Le shaddock a six becs

par A. DOUADY

Un exemple d'un polyèdre étoilé qu'on ne peut pas rendre convexe en faisant subir des homothéties à ses sommets

Dans [1], M. Demazure associe à certaines variétés algébriques un polyèdre étoilé, dont les faces sont des triangles. Il montre que, pour que la variété soit projective, il faut et il suffit que l'on puisse rendre le polyèdre correspondant convexe en faisant subir à ses sommets des homothéties (de rapports différents), puis il pose la question de savoir si cette condition est toujours satisfaite. Nous montrons par un exemple qu'il existe des polyèdres ne remplissant pas cette condition. Pour cela, nous n'utilisons que des notions de géométrie élémentaire.

P.S. — En modifiant l'exemple donné ici, on obtient un polyèdre correspondant à une variété considérée par Demazure, ce qui donne un exemple d'une telle variété non projective.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DEMAZURE (M.). — Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Crémona. A paraître aux *Annales de l'École Normale Supérieure*, Paris.

Soit $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $0 < \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{2}$. Soit $S = \{A_1, \dots, A_{12}\} \subset \mathbf{R}^3$, où

$$A_1, \dots, A_4 = \begin{pmatrix} \pm \cos\alpha \\ \pm \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_5, \dots, A_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \cos\alpha \\ \pm \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad A_9, \dots, A_{12} = \begin{pmatrix} \pm \sin\alpha \\ 0 \\ \pm \cos\alpha \end{pmatrix},$$

numérotés comme dans la figure 1.

Soit G le groupe des 24 isométries de $\mathbf{R}^3$ euclidien laissant stable S, c'est-à-dire le groupe engendré par les permutations circulaires des coordonnées et les symétries par rapport aux plans de coordonnées. Soit P l'icosaèdre irrégulier ayant comme faces les triangles $A_1A_8A_6$, $A_1A_5A_8$ et leurs transformés par les éléments de G. Le polyèdre P n'est pas convexe.

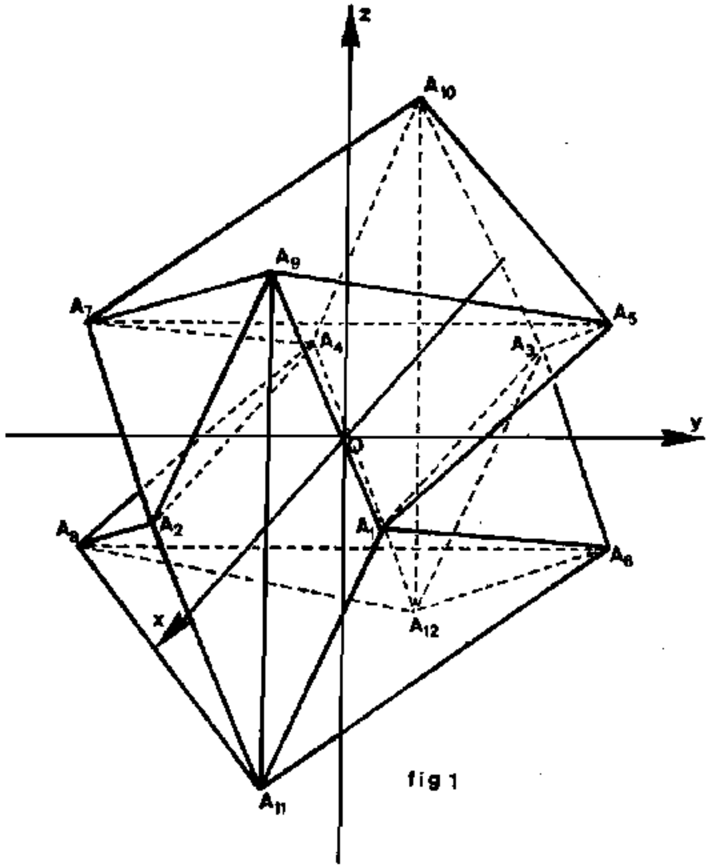

fig 1

Soient $r_1, \dots, r_{12}$ des nombres réels > 0, soient $A'_1, \dots, A'_{12}$ les points tels que $\overrightarrow{OA'_i} = r_i\overrightarrow{OA_i}$ et P′ le polyèdre correspondant à P ayant pour sommets les A'_i.

Proposition. — *On ne peut pas choisir les r_i de façon que P′ soit convexe.*

Démonstration : Quitte à transformer la figure par un élément de G et à faire une homothétie, on peut supposer que $r_1 = 1$ et $r_i \geq 1$ pour tout i. Alors, $A'_1 = A_1$. Soit M (resp. M′) le point où la droite A_1A_3 (resp. $A_1A'_3$) coupe Oy et N (resp. N′), le point où la droite A_5A_6 (resp. $A'_5A'_6$) coupe Oy. Sur l'axe Oy, on a $\overline{OM} = \sin\alpha$ et $\overline{ON} = \cos\alpha$. Dans le plan O$xy$, on voit (fig. 2) que $\sin\alpha \leq \overline{OM'} < 2\sin\alpha$, et dans le plan O$yz$, on voit (fig. 3) que $\overline{ON'} \geq \cos\alpha$. Or, $\cos\alpha \geq 2\sin\alpha$, donc $N' \notin [OM']$, d'où $N' \notin P'$ et P′ n'est pas convexe.

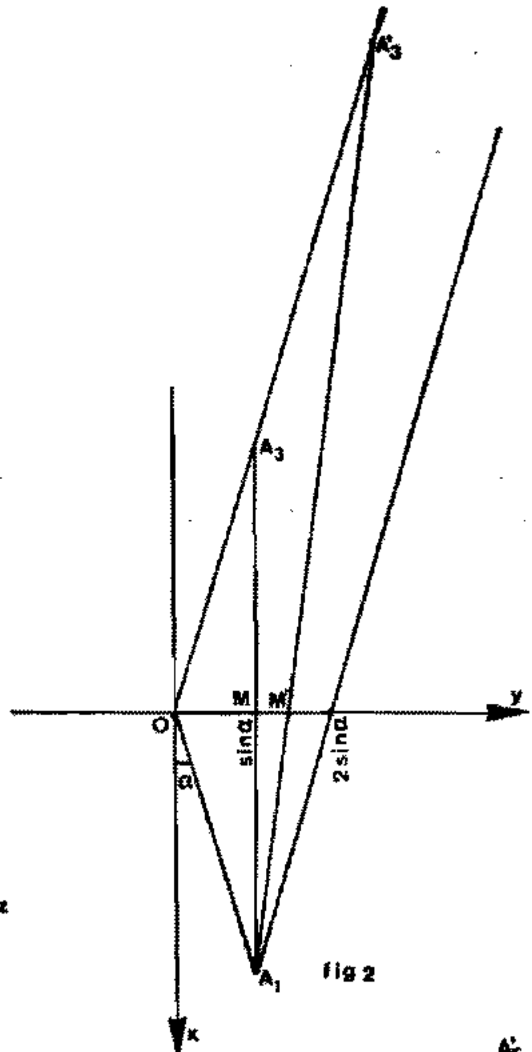

fig 2

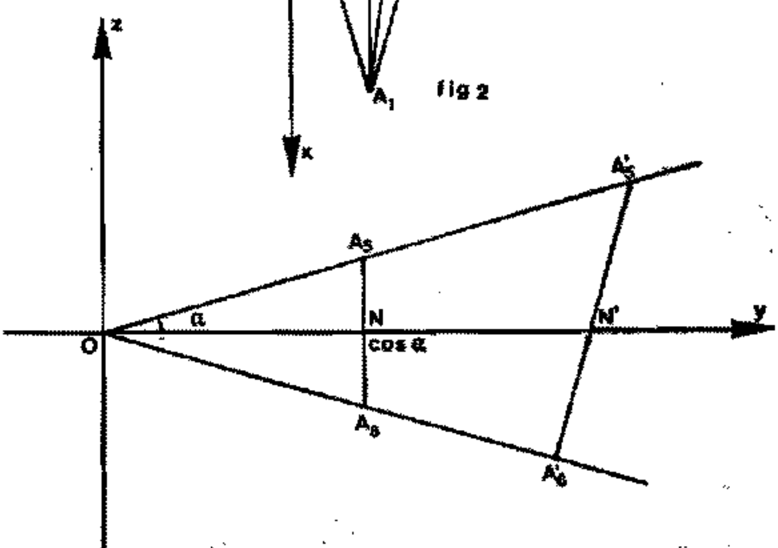

fig 3