercice 2° :

$$\begin{cases}\sqrt{2}\in\,]1{,}414\,;\,1{,}415[\\ \sqrt{3}\in\,]1{,}732\,;\,1{,}733[\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5\sqrt{2}-7\in\,]0{,}070\,;\,0{,}075[\\ 7-4\sqrt{3}\in\,]0{,}068\,;\,0{,}072[\end{cases}$$

et on ne peut pas conclure puisque les deux derniers intervalles se chevauchent.

Se souvenant alors (soyons généreux!) de l'équivalence

$$\begin{cases}a=b\\ a>0\\ b>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=b^2\\ a>0\\ b>0\end{cases}$$

l'élève déclare : « Élevons les deux membres au carré! » et écrit :

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2.$$

Mais, soucieux de logique, le professeur lui répond que la démonstration de l'implication $a=b\Rightarrow a^2=b^2$ a été faite de la façon suivante : $a=b$ signifie que a et b sont un même et unique nombre, qui a un carré unique que l'on peut donc noter a^2 ou b^2, ce qui s'écrit $a^2=b^2$; et que, comme l'élève ne sait pas que $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$, il ne peut..., etc.

L'élève peut alors poser $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $b=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$, calculer a^2 et b^2 et conclure! Malheureusement, cette méthode ne convient pas pour l'exercice 2°.

L'exercice 2° revient en fait à poser la question « quel signe faut-il mettre entre $5\sqrt{2}-7$ et $7-4\sqrt{3}$? » ou avec plus de précision :

« Sachant que $\mathfrak{R}\in\{=;<;>\}$ et que $5\sqrt{2}-7\;\mathfrak{R}\;7-4\sqrt{3}$, que vaut $\mathfrak{R}$? »

Cela ressemble étrangement à une équation dans laquelle l'inconnue $\mathfrak{R}$ n'est plus un nombre mais un signe.

Quant à l'exercice 1° il peut alors se mettre sous la forme :

« Montrer que l'équation $\sqrt{2}+\sqrt{3}\;\mathfrak{R}\;\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ a pour solution le signe $=$. »

La résolution de telles « équations » se fera par transformations régulières. En effet, si $*$ est la bijection $\mathfrak{R}\xrightarrow{*}\mathfrak{R}^*$ de $S=\{=;<;>\}$ dans S définie par la table

$\mathfrak{R}$	$=$	$<$	$>$
$\mathfrak{R}^*$	$=$	$>$	$<$

on a les équivalences :

(1) $$a\;\mathfrak{R}\;b\Leftrightarrow a+c\;\mathfrak{R}\;b+c$$

(2) $$\begin{cases}c>0\\ a\;\mathfrak{R}\;b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c>0\\ ac\;\mathfrak{R}\;bc\end{cases}$$

(3) $\left\{\begin{array}{l} c < 0 \\ a \,\mathfrak{R}\, b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c < 0 \\ ac \,\mathfrak{R}^*\, bc \end{array}\right.$

(4) $\left\{\begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \\ a \,\mathfrak{R}\, b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \\ a^2 \,\mathfrak{R}\, b^2 \end{array}\right.$

(5) $\left\{\begin{array}{l} a < 0 \\ b < 0 \\ a \,\mathfrak{R}\, b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a < 0 \\ b < 0 \\ a^2 \,\mathfrak{R}^*\, b^2 \end{array}\right.$

qui permettent de remplacer des équations par des équations équivalentes.

Résolution des équations précédentes :

I. $\sqrt{2} + \sqrt{3} \,\mathfrak{R}\, \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

par (4) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \,\mathfrak{R}\, \left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^2$

soit $5 + 2\sqrt{6} \,\mathfrak{R}\, 5 + 2\sqrt{6}$

ce qui est une équation évidente dont la solution est $=$. On a donc :

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}.$$

II. $5\sqrt{2} - 7 \,\mathfrak{R}\, 7 - 4\sqrt{3}$

par (1) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} \,\mathfrak{R}\, 14$

par (4) $98 + 40\sqrt{6} \,\mathfrak{R}\, 196$

par (1) $40\sqrt{6} \,\mathfrak{R}\, 98$

par (2) $20\sqrt{6} \,\mathfrak{R}\, 49$

par (4) $2\,400 \,\mathfrak{R}\, 2\,401$.

Ce qui est une équation évidente dont la solution est $<$. On a donc :

$$5\sqrt{2} - 7 < 7 - 4\sqrt{3}.$$