Une géométrie sur un cube

par Maurice GLAYMANN,
Directeur de l'I.R.E.M. de Lyon.

1. Une remarque préliminaire.

Que faut-il penser de l'enseignement de la géométrie dans le cadre de l'évolution actuelle?

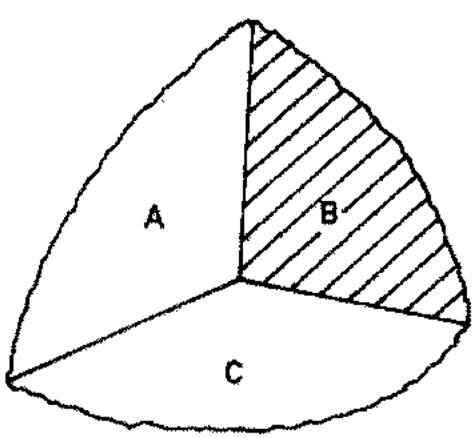
Nous pouvons affirmer que la géométrie n'est pas morte, bien au contraire! Cependant, l'enseignement traditionnel de la géométrie est à repenser, car il est trop renfermé sur lui-même : on enseigne la géométrie pour la géométrie. Il faut dans une optique moderne forger et utiliser des concepts qui permettent d'étudier la géométrie, mais aussi qui s'appliquent à d'autres domaines de la mathématique.

L'étude de la situation suivante est un exemple de ce que nous pouvons proposer à des enfants de Quatrième, voire même de Cinquième.

2. Étude du cube.

L'analyse *statique* d'un cube présente peu d'intérêt; par contre, l'étude dynamique d'un tel solide permet de mettre en évidence des groupes qui opèrent sur un ensemble.

Découpez dans du carton fort trois équerres A, B, C qui seront assemblées comme l'indique la figure. On obtient un coin.

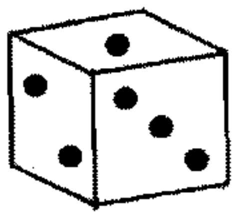


Construisez deux cubes dans du carton fort. Avec ces cubes fabriquez des dés. Sur un dé la somme des points marqués sur deux faces opposées est égale à sept. Combien y a-t-il de dés distincts?

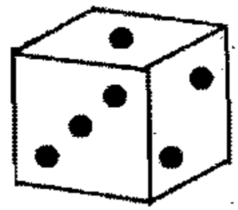
Pour la face supérieure, il y a 6 choix possibles. Prenons par exemple 1; dans ce cas la face opposée sera notée 6. Il reste alors 4 nombres disponibles. Pour une face latérale, nous avons donc 4 choix possibles. Prenons, par exemple, 2; la face opposée sera notée 5.

Pour les deux faces restantes, il y a deux possibilités.

Il existe donc *deux* types de dés.

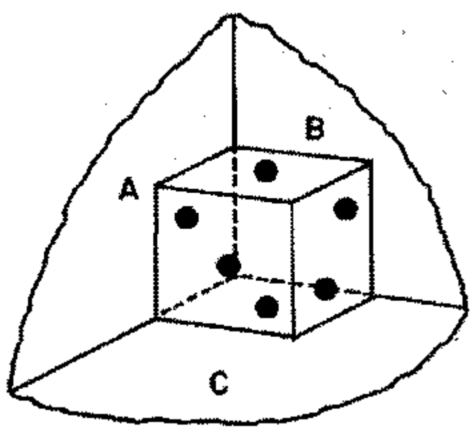


I



II

Choisissons le dé II et plaçons-le dans le coin.
La face 5 est contre A.
La face 4 est contre B.
La face 6 est contre C.



Le triplet (5, 4, 6) permet de caractériser la position du dé par rapport au coin.

A	B	C
↓	↓	↓
5	4	6

Notez que la donnée de deux nombres suffit pour repérer le dé, mais il est plus commode de conserver les trois termes du triplet.

On peut alors rechercher les triplets qui correspondent à toutes les positions du dé.

On peut poser aux enfants des questions du type :

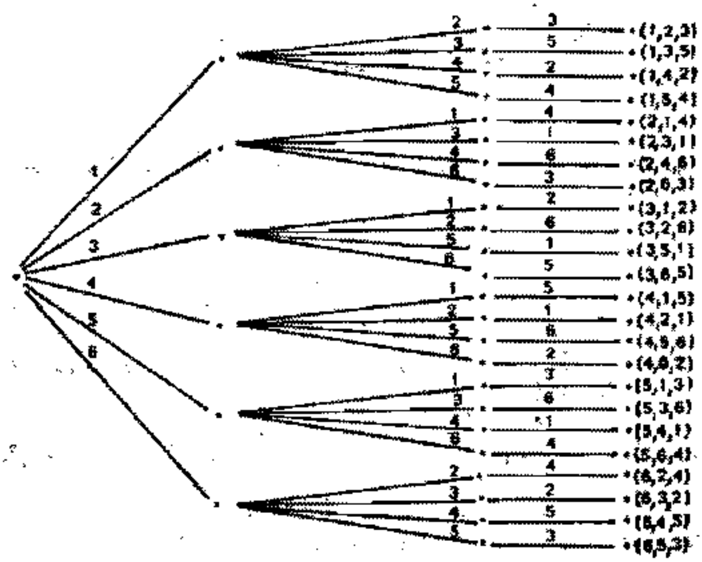
Le triplet (1, 2, 3) correspond-il à une position du dé?

En est-il de même du triplet (2, 1, 3)?

Remarque

Il existe 48 triplets; 24 correspondent aux différentes positions du dé I, les 24 autres correspondent aux positions du dé II.

Pour le dé II, l'arbre suivant met en évidence les 24 triplets qui lui sont associés.



Désignons par X l'ensemble de ces 24 triplets.

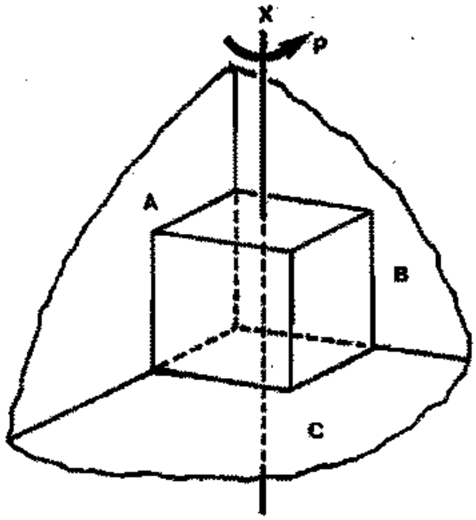
3. Opérons sur le cube.

Partons d'une position quelconque du cube et appliquons la *rotation d'un quart de tour* autour de la droite X, rotation notée p.

Ainsi, si nous partons de la position (2, 4, 6), la rotation p fait passer le dé à la position (4, 5, 6).

Ce que nous noterons

$$(2,\ 4,\ 6) \xrightarrow{p} (4,\ 5,\ 6).$$



Plus généralement, si (a, b, c) désigne une position du dé, il est facile de vérifier que

$$(a, b, c) \xrightarrow{p} (b, a', c)$$

avec $a + a' = 7$.

En utilisant plusieurs fois de suite la rotation p, est-il possible de passer de la position (2, 4, 6) à la position (3, 1, 2)?

En partant de (2, 4, 6) et en appliquant plusieurs fois la rotation p, nous obtenons la chaîne suivante :

$$(2, 4, 6) \xrightarrow{p} (4, 5, 6) \xrightarrow{p} (5, 3, 6) \xrightarrow{p} (3, 2, 6) \xrightarrow{p} (2, 4, 6).$$

Nous revenons donc à la position initiale.

Ce résultat peut se traduire par le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(2, 4, 6) \arrow[r, "\mathrm{p}"] & (4, 5, 6) \arrow[d, "\mathrm{p}"] \\
(3, 2, 6) \arrow[u, "\mathrm{p}"] & (5, 3, 6) \arrow[l, "\mathrm{p}"]
\end{tikzcd}$$

Ainsi, à l'aide de la rotation p, il n'est pas possible de passer de la position (2, 4, 6) à la position (3, 2, 1).

Plus généralement, si (a, b, c) désigne une position du dé, en posant $a + a' = 7$ et $b + b' = 7$, nous avons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(a, b, c) \arrow[r, "p"] & (b, a', c) \arrow[d, "p"] \\
(b', a, c) \arrow[u, "p"] & (a', b', c) \arrow[l, "p"]
\end{tikzcd}$$

Désignons par

$$p^2 = pp$$

la rotation composée

$$p\text{-suivie-de-}p$$

puis

$$p^3 = ppp$$

et enfin

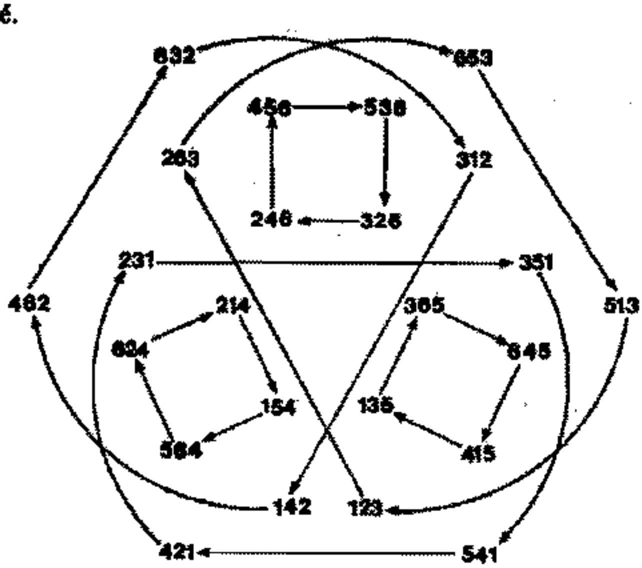
$$p^4 = pppp.$$

L'étude précédente montre que

$$p^4 = e$$

où e est la rotation qui ne modifie pas la position du dé.

L'ensemble $G = \{p, p^2, p^3, e\}$ muni de la loi de composition précédente est le *groupe cyclique d'ordre* 4. Ce groupe *opère* sur l'ensemble X des 24 positions du dé.

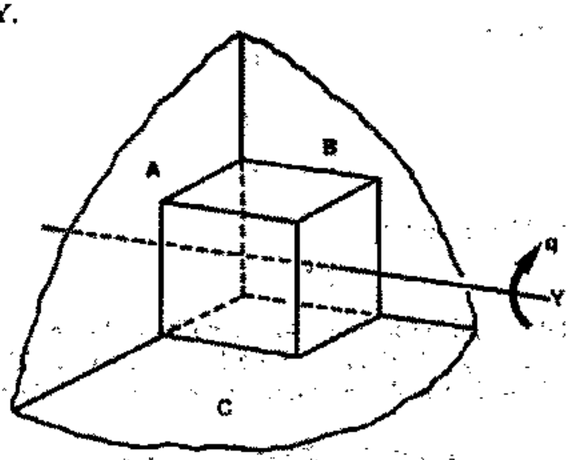


Nous constatons l'existence de 6 orbites :

$$O_1 = \{(2, 4, 6), (4, 5, 6), (5, 3, 6), (3, 2, 6)\}$$
$$O_2 = \{(2, 1, 4), (1, 5, 4), (5, 6, 4), (6, 2, 4)\}$$
$$O_3 = \{(1, 3, 5), (3, 6, 5), (6, 4, 5), (4, 1, 5)\}$$
$$O_4 = \{(2, 3, 1), (3, 5, 1), (5, 4, 1), (4, 2, 1)\}$$
$$O_5 = \{(2, 6, 3), (6, 5, 3), (5, 1, 3), (1, 2, 3)\}$$
$$O_6 = \{(6, 3, 2), (3, 1, 2), (1, 4, 2), (4, 6, 2)\}.$$

Comme (2, 4, 6) et (3, 1, 2) sont des éléments de deux orbites différentes, à savoir O_1 et O_6, il n'est pas possible de passer de la position (2, 4, 6) à la position (3, 1, 2) uniquement à l'aide de la rotation p.

Introduisons une seconde rotation q, rotation d'un quart de tour autour de la droite Y.



Ainsi, si nous partons de la position (2, 4, 6), la rotation q fait passer le dé à la position (2, 1, 4) :

$$(2, 4, 6) \xrightarrow{q} (2, 1, 4).$$

Plus généralement, nous avons :

$$(a, b, c) \xrightarrow{q} (a, c', b)$$

avec $c + c' = 7$.

En utilisant alors les rotations p et q, est-il possible de passer de la position (2, 4, 6) à la position (3, 1, 2)?

Cette fois la réponse est oui.

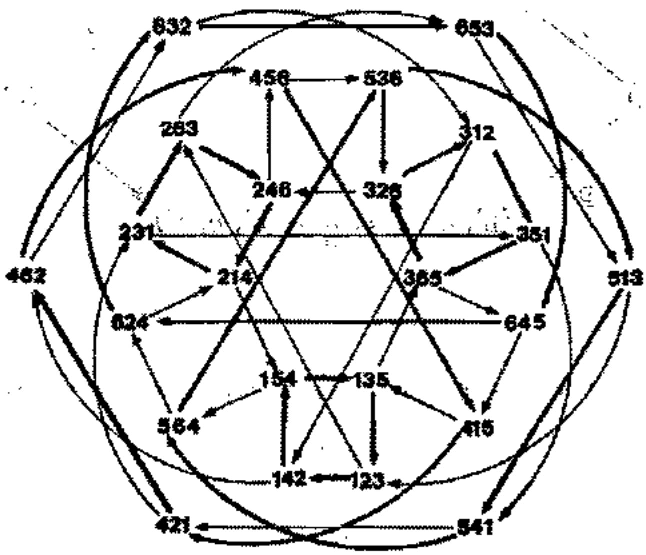
Après quelques essais, on est conduit à la solution :

$$(2, 4, 6) \xrightarrow{p} (4, 5, 6) \xrightarrow{p} (5, 3, 6) \xrightarrow{p} (3, 2, 6) \xrightarrow{q} (3, 1, 2).$$

Existe-t-il d'autres possibilités?

L'étude d'un certain nombre de problèmes du type précédent conduit tout naturellement à organiser la situation.

On obtient le schéma suivant, où les flèches maigres correspondent à la rotation p et les flèches grasses à la rotation q.



4. Mathématisation de la situation.

Nous avons vu que

$$p^4 = e.$$

La rotation p est d'ordre 4.

La rotation composée p suivie de q, notée pq, est d'ordre 3.

En effet,

$$\begin{tikzcd}
 & (b, a', c) \arrow[r, "q"] & (b, c', a') \arrow[dr, "p"] & \\
(a, b, c) \arrow[ur, "p"] & & & (c', b', a') \arrow[dl, "q"] \\
 & (a, c, b') \arrow[ul, "q"] & (c', a, b') \arrow[l, "p"] &
\end{tikzcd}$$

d'où l'égalité

$$(pq)^3 = e.$$

De même, la rotation composée p suivie de q suivie de p, notée pqp, est d'ordre 2.

En effet,

$$\begin{tikzcd}
 & (b, a', c) \arrow[r, "q"] & (b, c', a') \arrow[dr, "p"] & \\
(a, b, c) \arrow[ur, "p"] & & & (c', b', a') \arrow[dl, "p"] \\
 & (b', a, c) \arrow[ul, "p"] & (b', c, a') \arrow[l, "q"] &
\end{tikzcd}$$

d'où l'égalité

$$(pqp)^2 = e.$$

Partons de ces trois égalités que nous prendrons comme *axiomes* de la situation :

(1) $$p^4 = e$$

(2) $$(pq)^3 = e$$

(3) $$(pqp)^2 = e.$$

A partir de ces axiomes, cherchons à établir d'autres égalités que l'on peut d'ailleurs commencer par découvrir expérimentalement en utilisant le dé, ou en explorant le schéma de la page 725.

Démontrons par exemple :

(4) $$pqp = qpq.$$

Posons

$$x = pqp \quad \text{et} \quad y = qpq.$$

L'axiome (3) donne

$$x^2 = e.$$

L'axiome (2) $pqpqpq = e$ donne

$$xy = e.$$

En multipliant à gauche par x, il vient

$$x^2y = x \quad \text{avec} \quad x^2 = e$$

d'où

$$y = x.$$

De même, démontrons que

(5) $$(qp)^3 = e.$$

Partons de l'axiome $(pq)^3 = e$.
En multipliant à gauche par p^3, il vient

$$p^3(pq)^3 = p^3.$$

En multipliant à droite par p, il vient

$$p^3(pq)^3p = p^4.$$

Après simplification, nous obtenons

$$(qp)^3 = e.$$

Démontrons que la rotation q est d'ordre 4.
L'axiome $(pqp)^2 = e$, compte tenu de (4) s'écrit

$$qpq^2pq = e.$$

En multipliant à gauche et à droite par p, il vient

$$pqpq^2pqp = p^2.$$

Compte tenu de (4), on a encore

$$qpqq^2qpq = p^2$$

ou encore

$$qpq^4pq = p^2.$$

En multipliant à droite et à gauche par p, il vient

$$pqpq^4pqp = e.$$

En multipliant à droite et à gauche par pqp, il vient

$$(pqp)^2q^4(pqp)^2 = (pqp)^2.$$

Compte tenu du fait que

$$(pqp)^2 = e$$

il en résulte que

(6) $$q^4 = e.$$

Le lecteur pourra établir à titre d'exercice les égalités suivantes :

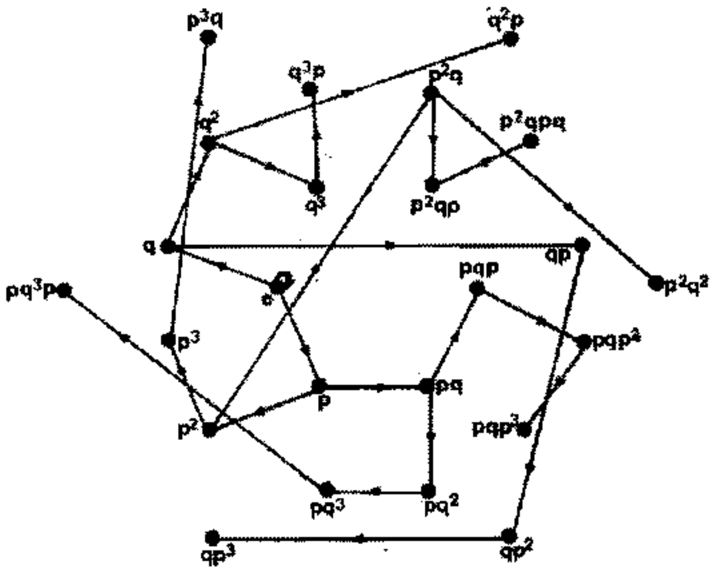
$$q^2pq^2 = p^3$$
$$(p^2q)^2 = e$$
$$qp^2q = p^2$$
$$q^2p^2 = p^2q^2.$$

Notons que nous aurions pu prendre un autre système d'axiomes.
Ainsi, par exemple :

$$p^4 = e$$
$$q^4 = e$$
$$(pq)^3 = e.$$

Cependant, un tel système, trop symétrique, rend les démonstrations plus difficiles. Il est alors intéressant de montrer que les rotations p et q engendrent un groupe H d'ordre 24 qui opère transitivement sur l'ensemble X.

Pour trouver les éléments de H, nous pouvons utiliser le schéma de la page 725 et cheminer sur ce schéma en partant d'une position initiale du dé. On est conduit à la représentation suivante, en partant de (2, 1, 4).



La recherche des sous-groupes de H est instructive; nous en avons mis un en évidence, le groupe engendré par p.

Il est important de présenter aux enfants plusieurs modèles d'une même structure; en désignant par U l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ et par a et b les deux bijections dans U

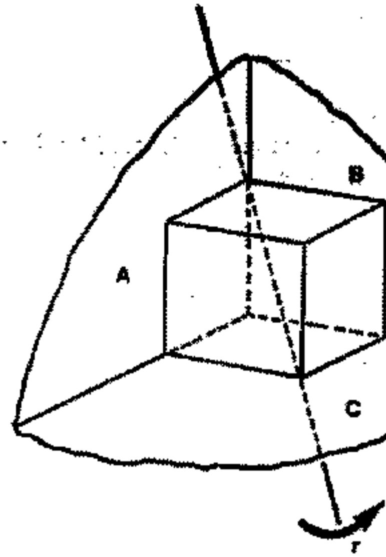
$$a \left| \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 1 \end{array} \right. \qquad b \left| \begin{array}{l} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 1. \end{array} \right.$$

Il est facile de vérifier que :

$$a^4 = i$$
$$b^4 = i$$
$$(ab)^3 = i$$

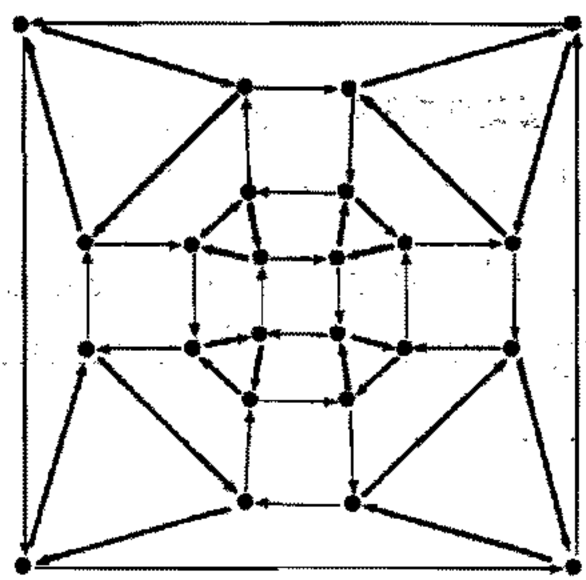
où i désigne la bijection identique de U.

Le groupe engendré par a et b est isomorphe au groupe H. Cependant, il opère sur un ensemble à quatre éléments.



De même, en reprenant le dé et en utilisant d'autres rotations, par exemple p et r, où r est la rotation d'un tiers de tour autour d'une diagonale, on est conduit aux axiomes :

$$p^4 = e$$
$$r^3 = e$$
$$(pr)^2 = e.$$



Pour la rotation r on a :

$$(a, b, c) \xrightarrow{r} (b, c', a')$$

avec $a + a' = 7$ et $c + c' = 7$.

Ici encore, nous obtenons un groupe K d'ordre 24 qui opère sur X.

Dans ce cas, nous obtenons le schéma précédent.

La comparaison des deux groupes H et K conduira les enfants à des découvertes utiles.

BIBLIOGRAPHIE

1) Galion S. O.C.D.L. HATIER.
2) K. S. Collins : Algebra from a cube Mathematics teaching (Spring1969).