Les rapports des groupes de travail

1 - Utilisation d'émissions de télévision pour le recyclage

par Jeanne BOLON

Deux émissions ont été projetées :

— l'une de la série "Atelier de Pédagogie — Activités Mathématiques" destinée aux instituteurs : Quadrillages du C.E. au C.M. Cette émission regroupait différentes utilisations de quadrillages abondamment commentées (présentation de travaux d'élèves et animation).

— l'autre, de la série "Chantiers Mathématiques", destinée aux professeurs du 1er et 2ème cycles : Patchwork. Cette émission, sans commentaire, suggérait d'utiliser papiers peints, dallages, etc... pour étudier les groupes de transformation sous-jacents.

Ces deux émissions ne sont pas représentatives de la production de la RTS : elles correspondent à des extrêmes dont le groupe devait dire s'ils étaient dangereux ou non.

Les participants auraient souhaité voir le film plusieurs fois, compte-tenu de l'absence de documents d'accompagnement : de tels films leur sont apparus trop riches, dans le cas où les documents d'accompagnement ne parviennent pas aux utilisateurs. Dans le cas contraire, (trop peu fréquent de l'avis des participants), de tels films sont très utiles, car ils enrichissent l'imagination.

La discussion a tourné beaucoup plus sur l'organisation des diffusions de la Radio-Télévision Scolaire que sur le style même des émissions :

– les documents sont distribués de manière incohérente (dossiers bimensuels, brochures, revue "L'éducation").

– ils sont distribués au compte-goutte, les CRDP arrivant très rapidement à épuiser leur stock.

– le nombre d'émissions nouvelles est trop faible : une même émission peut passer deux années de suite, mais pas trois. Cette année, il n'y a eu que cinq émissions nouvelles diffusées dans la série "Atelier de Pédagogie", et une émission nouvelle dans la série "Chantiers Mathématiques".

Concernant les émissions "Atelier de Pédagogie", les tandems "émission tournée en classe - émission d'explicitation" sont appréciés. Les classes y ressemblent maintenant à de vraies classes ...

En conclusion, les participants sont conscients de l'intérêt de la diffusion à domicile d'informations qui aident les maîtres à rénover leur enseignement, mais souhaitent que la situation stagnante de 1970-1971 ne se reproduise plus.

2 - Langage et Symboles

par J.-M. CHEVALLIER

La discussion, assez libre, effleure plusieurs sujets; mais elle se centre sur la différence entre l'objet (mathématique) et sa représentation (métamathématique).

Exemple : "Soit x un réel" : l'élève a tendance à chercher la lettre x parmi les réels alors que cela signifie que "x" est le nom d'un réel.

Une autre confusion apparaît, suivant que x désigne un réel assigné (un élément "quelconque" de $\mathbf{R}$) ou une "variable" réelle (l'élément "générique" de $\mathbf{R}$ - ne pas confondre *quelconque* et *générique* !). Ainsi : si x est une variable libre, $3=x+1$ est un énoncé (ni vrai, ni faux); si x est assigné, $3=x+1$ est une proposition, vraie pour 2, fausse pour tout autre réel.

Cette confusion est particulièrement grave dans le cas où la lettre est *mutifiée*. Par exemple :

$a|b$ signifie : $\exists\, x$, $b = ax$

$b|c$ signifie : $\exists\, x$, $c = bx$

d'où l'élève croit pouvoir conclure $c = ax^2$! (Bien que les deux lignes précédentes soient correctes, il semble que devant des débutants, il vaudrait mieux remplacer x par y dans l'un des deux). Exemple de même type bien connu : $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, est-ce que $(\mu_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ a la même limite ?

Accessoirement le cas de l'écriture des ensembles "en compréhension" est évoqué : est-ce le premier ou le second compartiment qui est mutifiant ? Faut-il écrire $\{ y / \exists\, x \in E , P(x) \text{ et } y = f(x) \}$ ou bien $\{ f(x) ; x \in E / P(x) \}$? La seconde écriture, adoptée par le Dictionnaire et de même type que $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ semble préférable.

3 - Part de l'individu et part de la société dans l'acquisition d'un langage mathématique

(enfants de 5-6 ans à 12-13 ans)

par Renée CALVET, institutrice à Decazeville

On peut distinguer trois stades en mathématique :

– l'enfant expérimente sans verbaliser,

– il verbalise,

– il apprend un langage mathématique.

I *L'enfant expérimente sans verbaliser*

1er exemple

1ère étape : Un enfant de 4 ans, à bicyclette, s'amuse à foncer vers un mur. Il tourne toujours au dernier moment en s'approchant de plus en plus du mur.
2ème étape : Il fait varier l'angle d'arrivée.
3ème étape : Il échange son vélo contre un plus grand et de couleur différente.

2ème exemple

– Une enfant de 6 ans rejoint sa mère tous les jours à 12 heures 20, au même endroit à environ 500 m de l'école.

– Deux jours de suite, elle arrive en retard. Sa mère ne comprend pas la cause.

– Le 3ème jour, elle la voit arriver par une rue qui lui allonge le parcours. Elle lui fait remarquer qu'elle aurait pu se presser. "Maman, j'ai couru tout le temps" répond l'enfant.

De cet exemple, nous pouvons conclure que l'enfant a vu le rapport "vitesse-temps", mais elle a oublié celui "temps-distance".

II *L'enfant verbalise*

La communication est la motivation de la vie humaine.

Le langage parlé vient bien avant le langage écrit.

Il faut que l'enfant sente le besoin d'introduire un langage précis pour pouvoir communiquer ses expériences.

C'est le problème de la motivation.

III *Acquisition d'un langage mathématique*

Par tâtonnements, on arrive au langage mathématique que tout le monde doit comprendre.

Expérience réalisée par Madame René Calvet, institutrice à Decazeville

Les enfants d'une école (classe C.M.) communiquent avec ceux d'une autre école. Ils envoient le dessin d'une maison.

Leurs correspondants doivent par des retournements, des translations, etc... arriver à placer la maison dans la position qu'ils leur indiquent ; exemple : cheminée à droite et en haut.

Les explications sont données :
- soit par écrit,
- soit par bande magnétique.

Au départ, les élèves font des erreurs et n'arrivent pas à se faire comprendre. Ils comprennent la nécessité d'un langage mathématique précis.

Les enfants choisissent eux-mêmes leurs symboles. Si le symbole utilisé n'est pas compris par les correspondants (qui eux-mêmes, auront choisi un symbole différent pour désigner la même notion) ils demanderont *le* symbole qui leur permettra de communiquer.

Mais très souvent l'école ne permet pas de laisser l'enfant vivre l'expérience.

Problème des enfants étrangers dans les classes *

Ce problème risque de s'aggraver si on continue à mettre des grands enfants de 14 ans dans des cours élémentaires.

Deux solutions ont été proposées :

1) Les petits étrangers viennent au cours préparatoire pour la lecture et repartent ensuite dans leur classe.

2) Ils suivent leur classe normale et une heure par jour sont tous réunis pour des séances de rattrapage.

L'école nous permet de remettre en question le système social qui tend à créer des fossés entre les diverses classes.

Cependant elle favorise le mélange qui ne se fait pas dans la société.

4 - Les opérateurs à l'école élémentaire

par C. HAMEAU

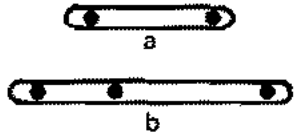
Les participants du groupe de travail ont souhaité préciser la notion d'*opérateur* à l'école primaire.

Les programmes du 2 Janvier 1970 ne font référence qu'à des opérateurs numériques. Cela n'exclut nullement les exercices portant sur les opérateurs non-numériques, ceux-ci constituant une excellente introduction et un utile prolongement pour l'étude des opérateurs numériques.

On a donc recherché quelques exemples d'opérateurs non-numériques susceptibles d'être étudiés avec des élèves de cours moyen. Les exemples suivants ont été proposés par les participants :

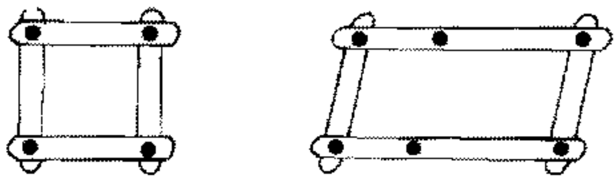
a) On dispose de deux séries de lattes :

Ces lattes peuvent être assemblées par un système de vis et d'écrous.



* Note de l'animateur : Le problème suivant a été soulevé par des participants, sans doute à partir du moment où il fut admis que le langage mathématique était un langage universel, à connotation très faible (donc très précis). Pourquoi, alors, ne pas utiliser *CE* langage, d'abord avec les petits étrangers qui arrivent âgés dans les classes ?

On assemble des tiges du modèle a et des tiges du modèle b de façon à obtenir un parallélogramme quelconque, un rectangle, un losange et un carré.



On envisage, pour les côtés, deux positions relatives des côtés (côtés perpendiculaires ou côtés non-perpendiculaires) et deux longueurs possibles (les côtés opposés ont même longueur ou bien ils n'ont pas même longueur).

On considère quatre consignes :

1°) Changer la position relative des côtés : s'ils sont perpendiculaires, on déforme la figure afin que les côtés ne soient plus perpendiculaires : s'ils ne sont pas perpendiculaires, on déforme la figure afin que les côtés soient perpendiculaires.

2°) Changer la longueur des côtés : si les côtés ont même longueur, on déforme la figure pour qu'ils n'aient plus même longueur ; s'ils n'ont pas même longueur, on déforme la figure pour qu'ils aient même longueur.

3°) On change à la fois la position relative des côtés et la longueur des côtés.

4°) On ne change rien.

On met ainsi en évidence quatre opérateurs qui opèrent sur l'ensemble des quatre figures géométriques que nous avons formées. On distingue nettement l'ensemble de départ et d'arrivée, d'une part, et l'ensemble des opérateurs d'autre part.

On peut composer ces opérateurs, c'est-à-dire considérer les éléments d'arrivée d'un opérateur comme éléments de départ pour un autre opérateur.

Deux opérateurs qui agissent de la même façon sur les mêmes éléments sont égaux. Ainsi, si nous désignons par (A) le premier opérateur, par (B) le deuxième, par (C) le troisième, on dira que (A).(C) = (B) parce que la chaîne d'opérateurs : (A) suivi de (C) opère de la même façon sur les mêmes éléments que l'opérateur (B).

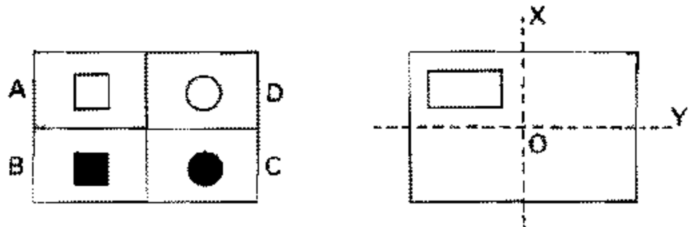
On peut étudier les propriétés de cette loi de composition.

b) L'ensemble de départ est constitué par les positions prises par quatre élèves qui peuvent avoir les bras levés ou baissés, avoir le tronc droit ou penché.

On considère les consignes :

– changer la position des bras
– changer la position du tronc
– changer à la fois la position des bras et la position du tronc
– ne rien changer.

c) On découpe deux rectangles de carton. Sur le premier on dessine quatre figures A, B, C, D. Sur le second on découpe une fenêtre qui fait apparaître l'une des quatre figures.



Pour faire apparaître une autre figure, il faut changer la position du second carton. On peut faire une rotation autour de l'axe X ou autour de l'axe Y ou bien faire un demi-tour autour du point O.

Ces consignes correspondent à quatre opérateurs.

Opérateurs numériques.

A l'école primaire ils sont un excellent exemple d'application.

Incidemment, ils donnent aux enfants l'occasion de faire de nombreux calculs.

On a noté l'importance de bien faire apparaître la valeur prédicatoire des signes utilisés dans les opérateurs numériques.

Les participants ont longuement discuté des difficultés rencontrées avec les opérateurs numériques, en particulier en ce qui concerne les opérateurs fractionnaires. La plupart des participants ont estimé que l'introduction des fractions à partir des opérateurs fractionnaires soulevait de nombreuses difficultés et qu'il serait préférable de repousser l'introduction des fractions à un stade ultérieur de la scolarité.

5 - Exploitation d'une situation vécue à l'école maternelle

par Mademoiselle MAKEDONSKY

Age des enfants : 5 ans - Effectif de la classe : 38 enfants

Point de départ choisi : *Une situation simple, vécue par les enfants avec assez d'intensité pour qu'elle leur pose réellement des problèmes :*

Tous les lundis, nous recevons dans le préau de l'Ecole Maternelle les 25 enfants d'un cours préparatoire pour des essais communs d'expression par la danse. Les enfants des 2 classes réunies tiennent à évoluer en même temps. Un désordre évident, ressenti comme gênant par les petits, s'ensuit.

Reprise de la question en classe : Comment arriver à danser tous ensemble, de façon à ce que chacun puisse le faire sans gêner personne et sans être dérangé par d'autres ?
Ières réponses enfantines : "On va dire d'avance où on sera dans le préau". "On va choisir les places de danse"...

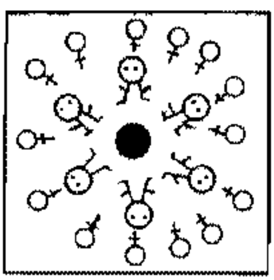
Des essais dans le préau, suivant les explications données, laissent les enfants insatisfaits : celui qui parle s'aperçoit qu'il n'arrive pas complètement à faire comprendre aux autres ce qu'il veut.
D'où un nouveau projet de la classe : "On va montrer la danse". "On va dessiner pour montrer".
Examen par les enfants des dessins réalisés à partir de ce projet :

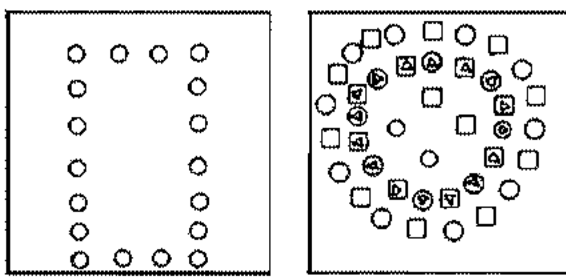
– *Ils remarquent d'abord que leurs dessins "parlent" et qu'on peut les "lire".* Ils insistent sur ce fait, qui est pour eux une découverte.

– *Ils réagissent très vivement au dessin de Christian, dans lequel les 1ers danseurs sont représentés ainsi :* , *alors que les derniers arrivés le sont comme ceci :* ♀

Discussion de la classe à partir de ce dessin : deux opinions très tranchées :

1)"Il a pas le droit de faire ça." 2)"Ca va parce qu'on comprend aussi bien qu'avec un dessin d'enfant tout entier". Les tenants de la 1ère opinion pensent que Christian a tort parce qu'il pourrait réussir un dessin plus complet de l'enfant et qu'il ne veut pas le faire. Les autres (la moitié de la classe à peu près) cherchent aussitôt à utiliser la possibilité nouvelle que le dessin de Christian leur a fait entrevoir : *"On pourrait prendre autre chose pour dire : un enfant"... "On mettrait un petit point ou un petit rond ou ce qu'on voudrait"...*


le dessin de Christian


dessins de deux autres enfants utilisant la possibilité découverte par Christian

Fin de la "dispute" : Qui a raison ? A-t-on "le droit" de représenter les danseurs ainsi ? ooo ♀ ♀ o
ou doit-on nécessairement les dessiner en entier avec le plus de détails possible : vêtements, cheveux, etc...? Un essai dans le préau convainct réellement : Certains dessins voulus représentatifs ne sont pas clairs, peuvent être interprétés de différentes manières et ne facilitent pas la réalisation de l'action souhaitée. Par contre, des dessins comme celui de Marie-Laure par exemple, permettent de savoir aussitôt comment se placer. C'est seulement à ce moment que la possibilité d'utiliser un signe convenu (♀ ooo) à la place d'une image plus proche de la réalité à évoquer est vraiment admise par la classe.

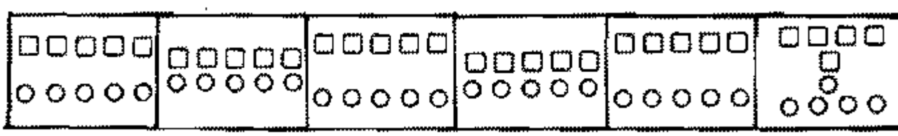
Communication avec un groupe ne connaissant pas les conventions adoptées dans la classe. A la grande surprise de mes enfants, les élèves du C.P. ne peuvent "lire" le dessin de Sophie qu'une fois qu'on leur a dit que : □ représente un petit garçon de leur classe, ○ une petite fille de leur classe, △⃝ une fille de ma classe, △⃞ un garçon de ma classe.

Aboutissement du travail : l'utilisation dans le préau, avec les 2 classes, d'un certain nombre de dessins pour l'organisation des évolutions donne aux enfants l'impression que leurs essais successifs les ont vraiment conduits à quelque chose, les ont aidés à parvenir au but souhaité : Danser, tous ensemble, d'une manière qu'ils puissent trouver satisfaisante.

Nouvelle question posée aux enfants : pour les aider à sortir de la situation vécue qui les a occupés longtemps et leur montrer que ce qu'ils ont fait pourrait leur servir en d'autres occasions (voisines en fait, mais que des petits peuvent ressentir comme différentes) :

Ce que nous avons fait pour la danse organisée avec les enfants du C.P. peut-il être fait pour d'autres danses ou pour celle-là seulement ? Est-il possible de représenter par le dessin n'importe laquelle des danses que nous connaissons ?

Résultat : Les enfants pour la plupart, sont très à l'aise, arrivent à des représentations très "lisibles" :



Représentation, par une petite fille, de la danse : "Pour passer le Rhône, il faut savoir danser..." (2 lignes d'enfants, tantôt écartées, tantôt plus rapprochées. A la fin, 2 enfants passent au milieu).

Passage à un autre moyen de représentation :
Un enfant, Franck, n'a jamais utilisé le dessin depuis qu'il a compris le sens des essais de Christian : Il se sert, depuis, de bouchons de matière plastique de couleurs différentes.

Remarques des enfants, invités à le regarder travailler et à donner leur avis :

— Franck, avec des bouchons de 4 couleurs différentes, arrive à dire la même chose que Sophie avec les 4 "dessins" qu'elle a choisis (○, □, △⃝, △⃞).

— Pour comprendre, il faut savoir ce que représente chaque couleur de bouchon.

— Les avantages et inconvénients possibles de ces deux moyens (dessin ou utilisation d'objets déplaçables) sont mis en discussion.

— "Il pourrait dire autre chose avec ses bouchons, si il voulait, Franck. Aujourd'hui, un bouchon bleu, c'est un enfant, parce qu'on a dit : ça serait un enfant. Mais un autre jour, on pourrait dire : ça serait un écureuil, si on voulait faire du calcul d'écureuil, ou ça serait un arbre ou tout ce qu'on veut si on a dit ce que c'est pour ce jour-là".
"C'est toujours le même bouchon, mais il dit pas toujours la même chose. Il dit ce qu'on veut ce jour-là".

Une supposition enfantine : "Si on prenait autre chose que des dessins ou des bouchons ? " conduit la classe à se constituer un matériel varié :

Propositions faites par les enfants : utiliser des graines, du carton découpé, des cailloux, des pierres et des briques, des petits bâtons et des allumettes; de la laine coupée collée sur du carton, pour faire du long et du rond, on ferait des pompons et des longs morceaux ; des crayons coupés en morceaux : des grands morceaux et des petits morceaux et des moyens morceaux, pour dire trois choses ; des nouilles ; des boutons de couleur...

Précisions données : "la pâte à modeler ne va pas, parce qu'on peut faire deux morceaux avec un".
"On ne peut pas prendre des haricots verts parce qu'ils vont pourrir et qu'il faut une chose qui reste".
"les crapauds et les grenouilles, ça ne va pas, même si c'est des fausses grenouilles ou des faux crapauds en dessin, parce qu'avec ça, on ferait que du calcul de grenouilles et de crapauds. Il faut une chose comme un bouchon, qui parle de ce qu'on veut ce jour-là."

A partir de remarques de ce genre, les enfants arrivent à définir les caractéristiques du matériel qu'ils désirent réunir : – objets "assez petits", – se conservant tels qu'ils sont (à l'inverse de la pâte à modeler, prise pour exemple de ce qui ne pourrait convenir). – Obejts de forme simple (boutons, cailloux...) pouvant servir à évoquer des situations très différentes. – Objets pouvant se distinguer nettement les uns des autres par la grandeur, la forme ou la couleur ("pour dire plusieurs choses").

S'ensuivent : – *Des apports en classe d'objets variés (en grande quantité) – des tris, des essais de rangement – des inventions de jeux,* à partir du matériel ainsi réuni.

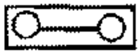
Situation nouvelle appelant à un nouvel effort d'organisation : Quelques meubles neufs sont livrés à l'école. Je les laisse au milieu de la classe et fais vivre aux enfants, une fois de plus, très complètement, l'expérience d'un désordre gênant l'action pour que tous sentent bien la nécessité d'établir un ordre.

Réactions des enfants : – Ils font d'eux-mêmes et aussitôt le rapprochement avec les situations de danse dans le préau ("ça sera pareil", "c'est pas plus difficile").
– Ils pensent à l'utilité de représentations préalables (dessin, etc...) – Ils pensent que des moyens différents (écriture, dessin, utilisation d'objets divers pris dans le matériel qu'ils ont réuni...) pourront être utilisés pour faire comprendre aux autres ce qu'ils proposent : ce qu'ils ont acquis lentement au moment du travail concernant l'organisation de la danse leur paraît maintenant évident.

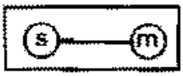
Disposition adoptée (après discussions) : tables placées 2 par 2 (chacun choisissant son vis-à-vis).
Remarques faites par les enfants à ce moment du travail :
– Jeux de suppositions : "Si Jean-Philippe voulait être avec Flora et si Flora ne voulait pas être avec Jean-Philippe, si Flora voulait être avec un autre et si celui-là ne voulait pas être avec Flora, alors..."
– "Il pourrait manquer une table pour mettre tout par 2, mais pas plus. Après, on aurait 2 comme il faut. Après, ça ferait 2 et 1, ça n'irait pas. 2 et 2, ça irait. 2 et 2 et 1, ça fait comme 1, ça va pas". (Jacqueline : 5 ans 1/2).
– "On peut pas faire un ordre sans un désordre. C'est un désordre qu'on peut pas empêcher, chaque fois qu'on change un ordre (Jean-Philippe : 5 ans 1/2).
Travail de la classe, à partir du choix de deux enfants, exprimé ainsi : "Marie-Laure veut être avec Sylvie. Sylvie veut être avec Marie-Laure."

Représentations successives :

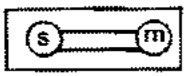
– (les 2 petites filles)



– les 2 petites filles seront ensemble



initiales ajoutées par un enfant pour que l'on sache de quelles petites filles il s'agit.

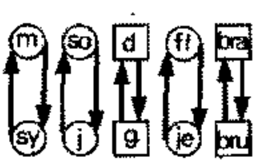


2 traits pour indiquer que le choix est réciproque : "On voit dans quel sens marche le trait quand on le dessine sur le tableau."

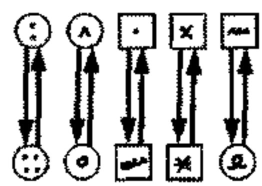
Après une critique (que je provoque) de l'essai précédent, les petits choisissent de placer une "boule" pour indiquer le sens des traits de relation.

Remplacement (après explication donnée aux enfants) de la convention qu'ils ont trouvée : par la flèche.

Quelques réalisations des enfants à la suite de ce travail :



à l'initiale, les enfants pensent à rajouter la 2ème et même la 3ème lettre du nom, quand il pourrait y avoir confusion (Brahim et Bruno, par exemple).



Brahim, qui ne sait pas bien écrire et ne tient pas à le faire, arrive cependant à bien montrer sur son plan qu'il s'agit d'enfants différents.

D'autres réalisations (faites individuellement, par groupes ou avec la participation de tous) conduisent à de nouvelles discussions.
La réinstallation de la classe se fait avec l'aide de tous, suivant les plans jugés les meilleurs par les enfants.

Nouveau projet, à partir de suppositions des petits : "Si on avait voulu, on aurait pu ranger la classe autrement". Des plans d'installations possibles sont alors faits.

Travail d'un enfant sur ce thème (enfant jugé, d'après les tests, comme "retardé", mais qui prouve que, lorsqu'un problème l'intéresse vraiment, il est capable d'un travail très construit) :

– Alain découpe des rectangles de carton (représentant les tables) en grande quantité.

— Il les place selon la disposition actuelle de la classe et obtient ainsi, sans avoir à compter, un nombre de morceaux de carton correspondant au nombre réel de tables. Il jette les cartons en trop.

— Il constitue, avec les cartons conservés, qu'il change de place, un nouveau plan très différent.

— Il arrive à dessiner un plan correspondant exactement à ce qu'il a fait avec ses morceaux de carton (par tâtonnements successifs : dessin d'une sorte de grille de rangement, déplacement des cartons posés sur cette grille, coloriage des emplacements choisis, vérifications diverses...).

A partir de ce travail que j'ai raconté à Toulouse, les discussions (rapides par manque de temps) du groupe ont porté sur :

1) le type de situations à choisir pour les exploiter à l'Ecole Maternelle.

2) le cas des enfants qui, comme le petit Alain, (dont j'ai parlé à la fin de ce travail) risquent de ne pouvoir s'adapter à certaines formes de la vie scolaire alors qu'ils sont capables d'initiatives intelligentes, de raisonnements construits et efficaces s'ils vivent très complètement une situation comme un problème qui les concerne et dont la solution leur importe.

6 - L'école expérimentale de Francheville-le-Haut (Rhône)

par André FABRE, directeur de l'Ecole de Francheville-le-Haut

En Septembre 1967, a débuté aux écoles primaires de garçons et de filles de Francheville-le-Haut, une recherche pédagogique remplaçant complètement l'enseignement traditionnel du calcul par celui de la Mathématique. Aussitôt toutes les classes ont été géminées du C.P. au C.M.2, notes et classements supprimés.

L'école maternelle voisine s'est jointe à l'expérience. Tous les maîtres étaient d'accord. La plupart d'entre eux étaient à Francheville depuis longtemps. Tous les maîtres qui étaient à Francheville en 1967 sont toujours en place en 1971, et leur équipe s'est étoffée car des créations de classes nouvelles sont devenues nécessaires. Ils ne regrettent pas "l'acte de foi" qui leur était demandé au départ car depuis, ils constatent chaque jour les bénéfices qu'apporte aux enfants cet enseignement rénové.

Seul le cadre expérimental permettait de renouveler le contenu du programme et les méthodes d'enseignement. Aussi les démarches furent-elles entreprises pour obtenir le statut d'école expérimentale.

Un arrêté ministériel du 25 Octobre 1967 attribua la qualité d'établissement expérimental aux écoles de Francheville-le-Haut.

Certes le paragraphe final de la lettre officielle précisait "La présente désignation n'entraîne pas pour autant l'ouverture de crédits supplémentaires. Par contre elle implique pour les chefs d'établissements intéressés, l'obligation de fournir à la fin de chaque année scolaire un rapport détaillé sur les résultats des expériences entreprises."

Heureusement, il en fallait davantage pour éteindre l'enthousiasme de l'équipe.

L'expérience est conduite en équipe sous la responsabilité du directeur de l'I.R.E.M. de Lyon et des deux I.D.E.N. de la circonscription. L'équipe de Francheville-le-Haut comprend des enseignants de divers niveaux :

deux membres de l'Enseignement Supérieur

les deux I.D.E.N.
quatre professeurs de lycée
les quatorze instituteurs
une psychologue scolaire
Très souvent elle est renforcée par deux professeurs d'Ecole Normale.

L'équipe se réunit chaque Mercredi de 17 heures à 19 heures 30 pour analyser les résultats de la semaine écoulée, préparer les activités de la semaine suivante et compléter la formation des maîtres.

L'école de Francheville-le-Haut était une école primaire parmi tant d'autres. Elle l'est restée car il n'y a eu sélection ni pour les maîtres ni pour les élèves. Elle est toujours l'école communale qui reçoit tous les enfants du village. Actuellement, deux instituteurs sont demi-détachés à l'I.R.E.M. de Lyon et participent à la formation des formateurs qui seront chargés du recyclage des instituteurs de l'Académie de Lyon.

Conditions de l'expérience

Les maîtres travaillent en équipe où l'on collabore étroitement. De même les élèves sont organisés en groupes de travail dès le Cours Préparatoire. Cette organisation du travail de groupe présenta au début de l'expérience de très grosses difficultés tant pour les élèves que pour les maîtres, mais pour les uns comme pour les autres, cette méthode de travail se révéla très fructueuse et formatrice. Précisons que des contrôles individuels sont effectués de temps en temps au C.M.1 et au C.M.2, mais qu'au C.P. et aux C.E. le travail est presque exclusivement collectif.

Une difficulté provint du fait que les locaux et le mobilier scolaires, s'ils conviennent à un enseignement individuel, ne sont pas du tout adaptés aux activités de groupes. En rapprochant des tables, en se servant de grands panneaux ardoisés, les maîtres parvinrent toutefois à organiser à peu près correctement leur classe en équipe.

L'expérience commença sur 3 niveaux ; C.P., C.E.1 et C.E.2. Et en 1970 se posa le problème de l'entrée en 6ème. Qu'allaient devenir les élèves de C.M.2 qui avaient bénéficié d'un enseignement rénové ?

L'école a pu obtenir une classe de 6ème spéciale dans un lycée proche. La continuité de l'expérience était donc assurée d'autant plus que le professeur de mathématique de cette 6ème était l'un des membres de l'équipe qui connaissait bien ses élèves car il les avait vu travailler bien souvent au cours de l'année scolaire.

La matière enseignée

L'essentiel des programmes appliqués dans les classes se trouve dans les fascicules Math-Equipe signés du sigle E. GARRON. Actuellement 4 sont édités pour Ecole Maternelle et C.P. ; 2 sont parus pour le C.E., les 2 autres pour le C.E. sortiront en Juillet et Septembre 1971. L'an prochain paraitront les fascicules pour le Cours Moyen.

Le contenu de l'enseignement donné à Francheville est très loin du programme officiel. Notons par exemple :

au C.P. : jeux logiques – cartes perforées – connecteurs – découverte de l'espace – topologie.

en numération : groupements en bases 3, 4, 5, 6 - codages de nombres dans ces bases - pas d'étude de la base 10.

au C.E. : diagrammes divers — groupe de Klein — approche de la structure de groupe — symétries et translations — congruences — activités numériques en bases diverses dont le 10 — opérateurs non-numériques.

au C.M. : approche des théorèmes de Morgan — structure de groupe — notion de mesure — congruences — combinatoire — probabilités et statistiques — activités pré-algébriques — organisation de l'information.

Le matériel utilisé — Blocs logiques (Dienès) - Multibases Dienès - Réglettes Dick - Matcub Asco...etc. Mais une grande partie du matériel est fabriqué par les maîtres eux-mêmes.

Réaction des instituteurs : Généralement les instituteurs qui voient travailler les élèves de Francheville-le-Haut sont à la fois conquis et déroutés.

Conquis car ils se rendent compte de la motivation puissante des exercices proposés aux enfants et de l'intérêt suscité par les séances de mathématique.

Déroutés par la matière enseignée et l'organisation nouvelle de la classe. Ils souhaitent unanimement recevoir une information mathématique qui permettrait de généraliser dans les classes élémentaires les résultats d'expériences pédagogiques semblables à celle de Francheville.

Réaction des parents

De nombreuses réunions de parents ont eu lieu sur le thème : la mathématique à l'école primaire. Nous en provoquons plusieurs chaque année.

La crainte essentielle des parents était au début de l'expérience de Francheville : "Mon enfant ne saura plus compter". Cette inquiétude a disparu à peu près totalement car les parents ont constaté que leur enfant commençait plus tard mais qu'au C.M., il comptait mieux et plus intelligemment.

Les familles ont dû admettre aussi de ne pas toujours comprendre ce que faisaient leurs enfants à l'école. On a noté aussi un notable recyclage mathématique des parents grâce à des conversations avec leurs enfants ou des jeux mathématiques rapportés de l'école. Un Cercle de Mathématique Moderne a fonctionné pendant deux ans à Francheville.

Un sondage opéré en 1968 donnait :

- 2,6 % opinion défavorable
- 52,6 % opinion favorable
- 32,1 % opinion très favorable
- 12,7 % sans opinion

Nous pensons qu'actuellement un sondage d'opinion donnerait des résultats encore meilleurs.

Comportement des élèves

Les instituteurs et tous les membres de l'équipe ont constaté que l'étude de la mathématique et la pratique du travail de groupes avaient apporté aux enfants bien des avantages : goût de la recherche, esprit critique, rigueur d'esprit, goût de l'invention et créativité, esprit d'équipe et établissement de rapports entre enfants sur le plan de l'égalité.

Les rapports entre maître et élèves se sont eux aussi modifiés. Ils sont devenus plus directs et plus francs. La confiance accordée au maître est entière bien que ce dernier n'échappe pas au cours des séances aux critiques éventuelles de ses élèves. Le dialogue est toujours sincère et naturel, l'expression orale plus vivante et plus riche.

Bien entendu cela a entraîné des répercussions profondes sur l'enseignement des autres matières où il a fallu comme en mathématique abandonner la leçon magistrale au profit de la recherche personnelle dans un groupe de travail.

Conclusion

A une récente réunion, un parent d'élève en souriant nous demanda :

"Mais enfin, pouvez-être sûrs que vous avez réussi ? "

Je lui répondis ce que je pense sincèrement :

"Non je ne suis pas sûr que nous ayons réussi. Mais trois choses pourraient faire dire que nous avons échoué :

1. Nous aurions échoué si nous n'intéressions pas les enfants. Or nous n'avons jamais connu autant d'enthousiasme et de jaillissement d'intérêt dans nos classes. Si bien qu'après la séance de mathématique, très souvent les élèves demandent comme une faveur de ne pas sortir en récréation pour pouvoir continuer à explorer une situation mathématique.

2. Nous aurions échoué si nos élèves calculaient moins bien que ceux des classes traditionnelles. Or ils calculent aussi bien sinon mieux, et surtout ils le font intelligemment car ils réfléchissent au lieu d'utiliser recettes ou mécanismes.

3. Nous aurions échoué enfin si notre école élémentaire n'avait pas rempli son rôle qui n'est plus de permettre d'entrer dans la vie active, mais d'apporter plus que des connaissances mémorisées une formation et des qualités d'esprit permettant d'aborder dans de bonnes conditions des études secondaires".

Ajoutons enfin que l'expérience a montré, une fois de plus, qu'il n'était pas possible d'avoir un enseignement efficace si l'effectif de la classe dépassait 25 élèves, et qu'il faudrait envisager, au moins dans les plus grandes classes (à partir du C.E.2), une certaine spécialisation des instituteurs.

7 - Une sixième après un enseignement rénové à l'école élémentaire

par Louis DUVERT (I R E M de Lyon)

Les 24 élèves (13 filles, 11 garçons) de la 6ème 8 du Lycée Jean-Moulin (Lyon) ont suivi à l'école élémentaire de Francheville-le-Haut un enseignement ordinaire au C.P. et au C.E.1, puis un enseignement rénové en mathématique au C.E.2, au C.M.1 et au C.M.2, puisque l'expérience de Francheville-le-Haut a commencé en septembre 1967 (1). Nous avons obtenu qu'ils puissent rester groupés dans une même sixième.

Je fais partie de l'équipe de Francheville depuis Septembre 1969. Sachant que j'allais être chargé de cette sixième, j'ai assisté à la classe de mathématique du C.M.2 une fois par semaine en 1969-1970.

---

(1) Voir page 517 le compte-rendu du groupe de travail sur "L'école expérimentale de Francheville-le-Haut".

Les objectifs fixés par l'équipe étaient les suivants :

1°) Maintenir une partie de l'avance quantitative qu'avaient acquise les élèves par rapport aux programmes de 6ème et 5ème.

2°) Continuer à pratiquer des activités mathématiques diverses, sans programme déterminé à l'avance, comme pendant leurs trois années scolaires précédentes.

Nous y sommes parvenus de la façon suivante :

a) Un peu plus de la moitié du temps a été consacré à l'étude, par groupes de quatre, des fiches GALION de 5ème. Pratiquement, le contenu du GALION de 6ème était connu des élèves, à quelques termes près qui ont été acquis "sur le tas" sans difficulté. Nous aurons fait dans l'année un peu plus de la moitié des fiches de 5ème.

b) Une interrogation écrite de contrôle tous les quinze jours.

c) Le reste du temps, activités diverses portant sur : combinatoire, probabilités, études de groupes opérant sur un ensemble, calcul littéral, logique et français, situations concrètes à mathématiser, jeux arithmétiques, calcul sur machines de bureau.

En quoi ces élèves se différencient-ils des élèves ordinaires de 6ème ?

En calcul, ils sont d'un niveau comparable ; ils dominent mieux les propriétés de 0 et de 1, en particulier le fait que 0 est absorbant pour la multiplication.

Ils ne possèdent pas un vocabulaire "moderne" très étendu : délibérément, leurs instituteurs ont employé avec eux le moins possible de termes techniques. En 6ème, ils ont appris le vocabulaire correspondant au programme officiel de 6ème ; ils se constituent chacun un lexique.

Mais ils sont évidemment beaucoup plus familiarisés avec les ensembles, les relations, les structures. Ils sont moins surpris de considérer à la fois des "phrases vraies" et des "phrases fausses".

Ils ont plus d'imagination créatrice, et inventent volontiers eux-mêmes des exemples et contre-exemples personnels (dans leur lexique par exemple).

Ils organisent mieux leur travail : recherche personnelle, travail en groupe (qui est à l'honneur à Francheville et que nous avons conservé), códage des données d'un problème,...

Ils ne sont pas gênés ni distraits par la présence dans leur salle de classe de visiteurs.

Nous pouvons dégager, sinon des conclusions, du moins des impressions :

1°) Lorsque le programme de l'école élémentaire aura été véritablement modernisé, et peut-être même à la suite de l'application du "programme 45 rénové 70", il faudra réajuster l'actuel programme de 6ème et de 5ème. D'où la nécessité d'expérimenter dès maintenant des thèmes divers au niveau de ces classes.

2°) Les méthodes ont au moins autant d'importance que les programmes : travail en groupe, situations à mathématiser, souci d'éviter le plus possible le dogmatisme et le conditionnement.

3°) Nous aurions pu envisager de consacrer le temps des activités libres à un seul thème en le poussant assez loin. Pour ma part, je ne regrette pas d'avoir plutôt "papillonné".

4°) Cette expérience me confirme dans une aspiration que je partage avec de nombreux collègues : au lieu des programmes démentiels et contraignants que nous subissons, nous demandons des programmes considérablement réduits dans leur volume, qui laisseraient – sauf dans les classes de niveau très faible – du temps disponible pour des thèmes, choisis librement par le professeur (et peut-être aussi par les élèves dans les grandes classes) parmi une liste suggérée à la suite des programmes officiels et accompagnée d'une documentation à l'usage des maîtres. Je souhaite que l'A.P.M. étudie sérieusement ce problème.

8 - Utilisation de fiches et travail oral

par Anne BRAILLY (Lycée de Sèvres)

Des nombreuses questions posées à Toulouse, à la Commission "Utilisation des fiches et travail oral", certaines ont retenu l'attention de l'animatrice :

Pourquoi des fiches ? Qu'est-ce qu'une fiche ? Comment les fiches sont-elles rédigées ? Pourquoi leur commercialisation ? Comment les utilise-t-on ? L'utilisation des fiches est-elle compatible avec un effectif important ? avec le contenu des programmes ? Quelle est la place du travail oral ?

Les lignes qui suivent, rédigées après ce débat, essaient d'apporter des réponses à ces questions, non définitives certes, et dont l'auteur espère qu'elles susciteront quelques commentaires.

La réforme de l'enseignement ne se limite pas à agir sur le contenu des programmes. La façon d'enseigner importe plus encore que le contenu.

L'enseignement des mathématiques, pour être vraiment utile au plus grand nombre, *doit être un enseignement dynamique, de découverte par l'enfant, un enseignement ne conditionnant pas à un seul mode de pensée, et développant de pair réflexion et action.* Ce but sera plus aisément atteint dans le premier cycle des lycées si on a souvent recours à l'étude de situations familières, nombreuses et variées. L'étude d'une situation consiste à y mettre de l'ordre, à l'organiser, à chercher les lignes suivant lesquelles s'exercent réflexion et action. Le rapprochement de certaines de ces études permettra de dégager des idées générales, des structures. Ainsi l'enfant ne sera pas mis en présence de la mathématique toute faite, il sera naturellement conduit à mathématiser lui-même.

Notons toutefois que l'étude de situations variées ne doit pas conduire à un émiettement des connaissances : un des rôles du professeur est précisément, après une période d'étude de situations, de recherches, et de découvertes, de provoquer et d'organiser des *synthèses.* Ces synthèses permettent de dégager des notions applicables par la suite à la résolution d'exercices pour lesquels on évitera de commencer le libellé des questions par "montrer que...", une telle rédaction a pour conséquence d'escamoter la partie, la plus difficile certes, mais aussi la plus riche, du travail mathématique.

I – Les moyens pédagogiques

Les expérimentateurs, qui d'ailleurs ne possédaient aucun ouvrage sur les nouveaux programmes, ont décidé de préparer des fiches de travail, et de les rédiger avec le souci de faire un enseignement ayant les caractères qui viennent d'être évoqués.

La commercialisation de ces documents a pour but de fournir aux collègues abordant les nouveaux programmes, sinon une solution, du moins un thème de réflexion dans la recherche d'un progrès de la pédagogie.

Ces fiches permettent à l'élève de construire lui-même son propre manuel : un manuel où rien ne sera inutile, où chaque paragraphe aura été l'objet de réflexion et qui constituera de ce fait un remarquable outil, un solide élément de référence auquel l'élève pourra se reporter à tout moment avec la plus grande aisance. Dans ces fiches, point de longs chapitres de cours mais surtout des exercices, des questions posées, de la façon la plus ouverte possible. Les exercices ont un double but : ils permettent d'illustrer une notion, rôle qui fut toujours celui des exercices, mais surtout ils peuvent encore, et avec efficacité, permettre d'introduire une notion, d'en faciliter la découverte et la compréhension.

Les auteurs des fiches qui ont souvent des conceptions différentes quant à la présentation, à la rédaction, accepteraient presque tous la description qui vient d'être faite du contenu des fiches.

Tous sont aussi d'accord sur le fait qu'elles ne constituent pas la panacée en matière d'enseignement et qu'il n'existe pas une méthode pédagogique qui constitue à élaborer des fiches, à les faire étudier par les élèves, individuellement ou en équipes. En fait, un même maître a recours, dans une même classe, et parfois au cours d'une même heure, à plusieurs techniques pédagogiques. Il doit avant tout rester attentif aux réactions de ses élèves qui dictent son attitude. Le but poursuivi, évoqué au début de cet exposé, sera plus aisément, et plus sûrement, atteint si l'enseignement par fiches n'exclut pas la vie collective de la classe, si l'utilisation des fiches s'accompagne de moments de travail oral.

II – Utilisation de fiches et travail oral

Il est impossible de décrire les différentes conceptions d'utilisation de ce matériel que sont les fiches. Tel professeur demande à ses élèves un travail surtout individuel, tel autre les invite le plus souvent à travailler en équipes.

Quelle que soit la méthode adoptée, aucun professeur ne croira à une étude faite *exclusivement* par fiches. Tous attachent une certaine importance au travail oral qui peut intervenir notamment :

– lors de la préparation d'une notion
– lors de la révision de certaines questions
– quand une synthèse se révèle nécessaire
– avant l'introduction d'un nouveau symbole
– pour faciliter certaines formulations difficiles à obtenir individuellement.

Les lignes qui vont suivre vont donner des illustrations de ces différents aspects du travail oral.

1 - Préparation d'une notion

Bien souvent il y a intérêt à ne pas distribuer trop rapidement une fiche. Cela risquerait de déflorer un sujet que l'on préfère préparer par un jeu ou un débat oral dont il ne reste alors aucune trace dans la rédaction de la fiche.

Par exemple : une sorte de "jeu de Kim" prépare l'étude de *l'inclusion*. Des objets sont déposés sur le bureau, puis cachés. Les enfants disposent de quelques minutes pour les observer et doivent ensuite écrire l'ensemble des objets dont ils ont gardé le souvenir. On obtiendra ainsi des "parties" de l'ensemble des objets exposés et, avec un peu de chance, la partie pleine et la partie vide. L'inclusion sera bien préparée.

C'est aussi un jeu qui, en sixième, précède *l'introduction des entiers relatifs*. C'est le jeu des boulons et des écrous dont les étapes sont brièvement retracées dans les fiches (Edition Magnard, 122 boulevard Saint-Germain, PARIS 6ème).

On pourrait citer bien d'autres exemples de travaux, ou jeux collectifs, non évoqués, ou brièvement évoqués, dans les fiches, et destinés à préparer l'introduction d'une notion.

2 – Révisions

Les révisions, telles celles sur les relations en quatrième ou sur **R** en troisième, donnent aussi lieu à cette forme de travail collectif.

3 – Synthèses

Les synthèses prennent une importance croissante au cours du premier cycle. En sixième des notions sont approchées mais il y a peu de formalisation. Les concepts sont rarement dégagés, c'est plutôt le stade "descriptif" de situations nombreuses, variées, mais simples. Ainsi étudie-t-on des relations et remarque-t-on, en sixième, qu'elles jouissent de telle ou telle propriété. C'est plus tard qu'on rapprochera diverses études de relations symétriques, réflexives et transitives. De telles relations ayant été souvent rencontrées on leur donnera un qualificatif : ce sera les *relations d'équivalence*.

Un travail analogue de rapprochement de situations mettant en évidence des relations antisymétriques, transitives et réflexives, conduira au concept de *relation d'ordre*.

L'étude collective, et le classement qui en résulte, de schémas cartésiens ou de schémas sagittaux d'un grand nombre de relations permettra de distinguer *fonctions, applications* et *bijections*.

C'est après qu'ait eu lieu un tel travail collectif que sera distribuée la fiche sur laquelle sont rédigées les définitions d'une fonction, d'une application, d'une bijection. Il est nécessaire que les élèves aient à leur disposition une définition correcte de ces différents types de relations mais il est non moins nécessaire que ce soit *eux* qui en fassent la découverte.

Une notion comme la *notion de groupe* se prépare pendant un temps plus long encore. De nombreux exemples de groupes finis sont étudiés, les tables sont construites sans qu'il soit explicitement question de groupe. Il est donc normal à un certain moment de faire l'inventaire des parties du cours et des exercices déjà faits, susceptibles d'être utilisés pour dégager la notion de groupe.

Cet inventaire est construit par les réponses qu'apportent les élèves à la question "Quelles sont les tables d'opération rencontrées en sixième, cinquième, quatrième ? " Chacune de ces opérations a fait l'objet d'une étude au moment où elle a été rencontrée : ses propriétés ont été recherchées. Mais toutes ces études ont été réparties sur plus de 2 ans : une mise au point s'impose donc à un certain moment. Une nouvelle notion sera dégagée de la confrontation de divers exemples.

Trois opérations peuvent finalement être retenues parmi les propositions des élèves ; un nombre plus grand disperserait l'attention.

Dans le travail fait à Sèvres :

L'exemple 1 illustre la partie du programme intitulée : composition des bijections

$E = \{R, S, T, U, V, W\}$ E est l'ensemble des bijections dans un ensemble à trois éléments.

L'exemple 2 dans lequel on reconnait le groupe de Klein est résulté de l'étude des symétries du rectangle.

L'exemple 3 est un exercice d'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (congruences modulo 2) facile et intéressant.

Le travail consiste alors à trouver les propriétés communes aux 3 opérations. La recherche peut être faite par équipes en invitant les élèves à organiser cette recherche et à présenter les conclusions de la façon la plus nette, la plus expressive.

Propriétés	Exemple 1	Exemple 2	Exemple 3

Le rapprochement de ces exemples permet de constater qu'il s'agit dans chacun des cas étudiés d'une opération dans un ensemble E :

- interne
- associative
- telle qu'il existe dans l'ensemble considéré un élément neutre pour cette loi
- telle que tout élément de E admet un symétrique pour cette loi.

La *notion nouvelle* est alors dégagée :
on dit que l'ensemble E est muni par cette loi d'une structure de *groupe.*

Remarque : L'associativité, non en évidence sur les tables, doit faire l'objet de commentaires. Pour établir cette propriété de nombreuses vérifications sont nécessaires : elles peuvent effectivement être réalisées dans l'exemple 3.

Pour *vérifier l'assimilation de la notion de groupe* un retour à l'inventaire fait au début de ce travail de synthèse sera nécessaire. Il importe en effet de bien savoir *reconnaître un groupe ;* les élèves devront faire une partition de l'ensemble des exemples inventoriés en deux classes :

d'une part, ceux dans lesquels l'opération munit l'ensemble d'une structure de groupe,

d'autre part, ... les autres.

Les conclusions de ce travail de synthèse se retrouvent dans une fiche, mais il y a aussi les synthèses dont on ne trouve aucune trace dans les fiches-élèves ; moins "denses" mais non moins nécessaires, elles interviennent lorsque le professeur remarque une difficulté à comprendre le fil conducteur d'une fiche, à saisir l'objet d'une étude. Peut-être s'agit-il là plus de mises au point que de synthèses véritables ? Quoi qu'il en soit, ces moments de travail oral sont toujours rentables puisqu'ils permettent un nouveau départ sur un terrain sûr.

4 – Formulation

Une fiche où tous les *énoncés de théorèmes* seraient rédigés négligerait un des aspects très formateurs de l'enseignement des mathématiques : l'apprentissage d'une bonne formulation.

Dans de nombreuses fiches sévriennes, en géométrie surtout, un guide est fourni aux élèves pour la démonstration d'un théorème. Des questions correspondent aux diverses étapes à parcourir. Ces questions sont d'autant plus précises que la difficulté a paru plus grande aux rédacteurs. Il importe que, ces étapes parcourues, les élèves comprennent le résultat qu'ils ont obtenu et un cadre est destiné à recevoir le libellé du théorème démontré. Rarement les élèves sont capables de donner une formulation correcte. Elle est en général, sinon incorrecte, du moins incomplète. Il est bon et efficace de faire discuter collectivement certaines propositions d'énoncés.

Un travail collectif est également intéressant lorsqu'il s'agit d'introduire un nouveau symbole ; un symbole qui apparaîtrait artificiellement dans une fiche ne serait pas compris. Il faut que les élèves en aient senti la nécessité : seule une discussion collective orale montrera au professeur si le moment de l'introduction est venu ; ce moment peut se situer bien avant que soit étudiée la fiche dans laquelle le symbole fait son apparition.

III – Intérêt du travail sur fiches

1) Tout ce qui précède montre assez l'intérêt d'un travail par fiches. L'utilisation de fiches, surtout si elle s'accompagne d'un travail oral tel celui qui vient d'être décrit, permet une *pédagogie vivante, de vraie découverte.* Le travail oral collectif respecte malgré tout le rythme de chaque enfant si possibilité est donnée aux plus rapides de faire des fiches supplémentaires ou des exercices portant la mention "facultatif".

2) Le travail par fiches est soumis à un *contrôle permanent du professeur* circulant dans sa classe, toujours prêt à dialoguer, à conseiller, à tirer parti d'une erreur relevée.

3) Les fiches ont une *grande souplesse d'utilisation* et ne figent pas le cours dans une forme définitive. L'utilisation, l'exploitation suggèrent des modifications. Il est facile de refaire une fiche qui n'a pas été satisfaisante, de créer une fiche supplémentaire si une notion "passe mal".

Le travail sur fiches, intéressant et efficace, appelle toutefois une réserve. Si les connaissances ainsi acquises sont plus solides, il convient de noter que cette acquisition exige plus de temps, compte tenu de la participation *réelle* de chaque enfant à la recherche et à la découverte. Il serait donc souhaitable d'avoir des programmes allégés et des effectifs raisonnables !

Il est intéressant, pour conclure, de donner les impressions d'une équipe travaillant à l'élaboration et à l'expérimentation des fiches. A Sèvres les membres de l'équipe (au nombre de quatre) se réunissent chaque semaine durant quatre heures. Un sujet a été proposé la semaine précédente comme thème de réflexion à toute l'équipe. Ses projets, qui ont fait l'objet d'une rédaction sommaire, sont étudiés collectivement et critiqués. Critiques franches, directes et constructives, acceptées sans réticence par les auteurs. La rédaction définitive est faite collectivement après accord sur un plan donné. Il est apparu en effet que c'est au moment de la rédaction qu'apparaissent les principales difficultés.

Il convient de noter que les fiches sont rédigées semaine après semaine en tenant compte des réactions des élèves aux fiches déjà étudiées. Une partie du temps de réunion est d'ailleurs réservée à la discussion des modifications qu'il est nécessaire d'apporter aux fiches déjà traitées pour tenir compte des observations faites. De temps en temps, lorsque se présente la nécessité de faire un choix sur la façon de traiter une partie assez importante du programme (exemple : relations d'incidence en géométrie affine, introduction des entiers relatifs), a lieu dans l'équipe une réunion-débat au cours de laquelle aucune rédaction n'est faite.

Les membres de l'équipe de Sèvres estiment devoir beaucoup à ce mode de travail. Ils ont gagné un approfondissement de leurs connaissances et ont, en outre, appris à s'écouter et à se comprendre. Les jeunes collègues qui, assurant le remplacement d'un des membres en congé, se sont trouvés admis dans l'équipe ont apporté leur jeunesse et leurs connaissances toutes fraîches et ont, en échange, estimé avoir beaucoup bénéficié de l'expérience des plus anciens.

9 - Interprétation mathématique de quelques problèmes linguistiques

par J. et A. ROUMANET, professeurs de Français et de Mathématiques au Lycée Rodin, Paris.
Service des Etudes et Recherches Pédagogiques - I.N.R.D.P.

En ce qui concerne la coordination entre Français et Mathématiques, deux choses sont à distinguer :

– Le professeur de Français qui veut tenir compte, dans sa classe, des données de la linguistique, et qui par conséquent essaye de se recycler dans cette science, éprouve le besoin d'une certaine *information* en mathématique : au niveau du vocabulaire employé, au niveau de certains outils mathématiques, et de quelques notions (en combinatoire par exemple). Un recyclage en Mathématiques à l'intérieur d'un établissement, fait par des professeurs de Mathématiques pour les professeurs de Français désireux de rénover leur enseignement, serait sûrement toujours bien accueilli ! Il faut cependant ajouter que cette information ne peut se faire que dans les deux sens et qu'il serait bon que les professeurs de Mathématiques s'intéressent également à la linguistique.

– Indépendamment de cette information (et même si elle est impossible à réaliser), il nous semble que le professeur de Mathématiques et celui de Français peuvent (et doivent), *au niveau de la classe,* essayer de coordonner objectifs, méthodes et activités.

Dans l'expérience suivante, les deux professeurs qui n'avaient pas été auparavant dans le même établissement, en étaient restés jusque là au stade d'une simple réflexion commune sur méthodes, objectifs et exercices semblables. Depuis un an, étant dans le même établissement, ils ont essayé de réaliser dans leur classe de 4ème une véritable coordination entre les deux disciplines.

I – Objectifs et objet d'étude

Le professeur de Français, qui participe par ailleurs à l'I.N.R.D.P., à une expérience sur l'application de la linguistique à l'enseignement du français dans le 1er cycle, a pour principal objectif d'accroître la capacité d'expression et de compréhension des élèves, dans les différentes situations de communication où ils pourront se trouver. Cette maîtrise de la langue semble passer par une connaissance claire, explicite des structures et des règles de la langue, du fonctionnement de la phrase et des transformations. La langue apparaît alors comme un objet, une réalité concrète, dans laquelle on cherche un ordre, un système ; objet démontable, système analysable dans lequel une intervention entraîne un certain nombre de conséquences prévisibles au moyen de règles de fonctionnement. Il s'agit de retrouver ces structures, de découvrir ces règles en partant du "discours", c'est-à-dire de réalisations écrites et orales, donc d'un objet familier connu.

En mathématiques, l'objectif est d'accroître la capacité de compréhension et de prise sur le réel, et en même temps de fournir aux élèves des moyens d'expression autres que ceux de la langue. Ici aussi, il s'agit d'étudier le "réel", c'est-à-dire des situations concrètes ou familières, dont on dégagera des règles, de trouver un système qui permette de les décrire et par suite de mieux les maîtriser.

II - Méthodes

1) Le matériel sur lequel on travaille en Français (mots, groupes de mots, phrases, textes) est presque toujours produit par les élèves, qu'il soit écrit ou oral (magnétophone). La motivation est ainsi plus grande car les enfants se sentent concernés de plus près. On travaille donc sur des faits *vivants* (on s'adresse aux productions des élèves, mais aussi à la presse : radio, T.V., journaux), *familiers* et *concrets.*

En mathématiques, on essaie de partir soit de situations familières proches des élèves, soit de matériels qu'ils ont construits eux-mêmes ou au moins manipulés abondamment.

2) De plus, ce matériel se présente souvent sous forme de jeux et les exercices sous forme de manipulations (phrases à découper, classer, déplacer) qui visent à la découverte des structures de la phrase et des *règles* de fonctionnement.

La manipulation joue, en classe de mathématiques, un rôle tout aussi important dans la découverte des règles. En 6ème et 5ème surtout, le jeu est non seulement activité courante mais aussi objet d'études.

3) Enfin, on travaille un peu dans le même *esprit* : dans les deux disciplines, les élèves travaillent d'une manière *active* : chacun cherche et apporte sa part à la découverte ; la *recherche* se fait dans un climat de liberté et de tolérance : les réponses ne sont pas dévalorisées : tout peut être intéressant, même les erreurs, qui sont étudiées (erreur par rapport à quoi ?) et utilisées finalement. La *discussion* règne dans la classe, permettant à chacun de donner et de défendre son point de vue. Enfin, on travaille en *équipes* de 3 ou 4 élèves (sauf pour ce qui est production de matériel et exercices de contrôle).

III – Activités et exercices

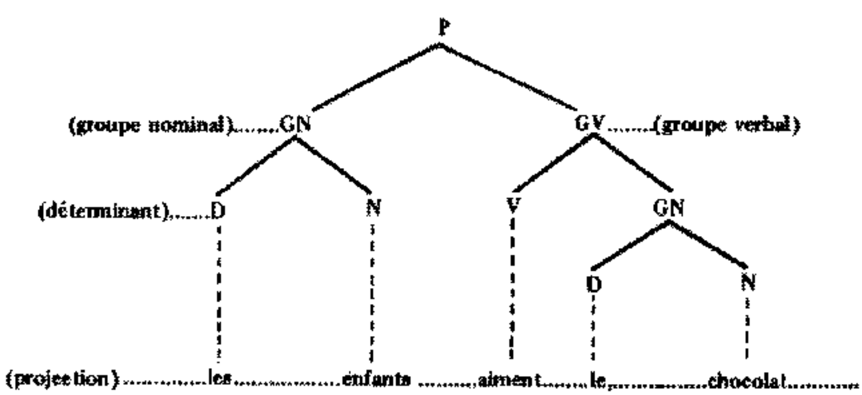
Un certain nombre d'activités ou d'exercices permettent soit d'utiliser en Français des outils et des notions dégagées en classe de Mathématiques, soit d'approfondir ou découvrir une notion en mathématique, en utilisant et complétant ce qui a été commencé en Français.

– 1) On a souvent à faire en français des exercices de *classification* : mots (déterminants), groupes de mots (éléments constituant le groupe nominal), phrases (différents types de phrases), textes (titres de journaux, articles) ; ils sont produits ou fournis par les élèves, recueillis par le professeur et redonnés aux élèves sous forme de listes, de tas de papiers... Il s'agit alors de mettre de l'ordre dans ce désordre, de classer, d'organiser, de trouver des critères, d'en choisir un et de savoir s'y tenir ; parfois de classer les objets selon deux critères. Il s'agit aussi de *présenter* le résultat de ce travail de la manière la plus claire et la plus parlante ("patates", tableau, arbre, diagramme sagittal...).

On retrouve ici les exercices que l'on pratique en mathématique lorsqu'on veut réaliser une partition ou le croisement de deux, trois ... partitions définies sur un même ensemble.

2) La découverte des structures de la phrase simple s'accompagne de la construction de *schémas arborescents* rendant le mieux compte des structures fondamentales de la phrase, des notions de syntagme (groupe de mots), de subordination, de récursivité de la langue ; de la notion de catégorie et de celle de fonction (la fonction est donnée par la place dans l'arbre et par les niveaux de l'arbre).

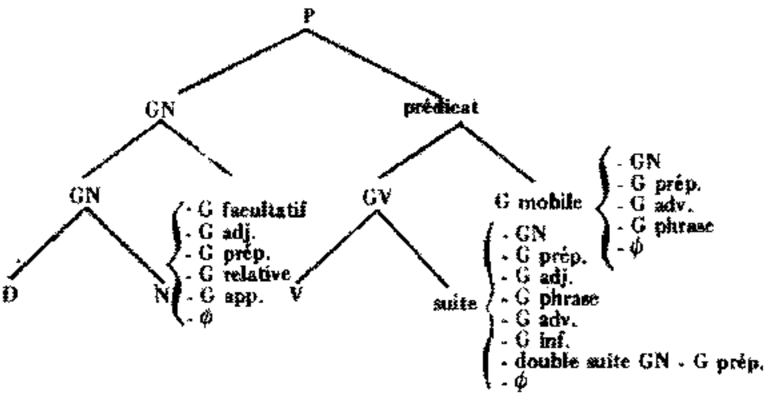
Exemple : P (= phrase) = les enfants aiment le chocolat.



Ces arbres permettent de distinguer deux choses dans la phrase : ce qui est *modèle*, capable de générer une infinité d'autres phrases (l'arbre), et ce qui est *réalisation linéaire* (projections), c'est-à-dire la phrase, l'énoncé.

On part de l'*énoncé*, et c'est par rapport à lui (P) qu'on analyse, jusqu'à arriver à la catégorie (D, N, V...) alors que la grammaire traditionnelle privilégie *le mot* et part de lui en lui attribuant une nature et une fonction.

Un arbre, rendant compte de la phrase du "type sujet-verbe" et de toutes ses constructions possibles, serait le suivant :



Bien sûr, aussi bien sur le plan de la théorie linguistique que sur le plan de l'application pédagogique, ces arbres sont critiquables à plusieurs titres. Nous en sommes conscients et essayons sans cesse de résoudre les problèmes qui se posent. Il n'en reste pas moins qu'ils permettent de *visualiser* les choses ; de *construire* et de décrire en même temps (ils sont à la fois *outil de recherche* et moyen de communiquer ses découvertes) ; de développer aussi bien l'esprit d'analyse que l'esprit de synthèse ; de donner une certaine prise sur les énoncés (ils permettent par exemple de lever les ambiguïtés puisqu'il peut y avoir 2 arbres différents pour les 2 sens d'une même phrase).

On utilise souvent en mathématique l'arbre en tant qu'outil de découverte et de description, par exemple pour les produits d'ensembles, les dénombrements, les croisements de partitions, etc... Mais le plus voisin de l'arbre de phrase est celui qui permet de décrire un calcul algébrique.

— 3) En même temps qu'ils construisent des "arbres", les élèves découvrent des *règles de réécriture* de la phrase.

Exemple : P ⟶ GN - GV (phrase se réécrit groupe nominal, groupe verbal)

Autre exemple : GN ⟶ D - N - G prép (groupe nominal se réécrit : déterminant, nom, groupe prépositionnel).

Ont souvent été pratiqués des exercices de ce genre :

– soit mettre en *formules* (du type ci-dessus) des phrases données (ou des groupes)

– soit plus souvent écrire des formules et *chercher des exemples répondant à ces formules* ou encore écrire des arbres et imaginer des projections de ces arbres.

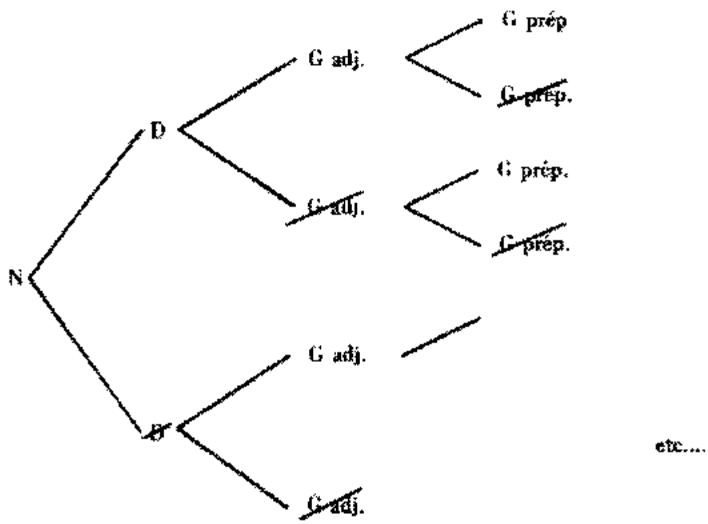
Ces exercices sont très proches des exercices de codage et décodage que l'on rencontre en mathématique quand on formalise une situation.

– 4) A propos du Groupe Nominal, un premier travail a consisté à trouver *une formule contenant en puissance toutes les formules de G.N. possibles.* Pour cela, des exercices de substitutions et d'expansion permettaient de rendre compte des différents éléments pouvant entrer dans la composition du G.N.

Le seul obligatoire étant le nom : N, et tous les autres (D, G prep, G relative, G adj., G app.) étant facultatifs, nous pouvions arriver à la formule suivante (les parenthèses indiquant le caractère facultatif des constituants).

GN ⟶ (D) *N* (G adj.) (G prep.) (G rel.) (G app.)

Après quoi, pour "développer" cette formule, certains élèves ont procédé par tâtonnements, d'autres ont pensé à l'arbre d'investigation, dichotomique :



Ce qui nous permettait d'écrire 32 formules différentes ; après quoi il nous restait, en français, à nous demander lesquelles étaient réalisables dans *la langue* et lesquelles étaient "difficiles", et pourquoi.

On retrouve ici le problème du dénombrement des parties d'un ensemble (à 5 éléments). Le travail commencé en Français a été repris en mathématique de la manière qui suit :

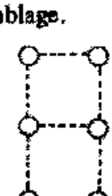
Avant cette recherche, les élèves ont résolu les exercices suivants :

1/ On se donne un alphabet de 4 lettres (5 lettres, 6 lettres), a, b, c, d, et on veut écrire tous les assemblages respectant les deux règles suivantes :

– une lettre ne peut pas être placée après une autre lettre qui la suit dans l'ordre alphabétique.

– chaque lettre doit apparaître au plus une fois dans un assemblage.

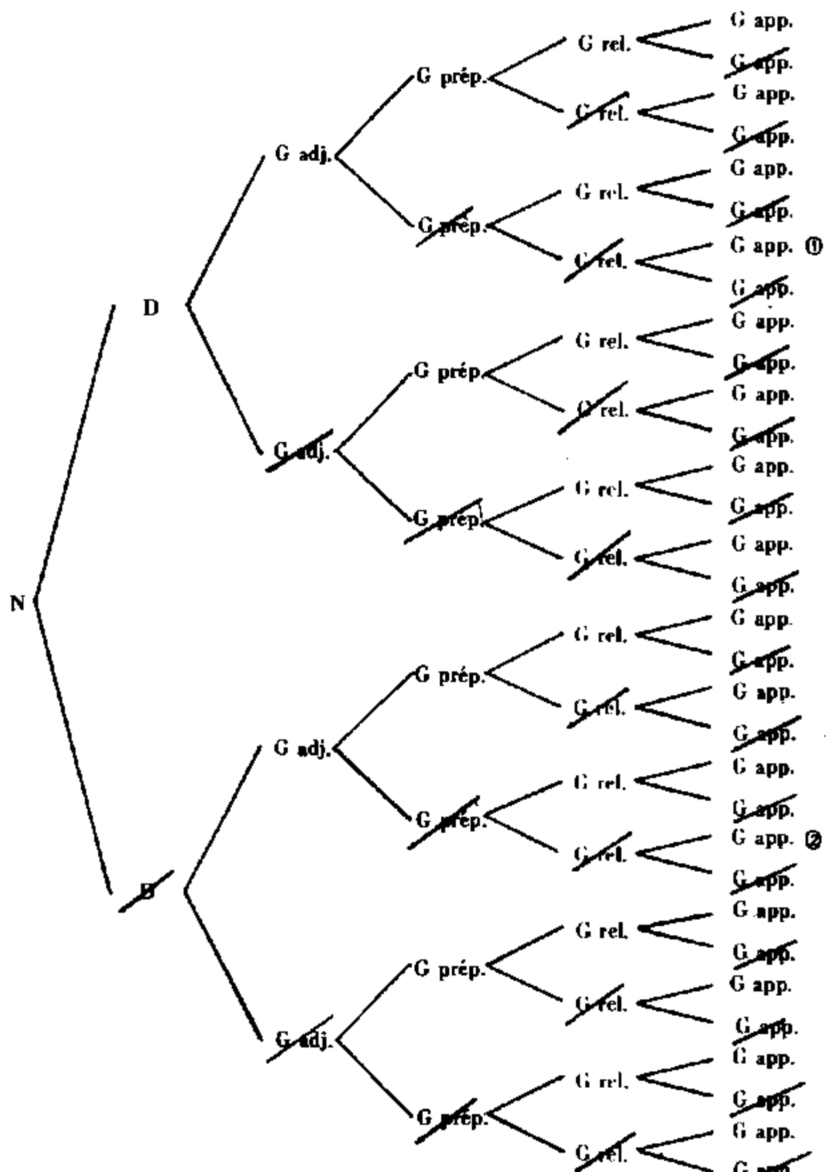
2/ Une lettre ou un signe en braille est constitué par des trous placés sur certains des 6 emplacements disposés sur un rectangle comme ci-contre :



Combien de signes distincts peut-on réaliser ?

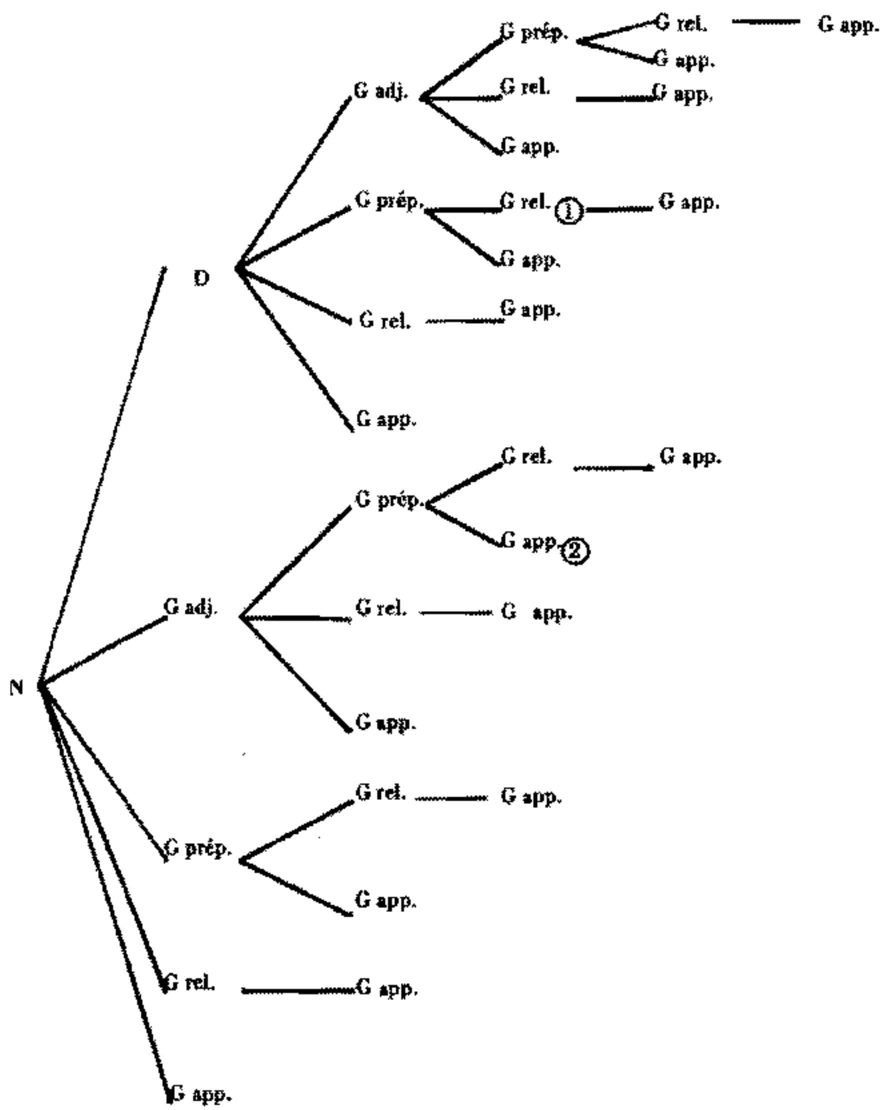
Tous ces exercices peuvent se résoudre par des arbres de 2 types. Reprenons les 5 éléments facultatifs du GN. : P, G.adj., G. prép., G. rel., G. app.

1er arbre, celui proposé d'abord par certains élèves :



Ainsi l'extrémité (1) correspond à : N, D, G.prép., G.rel. et l'extrémité (2) correspond à : N, G. adj., G. prép., G. app.

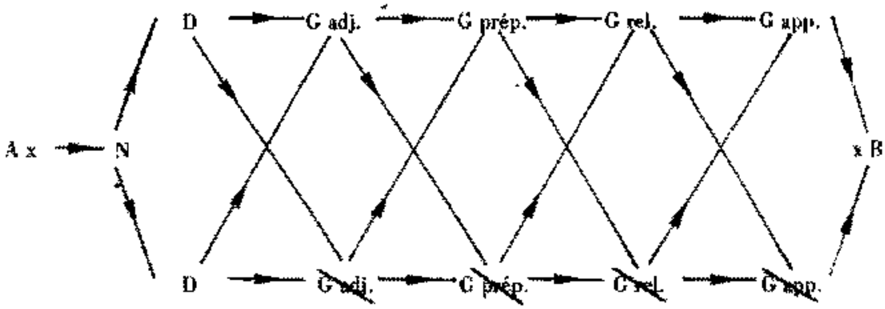
2ème arbre : On décide de citer les éléments du GN toujours dans le même ordre : D, G.adj.,G.prép., G.rel., G.app, par exemple :



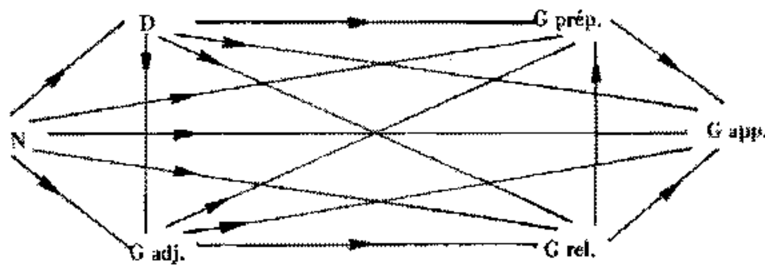
Tout chemin allant du départ N à un noeud quelconque de cet arbre représente une formule possible. On retrouve (1) et (2) cités plus haut.

A côté de ces deux arbres les élèves ont proposé deux autres présentations qui pourraient permettre d'établir la liste complète des formules.

1ère présentation : Dans ce schéma, toute formule est un chemin allant de A à B :



2ème présentation : Dans ce schéma, toute formule est un chemin partant de N et aboutissant à l'un quelconque des sommets :



Toutes ces présentations ont un inconvénient : elles donnent les constitutions possibles du G.N. sans tenir compte des contraintes internes. Y-a-t-il un ordre obligatoire pour les constituants ?

– 5) Un autre exercice pouvant donner lieu à une interprétation mathématique est le suivant : travaillant sur un thème (ex : la discussion, la joie) les élèves essayent de faire l'inventaire, à l'aide du dictionnaire, de tous les mots relatifs à ce thème. Pour cela, ils partent d'un terme, qui les renvoie à un certain nombre d'autres termes, chacun de ces termes les renvoyant encore à d'autres, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on n'en trouve plus de nouveaux. Après quoi on essaye d'établir les contraintes d'ordre sémantique et grammatical qui existent pour certains des mots trouvés (verbes et noms).

Cet exercice donne un exemple de recherche de la fermeture transitive d'une relation.

– 6) Enfin, à propos de l'étude de textes, on peut se livrer, en français, à des exercices de ce genre : les élèves établissent le pourcentage d'apparition d'une catégorie de mots (ex : les adjectifs) par rapport au nombre total de mots ; on fait ce travail sur plusieurs textes de 100 mots, aussi variés que possible ; on établit une espèce de moyenne qui permet de comparer ensuite d'autres textes, et de tirer des conclusions d'ordre plus "littéraire". On peut également, dans le même ordre d'idées, comparer l'abondance relative des noms et des verbes dans un même passage, ou encore celle des verbes d'action et des verbes d'état,etc..., ces comparaisons s'appuyant sur des moyennes auparavant établies.

Ce genre d'exercices fournit dès la 6ème ou la 5ème, une motivation à l'introduction de notions élémentaires de statistiques.

Ces essais de coordination nous apparaissent dans l'ensemble insuffisants : ils portent sur certains points seulement (mais peut-il en être autrement si l'on veut respecter la personnalité de son enseignement ?) et ils ne proposent que des moyens de *description* (sans doute, si les élèves étaient plus avancés dans cette étude de la langue, pourrait-on utiliser des notions plus *opératoires ?)*.

Nous pensons reprendre nos essais l'année prochaine, avec une classe de 6ème, d'une manière un peu plus systématique et régulière.

10 - Problèmes posés par les liens possibles entre les enseignants de la grammaire et des mathématiques dans le premier cycle du second degré

par J. ROUAULT

Ce texte reflète les travaux d'une équipe d'enseignants de l'Académie de Grenoble. Il a été préparé et rédigé par :

Mmes S. GASQUET (Lycée Champollion de Grenoble)
J. VEYRUNES (Lycée Mounier de Grenoble)
(Professeurs de mathématiques)

MM. J. ROUAULT Maître assistant à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
G. VEILLON Maître de Conférences à l'Institut National Polytechnique de Grenoble.

Introduction

Depuis près d'un an fonctionne à Grenoble une équipe de recherche pédagogique qui s'est fixé comme but de repenser l'enseignement de la grammaire et d'examiner comment cet enseignement peut se relier à celui des mathématiques. La révision d'un tel enseignement, qui est sans doute l'un des besoins les plus pressants du Second Degré, est due pour une bonne part à la méconnaissance des théories linguistiques actuelles. Nous avons voulu essayer de montrer qu'une utilisation simple de certaines de ces théories pouvait conduire l'élève à prendre conscience du *fonctionnement* de la phrase française et qu'une démarche claire et prudente pouvait conduire à un degré d'abstraction raisonnable. La méthode que nous essayons d'élaborer doit, à partir de manipulations intuitives, faire accéder l'élève à certains concepts linguistiques (ici la notion de structure).

A partir de là on peut considérer que la grammaire devient une véritable science du raisonnement, comme les mathématiques, et chercher à voir les échanges qui peuvent avoir lieu entre les deux disciplines-clés du raisonnement que sont la linguistique et les mathématiques. Il convient ici de bien savoir que ces échanges peuvent avoir lieu dans les deux sens : les mathématiques peuvent aider, en fournissant un support formel, à la compréhension des concepts linguistiques. Mais ces derniers peuvent motiver certains concepts mathématiques, les illustrer et les faire manipuler dans une autre réalité. Une telle démarche n'est pas à priori facile à mettre en oeuvre mais il nous semble que l'on pourra parler d'échec de l'enseignement des mathématiques tant que celui-ci ne consentira pas à sortir de cette démarche hautaine qui consiste à en faire LA Science. A notre sens les problèmes actuels de l'enseignement mathématique ne se résoudront pas par la mise en oeuvre de programmes toujours renouvelés et la plupart du temps toujours plus ambitieux et abstraits, mais par l'humble souci de rattacher les mathématiques à la réalité (c'est-à-dire aux sciences moins "pures").

Le présent travail se situe dans cette voie, il est une tentative pour présenter la grammaire de telle sorte qu'elle puisse être assimilée par l'élève et qu'elle puisse se rattacher à l'enseignement mathématique. Ce travail se présente surtout comme un exposé d'idées que nous avons mises au point sur l'enseignement de la grammaire (et qui seront expérimentées dès la rentrée) et de problèmes que pose la présentation mathématique de concepts linguistiques. Nous n'avons pas à l'heure actuelle de doctrine claire sur les liens entre mathématiques et grammaire : ce n'est pas par manque d'intérêt mais de temps, la recherche pédagogique ne disposant pas, comme chacun sait, de moyens exorbitants.

L'équipe qui a élaboré le projet a été réunie à l'initiative de J. PLAZY, Professeur agrégé de grammaire au centre de formation des P.E.G.C. de Grenoble. Elle comprend des professeurs de lettres et de mathématiques de l'Académie de Grenoble ; elle a bénéficié jusqu'à maintenant de l'appui de chercheurs en linguistique, mathématique et Informatique du Centre d'Etudes pour la Traduction Automatique de Grenoble. Reconnue par l'I.P.N. elle sera liée l'année prochaine à l'Université des Sciences Sociales de Grenoble.

I - Ligne directrice

1- Principes

a) Abandonner le caractère normatif de la grammaire ("ce qu'il faut dire") au profit des "registres de langues".

b) Déconditionner les élèves de la grammaire traditionnelle dont une partie importante est consacrée à (mal) nommer des fonctions. Nous voulons privilégier le fonctionnement par rapport à la théorie et à la nomenclature.

c) Introduire les concepts élémentaires de linguistique à travers l'étude de la phrase française.

d) On peut alors passer à la logique du raisonnement et aux outils mathématiques associés aux concepts linguistiques introduits.

e) Les applications d'un tel enseignement de la grammaire se trouvent alors :

- en mathématiques (échange en sens inverse du précédent)
- dans l'apprentissage des langues étrangères.

2- *Les concepts introduits au II* s'insèrent dans les classes de 6ème et 5ème, une programmation plus stricte ne pouvant se faire qu'après expérimentation dans les classes. La méthode repose sur une démarche inductive qui, partant de manipulations intuitives sur la langue, aboutit au concept de structure. Nous donnerons au II un bref aperçu de la démarche ainsi que différents exemples de ce que nous entendons par structure ; nous préciserons ensuite la nature formelle des structures utilisées ici (qui se rapprochent des structures de dépendance de Tesnière) ainsi que des structures de constituants qui se fondent, elles, sur les grammaires génératives. Nous examinerons enfin les problèmes pédagogiques soulevés. Signalons que les concepts présentés ici ne permettent pas de prendre en charge tous les phénomènes grammaticaux du français ; ils nous semblent illustrer de façon suffisamment claire le fonctionnement de la phrase pour que leur intérêt ne puisse être mis en cause. Cependant il faudra compléter ces notions avec d'autres outils permettant (en 4ème et 3ème) de traiter le fonctionnement du verbe, son actualisation ainsi que celle du nom.

II - Aperçus sur le point de vue grammatical

Nous proposons de commencer par des manipulations intuitives —appelées "jeux"— sur la langue ; une période de trois mois au moins, au début de la 6ème, leur serait uniquement consacrée. L'introduction de concepts théoriques peut se faire dès que cela est possible ; à partir de ce moment peuvent coexister longtemps les jeux et les "leçons" de grammaire.

—1— Les jeux

Deux types peuvent coexister : ceux qui servent à introduire les concepts théoriques et ceux qui sont liés à la créativité.

a) Les jeux introductifs de concepts théoriques sont :

(1) Les commutations (analyse distributionnelle) : partant d'une phrase donnée chercher ce que l'on peut substituer aux mots ou groupes de mots. Ceci aboutit à la définition de classes d'équivalence de mots et à la mise en évidence des principales fonctions syntaxiques.

Exemple :

l'	enfant	aborde	un	problème	délicat
*	Pierre	mange	de la	viande	saignante
cet	homme	achète	les	livres	qu'on lui propose
Ma	femme	lave	le	linge	des enfants

(2) Les permutations : elles consistent à changer la place de groupes de mots dans la phrase pour insister sur la fonction syntaxique, qui est à priori indépendante de la place. On pourra à ce propos faire sentir l'influence des permutations sur le style et examiner les cas où les permutations sont impossibles.

Exemple : permutations possibles sur
"les soldats / percèrent / une brèche / dans la grande muraille"

(3) les accrochages : l'élève étant entraîné à isoler les groupes de mots on s'efforcera de les relier entre eux par des flèches qui représentent des relations dont on montrera la permanence sur de nombreux exemples. On mettra également en évidence le rôle de pivot joué par le verbe. Exemple :

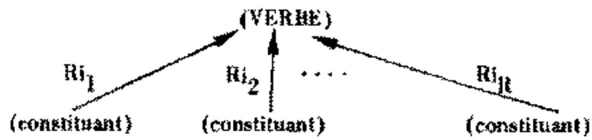
b) Parallèlement aux jeux du a) on peut imaginer un ensemble de manipulations liées à la créativité et conduisant à une réflexion sur le langage poétique et sa compréhension.

- *2 - Les structures*

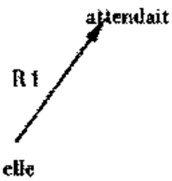
a) On suppose acquises certaines catégories fondamentales telles que verbe, nom, adjectif, adverbe. Ce principe se fonde sur la constatation qu'il s'agit ici de préciser le fonctionnement de la langue maternelle de l'élève et sur le fait que définir proprement ces termes nécessite un degré d'abstraction exclu ici. Il nous suffit d'ailleurs que l'élève puisse, par un certain nombre de critères facilement imaginables, classer un mot dans une catégorie : nous pouvons alors examiner le fonctionnement de ce mot.

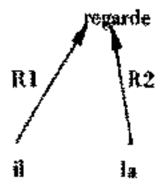
b) le groupe verbal peut être étudié du point de vue théorique dès que l'on a mis en évidence le rôle de pivot joué par le verbe et que l'on a pratiqué suffisamment le jeu des accrochages. Le système des pronoms du français nous permet de séparer les compléments "régis" des "circonstanciels" et de classer les régis. Par une démarche assez longue, mais simple (et qui a l'avantage de se fonder uniquement sur *la forme*) on aboutit aux concepts suivants : les mots ou groupes de mots liés au verbe seront des *constituants* ; on précisera le rôle joué par un constituant en nommant la relation qui le relie au verbe. Ces relations seront notées R_i (i = 1,2,3,4,5) ou CIRC(p), p indiquant la préposition du "circonstant".

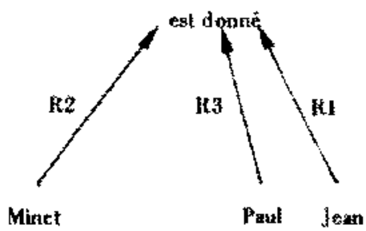
Si la relation CIRC n'intervient pas nous aurons une structure du type



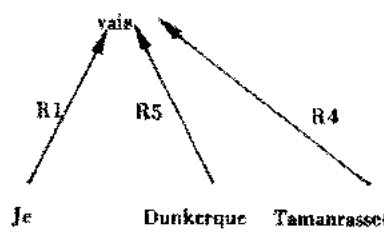
Exemples :







(minet est donné à Paul par Jean)

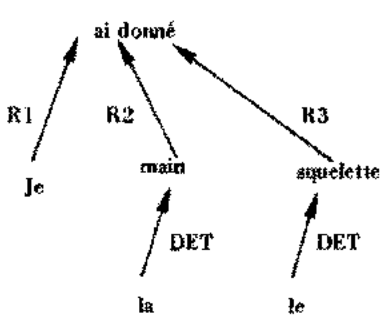


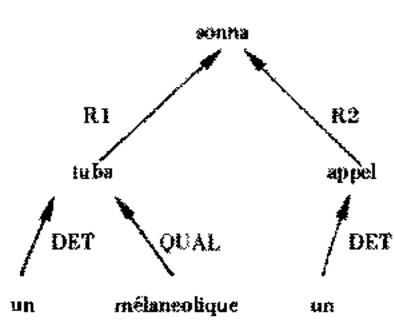
(je vais de Dunkerque à Tamanrasset)

c) le groupe nominal est une structure dont le pivot est un nom ; il peut être, en tant que constituant, relié au verbe par une relation Ri ou par CIRC.

Les constituants d'un groupe nominal sont reliés au nom par l'une des relations DET (articles...) QUAL (adjectif,...)

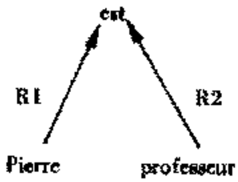
Exemples de groupes nominaux qui sont constituants d'un groupe verbal :



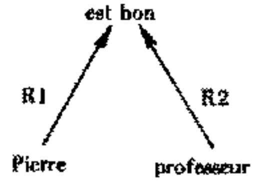


d) La phrase attributive

(1) "Pierre est professeur"



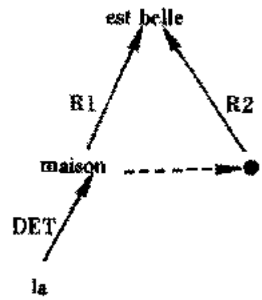
(2) "Pierre est un bon professeur"



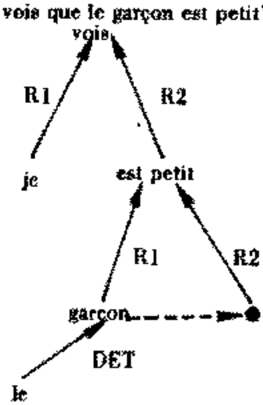
(Pierre est bon, en tant que professeur)

(3) "la maison est belle"

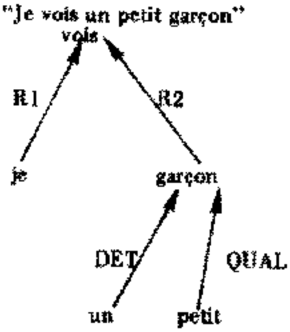
(la maison est belle,
en tant que maison)



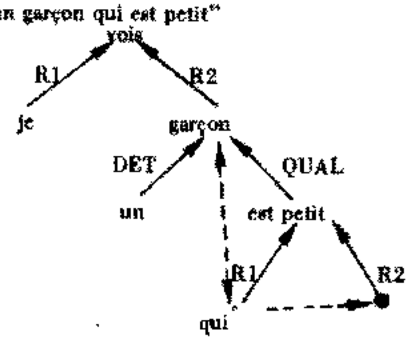
(4) "Je vois que le garçon est petit"



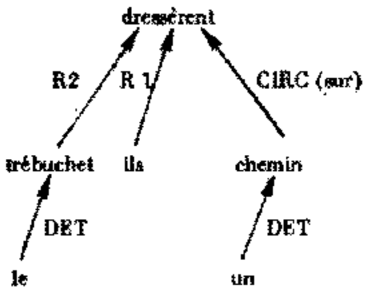
(5) "Je vois un petit garçon"

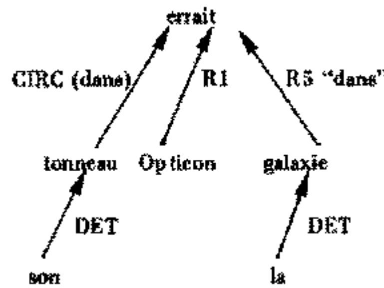


(6) "je vois un garçon qui est petit"

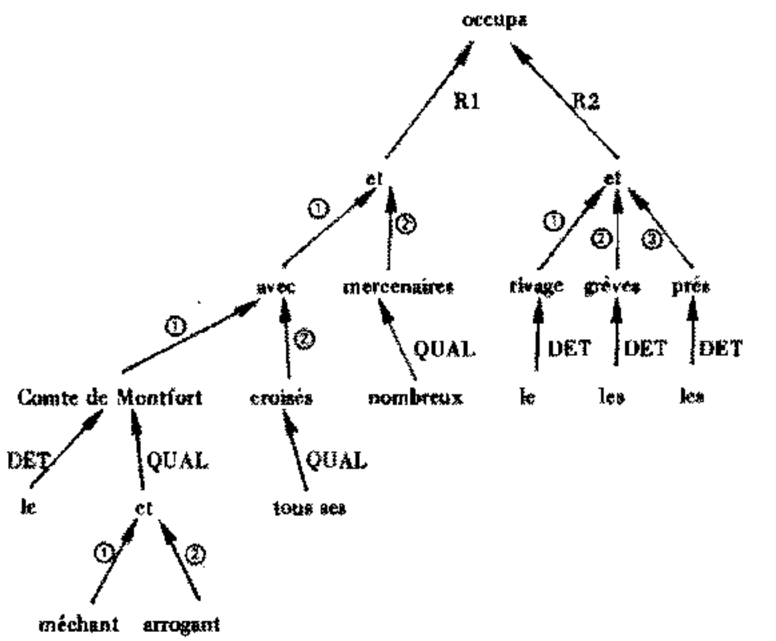


e) Le groupe verbal avec circonstants





f) La coordination



"Le Comte de Montfort, méchant et arrogant, avec tous ses croisés, et nombreux mercenaires, occupa le rivage, les grèves et les prés.

g) Remarque essentielle : Le groupe verbal peut comme le groupe nominal être lui-même un constituant.

III - Les modèles mathématiques utilisés

Nous faisons appel ici à deux modèles mathématiques classiques en linguistique pour la description syntaxique. Rappelons cependant que ces modèles ont un rôle descriptif, et doivent nous permettre d'expliquer le fonctionnement de la langue, notamment de la syntaxe. Nous ne donnerons pas une étude mathématique complète, mais simplement un tour d'horizon des théories auxquelles nous nous référons (pour plus d'information, voir par exemple "Notion sur les grammaires formelles" M. Gross et A. Lentin.)

III - 1 - *Notion de langage et de grammaire :*

Un mot est une suite de symboles $S_1\ S_2\ \ldots Sn$, sur un vocabulaire V, tel que $S_i \in V$. L'opération de construction est la concaténation. Soit un mot m et un mot m', le mot m"= mm' est construit par concaténation. Nous donnerons la définition suivante du mot :

1° tout symbole de V est un mot

2° si m et m' sont des mots, mm' est un mot.

L'opération de concaténation est non commutative, mais associative. On notera V^* (monoïde libre) l'ensemble de tous les mots construits sur le vocabulaire V. On appellera langage formel L toute partie de V^*.

III - 2 - *Grammaire hors-contexte (1) :*

On appellera grammaire hors-contexte le quadruplet (V, V_N, S, R) dans lequel V= vocabulaire (dit vocabulaire terminal), V_N vocabulaire auxiliaire (non terminal), $S \in V_N$ élément distingué ou axiome, et R une partie de $V_N \times (V \cup V_N)^*$. .

R est l'ensemble des règles. Une règle est notée

$A \rightarrow \varphi$, $A \in V_N$, $\varphi \in (V \cup V_N)$ mot sur $V \cup V_N$

III - 3 - *Langage accepté par une grammaire G :*

A une grammaire G, on associe un langage formel L_G de la façon suivante :

Soient deux mots μ et ν de $(V \cup V_N)^*$ et une grammaire G. Nous noterons $\mu \underset{G}{\Rightarrow} \nu$ la relation de dérivation ainsi définie :

$\mu \underset{G}{\Rightarrow} \nu$ si $\mu = X_1\ A\ X_2$, $\nu = X_1\ \varphi\ X_2$, et si $(A \rightarrow \varphi) \in R$.

Nous noterons $\mu \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \nu$ la fermeture de la relation de dérivation. Le langage associé à G, $L_G = \{ \varphi \mid S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \varphi \} \cap V^*$

Exemple pratique :

$V_N = \{N, V, GN, GV, AR, S\}$ $\quad$ $V = \{\text{chien, chat, mord, le}\}$

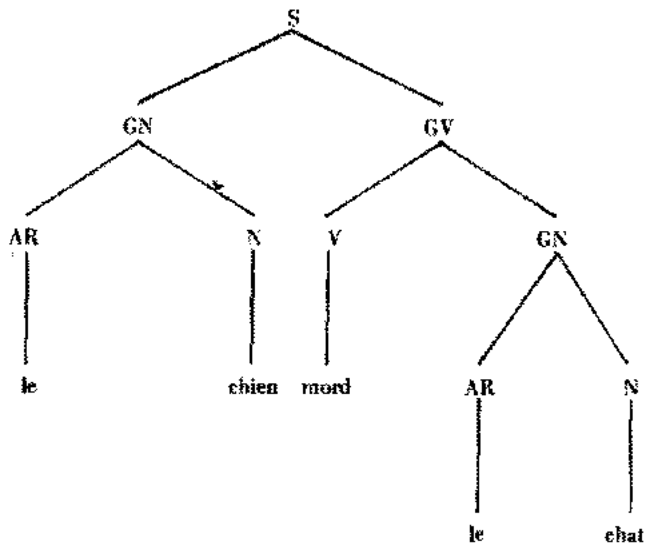
et R

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & GN\ GV \\ GV & \rightarrow & V\ GN \\ GN & \rightarrow & AR\ N \end{array}$$

(1) Nous nous limitons ici à l'introduction de ce type de grammaires, et non à la présentation générale des "grammaires génératives".

N $\rightarrow$ chien
N $\rightarrow$ chat
AR $\rightarrow$ le
V $\rightarrow$ mord

Soit S $\Rightarrow$ GN GV $\Rightarrow$ GN V GN $\Rightarrow$ AR N V GN $\Rightarrow$ ARN V AR N $\Rightarrow$ "le chien mord le chat" que l'on représente par le graphe de "dérivation"



Un tel graphe est appelé *structure de constituants*

III - 4 - *Rôle de la théorie :*

Les grammaires hors-contexte nous permettent de décrire effectivement des langages, et peuvent être utilisées ainsi de façon normative pour indiquer les constructions autorisées. Remarquons cependant qu'elles ne nous intéressent que lorsque la dérivation et les symboles du vocabulaire non terminal sont interprétables : ceci signifie que le graphe associé à la dérivation a une valeur explicative sur le fonctionnement de la langue. Le rôle de la théorie des langages se limite à cela, car elle ne peut rendre compte de tous les phénomènes et ne permet donc pas de décrire rigoureusement une langue naturelle. C'est pourquoi le langage formel n'est qu'un modèle très imparfait, purement formel (donc descriptif de la forme et non du contenu).

III - 5 - *Etude de la relation de dérivation :*

En pratique, notre étude ici portera plus sur le graphe de dérivation que sur les grammaires formelles. Celles-ci ne sont présentées que comme justification mathématique de cette écriture. Au niveau de l'enseignement, nous pourrons nous limiter à la description des graphes (ou structures syntaxiques). Nous interpréterons cette structure comme une relation définie sur l'ensemble O des occurrences de mots de la phrase, une occurrence étant un mot dans une position donnée, que nous pourrions définir par un couple (mot, rang dans la phrase) :

0 = { (le, 1), (chien, 2) , (mord, 3) , (le, 4) , (chat, 5) }

Chaque occurrence non terminale dénote alors une partie de 0 : la partie { le, chien } dénotée par GN, la partie { mord, le, chat } par GV, { le } par AR.

La relation est alors simplement une relation *d'inclusion*, ce qui est illustré par l'écriture parenthésée :

((le) (chien)) ((mord) ((le) (chat))))

Chaque partie est dénotée par un symbole non terminal, et l'on peut définir une injection "dénotation" de P (0) dans une partie de V_N.

Il existe une relation d'équivalence entre les parties dénotées par le même symbole : { le, chien } $\Leftrightarrow$ { le, chat } (groupe nominal)

III - 6 - *Propriétés de la structure :*

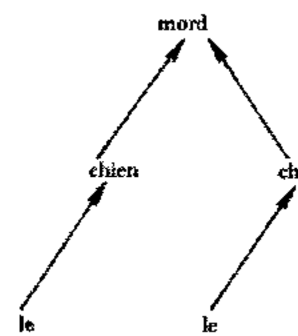
Revenons à la phrase elle-même, interprétée comme un ensemble muni de la relation : "suivre immédiatement" : Le $\rightarrow$ chien $\rightarrow$ mord $\rightarrow$ le $\rightarrow$ chat.

La famille de parties décrite par une structure syntaxique est telle que toute partie est connexe, selon la relation σ.
Ainsi la partie { le, mord } ne peut exister. Ceci se traduit par le fait que l'on peut décrire la structure par un parenthésage de la phrase. Nous dirons que la structure de constituants est continue.

III - 7 - *Structure de dépendance :*

Une autre famille de modèles fait appel à des structures d'un type différent (structures de "dépendances"). La structure est une relation binaire sur l'ensemble des occurrences. Chaque élément est en relation avec un autre élément au plus. Le graphe représentatif est encore une arborescence. Un seul sommet n'est en relation avec aucun autre (racine).

Exemple :



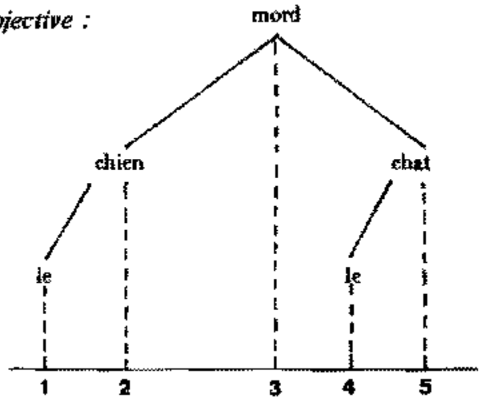
"mord" est racine de l'arborescence

On associe à chaque relation une étiquette qui la caractérise (sujet, objet... par exemple). Ici nous remplaçons les notations traditionnelles de sujet et d'objet par des numéros de relation (R1, R2, ...etc).

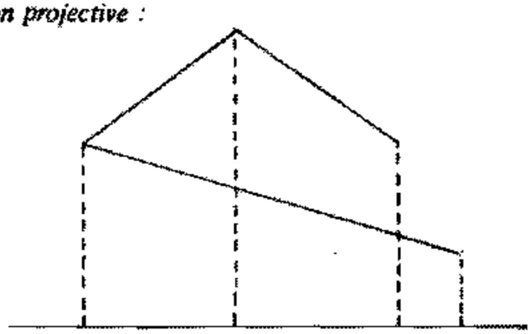
Cette structure est différente de la structure de constituants par sa nature. En fait, elle a un objectif moins formel que la structure de constituants, et cherche à décrire les "fonctions" (au sens linguistique) des mots. Comme dans le cas des structures de constituants, il existe une restriction fondamentale, liée à l'ordre séquentiel des mots.

Cette restriction s'exprime par la propriété de "projectivité" : si l'on décrit la chaîne sur un axe, les sommets de la structure de dépendance doivent pouvoir se projeter sur cet axe :

Structure projective :



Structure non projective :

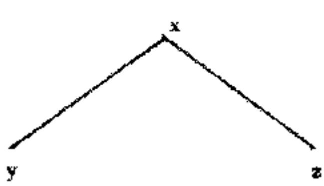


III - 8 - *Passage d'une structure à l'autre :*

Les deux types de description ne sont pas incompatibles, et nous serons amenés à présenter les deux aspects en effectuant la liaison suivante :

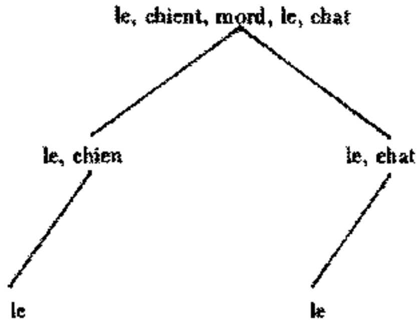
Tout sommet x d'un graphe arborescent est racine d'un sous-graphe arborescent, l'ensemble des sommets de ce sous-graphe est noté S_x.

Exemple :

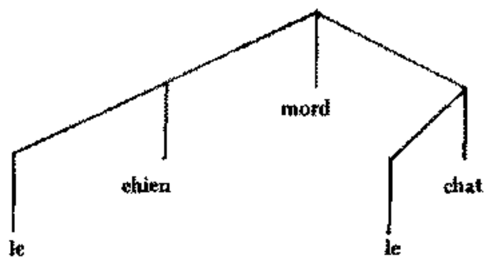


$S_x = \{x, y, z\}$

A toute arborescence (ensemble X de sommets), nous associerons une arborescence isomorphe, dont chaque sommet est une partie de l'ensemble X, de la façon suivante : à tout sommet $x \in X$ correspond S_X. La relation associée est la relation d'inclusion :



On en déduit facilement une structure de constituants, chaque sommet étant un sommet non-terminal.



On peut d'ailleurs vérifier que la condition de projectivité est équivalente à la condition de continuité. Ces deux aspects complémentaires peuvent être présentés directement en classe de Français, en mettant en évidence les classes de mots (verbe, nom...), et les fonctions syntaxiques (sujet, objet...).

III - 9 - *Etude des grammaires hors contexte :*

L'étude des grammaires hors contexte peut être poursuivie. Elles permettent de mettre en évidence les propriétés de "récursivité", et de décrire des phrases de longueur infinie. Cette propriété est mise en évidence par l'apparition du même symbole non terminal dans une dérivation.

Soit :

$$\begin{cases} S \rightarrow a\ S\ a \\ S \rightarrow r \end{cases} \qquad \text{qui construit le langage } a^n\ r\ a^n$$

Soit encore :

$$\begin{cases} S \rightarrow a\ A \\ A \rightarrow S\ a \\ S \rightarrow r \end{cases} \qquad \text{qui construit le langage } a^n\ r\ a^n$$

La récursivité peut apparaître d'un seul côté (droite ou gauche), comme dans :

$S \rightarrow S\ a$ qui construit le langage $r\ a^n$

$S \rightarrow r$

ou sous forme imbriquée (voir $a^n r\ a^n$).

L'on peut mettre en évidence de tels phénomènes en Français avec les relatives :

d'un seul côté : "l'homme qui a vu l'homme qui a vu l'homme ... etc"

imbriquées : "Le jardin (où le chou pousse) est bien clôturé"

"Le jardin (où le chou (que la chèvre mange) pousse) est bien clôturé"

"Le jardin (où le chou (que la chèvre (que le loup convoite) mange) pousse) est bien clôturé".

IV - Quelques problèmes posés par la coordination des enseignements

IV - 1 - *Relations d'équivalence et classes d'équivalence :*

Les classes d'équivalence apparaissent rapidement à plusieurs niveaux : d'une part, dans l'étude traditionnelle des différentes formes d'une unité. La conjugaison du verbe "être" nous définit une classe de mots que l'on représente par l'infinitif "être".

L'analyse distributionnelle met en évidence des mots ou groupes de mots interchangeables. On fait apparaître ainsi des classes d'équivalence.

Il semble de toutes façons que cette notion doive être traitée en plusieurs étapes :

1°- Montrer l'existence d'une relation d'équivalence, définie par "être substituable à" dans l'analyse distributionnelle.

2°- Faire apparaître la notion de classe d'équivalence, en manipulant les mots, et en montrant que l'on peut choisir un *représentant* de la classe.

3°- Nommer la classe, en introduisant la notion de vocabulaire "non terminal", sans faire forcément apparaître la grammaire générative.

Cependant, il semble que la manipulation de ces grammaires ne soit pas hors de portée, et que les élèves puissent y être initiés. De tels exercices sont très enrichissants du point de vue logique (récursivité), mais ne peuvent en aucun cas faire l'objet de développements mathématiques.

IV - 2 - *Etudes des structures :*

Les structures de dépendance peuvent être introduites directement comme primitives. L'étude mathématique est compliquée par l'apparition de noms de relation (R1, R2 ...). Une possibilité consiste à considérer qu'il y a non pas une seule relation mais autant de relations qu'il y a de noms. Il nous semble préférable de s'en tenir à une seule relation (relation de "dépendances").

La structure de constituants peut facilement s'expliquer comme relation d'inclusion de parties d'un ensemble.

Le passage de l'une à l'autre implique la manipulation d'ensembles structurés, objets difficiles à introduire. Nous éviterons d'en parler, tout au moins en 6ème et en 5ème.

IV - 3 - *Autres exemples :*

Etude de relations particulières :

Certaines propriétés des relations sont facilement analysées au niveau de la langue. Citons par exemple les classifications de formes pronominales, avec les pronoms réfléchis et réciproques :

"Je me lave", "Je te lave", "Nous nous lavons", "Nous nous lavons les uns les autres".

IV - 4 - *Etude de la logique :*

Nous ne ferons qu'évoquer cette interprétation, aussi riche que dangereuse. Elle concerne les articles, mais surtout les conjonctions de coordination (et, ou, ni ...) et la négation.

Nous avons laissé l'aspect logique de la langue, qui nous paraît prématuré en 6ème et en 5ème, et que l'on pourra surtout introduire en 4ème.

11 - Possibilités de coordination entre l'enseignement de la technologie et celui des mathématiques en 4e et 3e

Difficultés à vaincre, moyens d'action

par G.-H. CLOPEAU

I - Qu'est-ce que la technologie ?

Le programme de 4ème nous donne un aperçu de ce qu'on entend par technologie :

- mécanismes donnant des mouvements de translation
- initiation au dessin industriel
- mesures de dimensions
- mécanismes donnant des mouvements de précision
- introduction de la notion de force
- la balance.

II - Relation mathématiques-technologie

– La technologie offre un champ d'application aux mathématiques élaborées.

– D'autre part, elle fournit des situations mathématisables.

A - Pour illustrer le lien existant entre la technologie et les mathématiques, on peut prendre l'exemple de l'algèbre de Boole appliquée aux circuits électriques :

1°) A l'aide de circuits électriques, on découvre de nouvelles relations.

2°) On construit des circuits électriques à partir de relations.

N.B. La coordination entre technologie et mathématiques n'est pas toujours aussi simple, et présente, en particulier au niveau du langage, certains problèmes. Les mêmes mots sont employés, mais avec des sens différents (mais est-ce si grave ?). Ainsi, par exemple, le mot *fonction*.

A première vue, on peut étendre la notion de fonction mathématique à celle de fonction technologique.

éléments d'un ensemble de départ $\xrightarrow{\text{fonction mathématique}}$ éléments d'un ensemble d'arrivée

ensemble de départ $\xrightarrow[\text{machine}]{\text{fonction technologique}}$ ensemble d'arrivée

Cette extension n'est pas toujours très rigoureuse, ni même toujours possible.

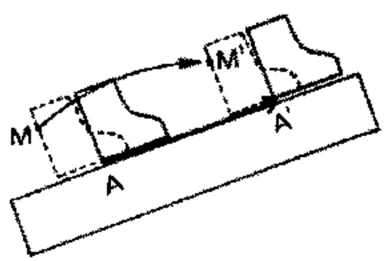
On préfère parler de *fonction technique.*

B - Un exemple de l'aide que la technologie peut apporter au processus de mathématisation a ensuite été étudié :

. En technologie, les mouvements de *translation* sont une étude de trajectoires. On distingue les mouvements de translations rectilignes ou circulaires.

. En mathématiques, la translation est une bijection du plan sur lui-même. Voyons si ces deux conceptions sont compatibles.
Prenons le cas du *pied à coulisse,* exemple d'un guidage en translation rectiligne.

Une observation superficielle laisserait croire qu'il s'agit réellement d'un mouvement de translation rectiligne. En fait on constate que ce mouvement n'est qu'approximatif. Un *"jeu fonctionnel"* en détruit la pûreté mathématique. Seules comptent en fait une position de départ du curseur (becs en contact) et une position d'arrivée (solide à mesurer entre les becs). Une maquette simplifiée fait mieux comprendre que, un bipoint particulier (qu'on appellera *"ordonnateur"* de la translation) étant donné, à tout point M du plan, on fait correspondre par la translation d'ordénnateur $\overrightarrow{AA'}$ un point M' du même plan.
On définit ainsi une *bijection* du plan sur lui-même. On retrouve la translation au sens mathématique.



III - Conclusion

* Le mathématicien raisonne sur des *modèles* parfaits dont le technicien fournit des *maquettes* sans jamais confondre réalité et modèle.

* L'élève est motivé pour effectuer des calculs qu'il rencontre en mathématiques du fait que les liens entre réalité et modèle seront ressentis.

12 - Acquisition des notions d'implication et d'équivalence

par Jacques CHAYE, Poitiers

Les différents points suivants ont été abordés :

1 *Une initiation à la logique est-elle nécessaire ?*

- Il ne faut tuer ni le bon sens, ni l'intuition en leur substituant un mécanisme imbécile.

- L'information logique apportée doit être pour les élèves une aide en cas de difficultés, un garde-fou, un langage propre à résumer certains résultats ou à énoncer certaines définitions sous une forme précise non équivoque, un instrument permettant de dégager l'architecture d'une démonstration,etc...

- Il faut motiver son introduction (par exemple, exhiber quelques ambiguïtés du langage courant, quelques erreurs fréquentes de la logique instinctive).

2 *Usage des variables, des propositions en x, y,..., des quantificateurs*

- Le discours mathématique ne peut pratiquement pas se passer de l'emploi de *variables* et de *constantes* (ce sont un peu les *noms communs* et les *noms propres* de la grammaire).

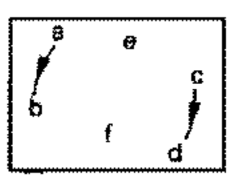
Notion de *proposition en x, y,...*(fonction propositionnelle, ou "propositionnelle", "moule" dirait E.Galion), énoncé ni vrai ni faux, mais qui, soit par *particularisation* (substitution de constantes aux variables), soit par *quantification*, fournit une proposition ayant nécessairement une des deux valeurs de vérité.

- Ne pourrait-on pas se passer du mot *inconnu(e)* qui fausse le concept de variable ? On a l'impression que la lettre x change de statut au fur et à mesure que se déroule la résolution d'une équation. Quand il y a existence et unicité (c'est par exemple le cas en géométrie pour la recherche d'*un* barycentre) ces subtilités paraissent peut-être inutiles, mais on ne sait pas toujours à l'avance si tel est le cas.

3 *Comment motiver le connecteur d'implication ?*

Il s'agit d'abord de faire toucher du doigt l'insuffisance du "*si...alors*" dans son sens courant, pour les besoins de la mathématique.

Voici un exemple exploitable : ayant assimilé la notion de transivité d'une relation *s* sous la forme "si x *s* y et y *s* z alors x *s* z", la plupart des élèves déclarent non-transitive la relation présentée ci-dessous ; qui pourrait le leur reprocher ?



On peut alors essayer de leur faire formuler la non-transitivité; le bon sens suggère : "il existe au moins x, y, z, tels que x s y et y s z et non (x s z)". Une relation non-non-transitive, c'est-à-dire transitive,est alors une relation pour laquelle "il n'existe pas x, y, z, tels que x s y et y s z et non (x s z)". Or, c'est le cas de la relation présentée plus haut; elle est donc transitive. La première définition donnée "si x s y et y s z alors x s z" nécessite dans ces conditions une extension du "*si ... alors*". L'idée géniale des logiciens a été l'introduction du *connecteur* pour résoudre la difficulté.

Autre exemple plus général : si on veut que l'énoncé "si $x \in A$ alors $x \in B$" définissant "$A \subset B$", recouvre le cas où $A = \phi$ (avec, soit $B = \phi$, soit $B \neq \phi$), c'est-à-dire si on veut que ϕ soit inclus dans tout ensemble, on est bien obligé d'en passer par les quatre lignes de la table de vérité !

4 *Présentation de fiches pour élèves au niveau de la classe de troisième*

Le discours mathématique s'établit dans le temps et cette "orientation" crée souvent un malentendu dans l'esprit des élèves qui peuvent ressentir certaines difficultés à distinguer le cas où ils raisonnent par *équivalence* et celui où ils raisonnent par *implication*. Doit-on s'astreindre à faire ces fastidieux raisonnements "dans les deux sens" chaque fois que (c'est le cas très fréquent) les "*si...alors*" peuvent être remplacés par "*si et seulement si*" ? Ce qui est sûr, c'est que la distinction entre "$A \subset B$" et "$A = B$" est bien maîtrisée depuis la 6ème. Une manière possible de résoudre des équations par exemple peut consister à utiliser l'écriture ensembliste :

$$\{x / x \in \mathbf{R} / 3x + 5 = 2\} = \{x / x \in \mathbf{R} / 3x = 2 - 5\}$$

mais cette pratique est lourde et peu claire; de toute façon l'égalité ci-dessus repose sur un théorème se traduisant par une équivalence.

On peut alors trouver utile d'introduire les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ pour coder dans le langage des propositions, les inclusions ou égalités entre ensembles auxquelles les élèves sont familiarisés. C'est ce qui a été fait par exemple à Poitiers en suivant la progression résumée ci-dessous :

. Soit U $= \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Soit x une lettre représentant n'importe quel élément de U; on dit que x est une *variable* de U et que U est le *domaine* de x. Considérons les phrases suivantes :

phrase a(x) : "x est multiple de 2"
phrase b (x) : "$1 \geqslant x$"
phrase c (x) : "x est multiple de 4"
phrase d (x) : "$4 \geqslant x + 3$"
phrase e (x) : "$2(x+1) = 3$"
phrase f (x) : "$2(x+1) = x + 3$"
phrase g (x) : "$2(x+1) = 2x + 2$"
phrase h (x) : "$x^2 - 3 < 4$"
phrase i (x) : "$3 - x > -2$"

Ce sont des énoncés dont on ne peut dire ni qu'ils sont vrais ni qu'ils sont faux ; on dit que ce sont des *propositions à une variable x* ou des *propositions en x*.

• Si dans une de ces propositions en x, on remplace la lettre x par un certain élément de U, on obtient cette fois une proposition dont on peut affirmer qu'elle est soit vraie, soit fausse; par exemple, si on remplace x successivement par -4, -3, -2,...etc, dans "x est multiple de 2", on obtient "-4 est multiple de 2"(vraie), "-3 est multiple de 2"(fausse),..etc.

Remarque : Par abus de langage ou de notation, les relations "est multiple de", "$\geqslant$", etc, sont ici des *restrictions* de celles définies dans les ensembles numériques **N** ou **Z** etc...; on s'interdira donc de remplacer la variable x de U par une constante telle que -0,5 ou 18.

En "testant" chacun des éléments de U par chacune des propositions, on obtient le tableau :

	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
x est multiple de 2	X		X		X		X		X
$1 \geqslant x$	X	X	X	X	X	X			
x est multiple de 4	X				X				X
$4 \geqslant x + 3$	X	X	X	X	X	X			
$2(x + 1) = 3$									
$2(x + 1) = x + 3$						X			
$2(x + 1) = 2x + 2$	X	X	X	X	X	X	X	X	X
$x^2 - 3 < 4$			X	X	X	X	X		
$3 - x > - 2$	X	X	X	X	X	X	X	X	X

• Désignation en compréhension
Désignation en extension.

• On constate que tout élément de U vérifie la proposition "$3 - x > - 2$",

on écrit : $\boxed{\text{pour tout x de U, } 3 - x > - 2}$

ou encore : quel que soit x de U, $3 - x > - 2$

On remplace souvent les expressions *pour tout, quel que soit*, par le signe $\forall$, et les expressions *pour tout x de U, quel que soit x de U,* par $\forall x \in U$. La phrase encadrée ci-dessus devient alors :

$$\boxed{\forall x \in U, 3 - x > -2}$$

On constate que :

$$\{ x/x \in U/x \text{ est multiple de } 4\} \subset \{ x/x \in U/x \text{ est multiple de } 2\} .$$

On traduit ceci des différentes façons suivantes :

- "x est multiple de 4"*implique*" x est multiple de 2"
- *si* x est multiple de 4, *alors* x est multiple de 2
- *si* x est multiple de 4, *nécessairement* x est multiple de 2
- x est multiple de 4, *seulement si* x est multiple de 2
- *pour que* x soit multiple de 4, *il faut que* x soit multiple de 2
- *pour que* x soit multiple de 2, *il suffit que* x soit multiple de 4.

Ces façons de s'exprimer ont l'inconvénient de ne pas indiquer le domaine de la variable x; pour éviter cette imprécision on utilise l'écriture schématique suivante :

$$\boxed{\forall x \in U, (x \text{ est multiple de } 4 \Rightarrow x \text{ est multiple de } 2)}$$

Remarque : En fait, il y a ici un petit tour de passe-passe : tant que $\Rightarrow$ n'a pas été introduit comme *connecteur*, le contenu de la parenthèse ne peut apparaître comme une proposition en x.

. Démarche analogue pour traduire :

$$\{x / x \in U / 1 \geqslant x\} = \{x / x \in U / 4 \geqslant x + 3\}$$

par

$$\forall x \in U, (1 \geqslant x \Leftrightarrow 4 \geqslant x + 3$$

• Propriétés de l'implication et de l'équivalence.
(Codage dans le nouveau langage des propriétés connues des élèves relatives à l'inclusion et l'égalité des ensembles).

• Propositions à plusieurs variables ; double, triple,..., quantification (universelle).

Propriétés des nombres réels traduites dans plusieurs langages.

•Utilisation du symbolisme introduit pour la résolution des équations et inéquations.

13 - Atelier de libre recherche en mathématiques en classe de C. E. S.

par M. BOUCHERIE, C. E. S. Miramont

Pourquoi la libre recherche ?

Dans l'enseignement traditionnel, on inculque le programme de mathématiques à l'enfant. On endort sa curiosité naturelle, il n'a pas la possibilité de rechercher, de se poser des questions, de s'intéresser.

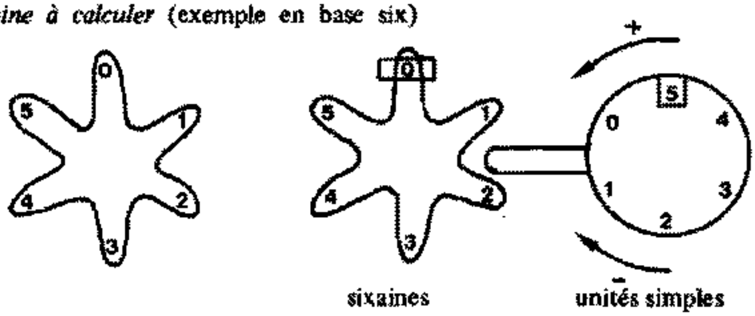
La libre recherche

Nous donnons du matériel à l'enfant. Il recherche ce qu'il peut en faire, il se pose des questions, il envisage plusieurs cas, il s'intéresse à ce qu'il fait et le professeur répond à la curiosité de l'élève (ce n'est plus l'élève qui subit le programme du professeur). Le cours de mathématique est plus concret et plus efficace.

Nous avons constaté que cette méthode de travail de libre recherche développe l'esprit critique des enfants.

Exemple de matériel
Le boulier permet d'introduire la numération dans les différentes bases.

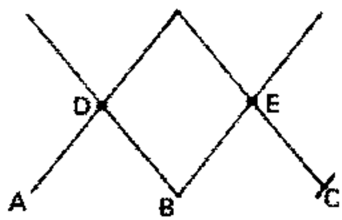
Machine à calculer (exemple en base six)



La machine est munie de son couvercle et laisse apparaître les chiffres par les cadrans. On tourne la manette des unités et le système d'engrenage permet à la machine d'entraîner les autres roues.
La machine permet de soustraire et d'additionner, de multiplier et de diviser.

Les machines à transformer

montage de réglettes



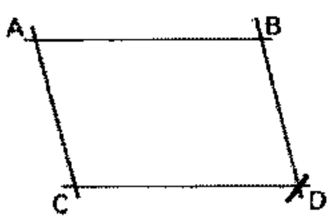
Homothétie :

.On appuie sur la pointe A qui est ainsi fixée.

. On suit un dessin avec la pointe B.

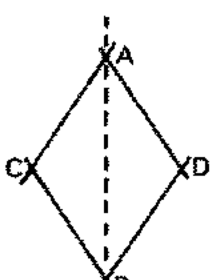
. La pointe C dessine en agrandissant.

(Si on place le crayon en B ou si on fixe la pointe B, le rapport change. Il change aussi si l'on déplace les rivets D et E).



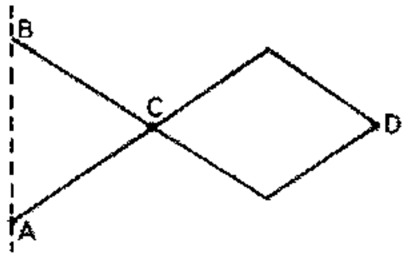
Translation:

A,B glissant sur une droite on suit le dessin avec C. La pointe D dessine le même dessin.



Symétrie :

A, B glissant sur une droite.
(axe de symétrie)
C suit le dessin.
D reproduit le dessin.



Dilatation :

A,B glissant sur une droite.
C suit le dessin.
D reproduit un dessin.

On peut mettre en évidence d'autres transformations géométriques avec des dispositions de réglettes différentes.

14 - L'enseignement mathématique en Angleterre

par A. BELL, D. G. CRAWFORTH, D. H. WHEELER (Angleterre)

Deux salles munies de matériels ont été utilisées comme ateliers mathématiques.

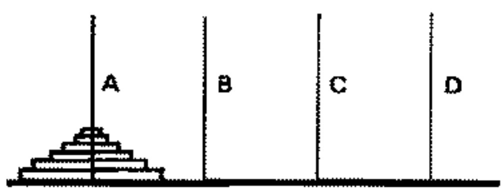
Nous donnons ici deux exemples de situations : les Tours d'Hanoï et le jeu d'Hex.

Quelques extraits de l'introduction du livre *"Mathématique dans l'Enseignement Elémentaire"* (1), servent pour décrire les finalités de ces activités, ainsi que deux documents rédigés par des élèves.

Aux heures d'animation du groupe, les participants ont été invités à étudier eux-mêmes, en groupe, les problèmes ou situations qui ont servi comme départ pour ces sujets; après, ils ont lu les documents des élèves. Les lecteurs du Bulletin sont invités à faire de même.

(A) Jeux

1)



A : pile de disques de diamètres différents.

Reproduire la figure de A en B, en déplaçant les disques sur les différents supports, et en respectant la consigne : ne pas placer un disque plus grand sur un plus petit.

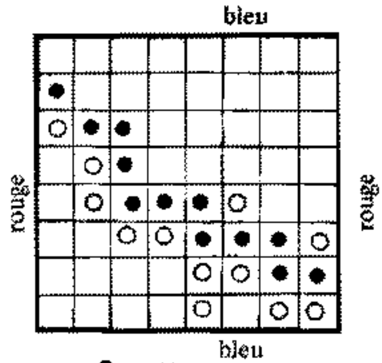
(1) D. Wheeler, O.C.D.L., 1970.

Problème 1 : sans utiliser D.

Problème 2 : avec D.

2) - Un damier à deux côtés opposés rouges et deux côtés opposés bleus.

- Pions rouges et bleus.
- Deux joueurs.
- Le jeu consiste :
  pour le premier joueur à placer un pion rouge,
  pour le deuxième joueur à placer un pion bleu,
  de manière à ce qu'un joueur empêche l'autre de rejoindre les 2 lignes de sa couleur.



le rouge a gagné

bleu

● rouge
○ bleu

(B) Finalités des activités mathématiques

La mathématique est une création de l'esprit humain. Un nouveau canton des mathématiques peut être élaboré en vue de telle tâche donnée, de même que l'on peut établir les plans d'une construction nouvelle. C'est le premier enseignement à retenir des mathématiques modernes. L'invention de nouvelles algèbres et de nouvelles géométries, jointe à la recherche fondamentale, a montré que les mathématiques ne sont pas un absolu, donné à priori, non plus qu'une science édifiée entièrement sur l'observation de la réalité. La mathématique est faite par les hommes avec ce que cela implique de relatif et d'inachevé. Elle n'existe pas hors de l'esprit humain; ses qualités lui viennent de l'esprit de ceux qui lui donnent le jour.

Puisque la mathématique est créée par les hommes et n'existe que dans leur esprit il faut qu'elle soit constamment découverte ou redécouverte par l'intelligence de chaque personne qui en fait l'étude. En ce sens on peut dire que l'on n'apprend les mathématiques qu'en les créant. Nous ne croyons pas que l'on puisse tracer une frontière nette entre l'activité intellectuelle du mathématicien créant de nouvelles mathématiques et l'activité intellectuelle de l'enfant étudiant les mathématiques, nouvelles pour lui. Les ressources de l'enfant sont différentes, son expérience n'est pas la même, mais les deux entrent en jeu dans l'acte créateur. Nous insistons sur le fait que les mathématiques que connaît un enfant sont, au sens propre, son bien, parce qu'il les construit par son action personnelle.

Une seconde caractéristique des mathématiques modernes existe en liaison avec la première. L'emploi de la mathématique s'étend maintenant à une grande variété de domaines et n'est pas limité, comme cela le fut, aux applications mécaniques et physiques. Des secteurs entièrement nouveaux d'utilisation se sont fait jour, certains depuis quelques années à peine. La recherche opérationnelle et la cybernétique, pour citer deux exemples, mathématisent des situations que l'on n'aurait pas auparavant considérées comme susceptibles d'une analyse mathématique. Ces propos pourraient paraître nous éloigner de l'école et surtout de l'école primaire. Leur intérêt consiste, pour le maître, à prendre conscience qu'il existe un grand nombre de situations auxquelles on peut songer en vue d'une exploitation d'ordre mathématique. Celle-ci ne se limite pas au domaine des nombres et à l'espace; on peut dire qu'elle apparaît toutes les fois que l'esprit opère des classements, met de l'ordre, crée des structures. Ceci élargit considérablement l'éventail des expériences qui peuvent relever de l'activité mathématique et facilite la tâche du professeur; il peut aisément susciter les occasions favorables, trouver les situations qui déclenchent la pensée mathématique des enfants. Première conséquence pratique, dans la classe les mathématiques deviennent plus variées et par suite plus attirantes. Deuxièmement, l'enfant doit pouvoir explorer des situations faisant partie de son propre champ d'expérience. Elles permettent d'élaborer des mathématiques assez difficiles et qui cependant ne requièrent pas au préalable l'apprentissage de recettes et la mémorisation de problèmes-types que comporte si souvent le travail traditionnel sur l'arithmétique.

Si on ne considère pas que les mathématiques se restreignent à un petit nombre conventionnel de domaines et si l'on sait par ailleurs que rien ne contraint à suivre un simple développement linéaire, alors le professeur peut encourager ses élèves à élargir leur champ d'investigation. Ils peuvent étudier des situations qui sont infiniment riches sur le plan de l'exploitation mathématique. Il y a des situations, nous en donnons beaucoup d'exemples, assez claires pour être appréhendées par tous les enfants et qui offrent cependant une telle richesse de possibilités qu'il est difficile d'en faire le tour. En présence des résultats obtenus par les élèves dans de tels cas, on doit abandonner les jugements péremptoires concernant les mathématiques qui seraient appropriées à tel ou tel âge, ou relatifs à la nécessité de l'apprentissage de certaines mathématiques avant d'autres. Il devient manifeste que l'étude de la mathématique est une activité complexe et que les enfants peuvent travailler avec succès dans cette complexité elle-même.

Nous pensons d'autre part que l'enseignement qui essaie de simplifier l'étude en fractionnant la matière en chapitres isolés, dont certains sont privilégiés - selon le schéma d'un hypothétique escalier à monter - n'aide pas les enfants mais provoque des blocages. Les enfants ont besoin de techniques et de stratégies logiques plutôt que de l'habileté à répondre avec précision à des questions faciles. Ils auront été considérablement privés si l'exactitude dans un tout petit domaine est la seule chose que leur a apportée l'étude des mathématiques. Bien sûr on peut affirmer que les méthodes générales et les stratégies sont très abstraites et que par conséquent on ne peut s'attendre à ce que les enfants les acquièrent. Mais les premiers pas de l'enfant dans l'apprentissage de sa langue maternelle montrent qu'il est capable d'utiliser une organisation d'un niveau d'abstraction élevé et il nous semble que l'enseignement qu'il reçoit souvent l'enferme trop étroitement dans le particulier. Les mathématiques peuvent alors devenir difficiles pour lui, non parce qu'elles exigent une pensée abstraite, mais parce qu'elles ne lui permettent pas de s'engager sur la voie de l'abstraction. Nous ne voulons pas dire que les mathématiques devraient être détachées du concret et de l'expérience. Nous pensons que l'enfant dans les premiers stades de leur étude oscille entre l'attrait du détail particulier et un libre classement d'ensemble fondé sur des similitudes et des différences qui lui apparaissent au souvenir d'autres situations faisant partie de son expérience. Son activité peut paraître dispersée et imprévisible au point de faire dire en termes savants qu'il n'a pas formé tel ou tel concept; mais l'examen de notre comportement, quand nous étudions quelque chose d'entièrement inconnu, paraît montrer que l'attitude de pensée de l'enfant n'est pas, sous cet aspect, différente par essence de la nôtre.

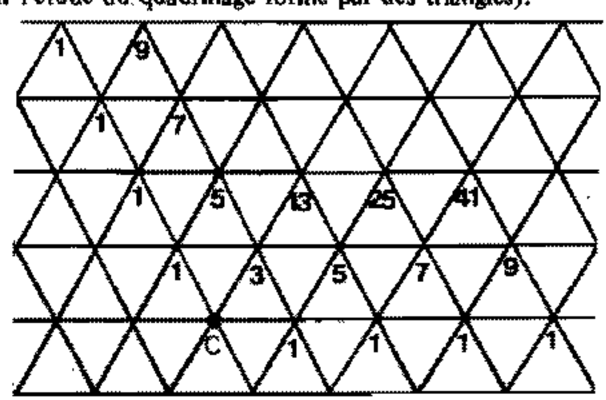
L'enseignement des mathématiques s'est limité jusqu'à présent à essayer de transmettre des mathématiques connues et cela s'est fait avec la plus grande étroitesse d'esprit. Notre conception nous fait considérer de toute autre façon la tâche du professeur. Nous nous soucions d'accroître le côté créateur chez l'enfant et d'éviter que l'intervention magistrale y fasse obstacle. Chaque fois qu'un professeur impose sa démarche, rejetant toute observation qui ne semble pas entrer dans le cadre de celle-ci, il altère la capacité de ses élèves à développer une pensée mathématique. Nous attachons du prix aux mathématiques venant de l'enfant ; nous pensons qu'il devrait jouir de la liberté nécessaire pour les construire, les utiliser et s'exprimer à leur sujet. Sans doute l'enfant peut-il établir des mathématiques que l'adulte ne considère pas comme valides. Pourvu que le maître évite de porter des jugements ex cathedra et considère avec bienveillance les tentatives des élèves, il est alors possible que les résultats obtenus par l'enfant soient soumis au test social. De cette manière le maître avisé peut contrebalancer le besoin qu'ont les enfants de s'accrocher à leur propre pensée, avec le besoin de faire partager leurs idées, de communiquer avec les autres. Equilibrer ces deux exigences, obtenir, d'une part, des mathématiques acceptées par le groupe social, et laisser par ailleurs la liberté de créer des mathé matiques qui n'aient de signification que pour l'inventeur est la principale tâche pédagogique. En ce sens l'enseignement des mathématiques n'est pas différent de celui de la langue ou des disciplines d'éveil.

C) Document rédigé par deux élèves de onze ans (H.Peny et D.Stimpson)

(Ce texte est reproduit avec toutes ses erreurs, pour montrer la façon de rédiger le travail.
Ce travail a commencé par l'étude du quadrillage formé par des triangles).

Nombre de chemins allant de C à chaque point du quadrillage

Directions permises



Nous avons essayé de trouver le centième nombre de la troisième ligne (voir le dessin). Pour faire ceci, Diane et moi-même avons d'abord cherché la structure dans la suite des naturels. Nous avons regardé les différences entre chaque naturel, et nous avons établi la table suivante :

	1		5		13		25		41		61		85		113
différences		4		8		12		16		20		24		28	
			4		4		4		4		4		4		

Nous avons remarqué que les différences entre les naturels augmentent chaque fois de quatre : 4, 8, 12, 16 et ainsi de suite. Nous nous sommes demandé ensuite comment trouver le 100ème naturel d'une telle suite. Nous avons commencé par additionner les cent naturels 1 + 2 + 3 + 4 + 5 etc... Cela fait 5050, et nous avons décidé de multiplier par quatre, ce qui nous a donné 20200. Mais nous savions que ce résultat était faux parce que tous les naturels de la suite étaient impairs, et que le centième naturel devait être impair aussi; mais notre résultat était un naturel pair. Alors nous avons ajouté 1, ce que nous avions oublié au commencement. Nous voyions bien que ce nombre était toujours trop grand, alors nous avons remarqué une espèce de structure de ces naturels :

	1+4	1+4+2x4	1+4+2x4+3x4	1+4+2x4+3x4+4x4	etc...
1	5	13	25	41	

En continuant ainsi, nous avons remarqué que la plus grande somme des nombres 4 que nous obtiendrions serait 99. Nous avons continué jusqu'à 100. Alors, vu que nous avions continué jusqu'à 100 quatre fois, notre résultat serait moins grand de 400 que notre résultat actuel.

Alors, le centième naturel de la suite est 18001 (19801).

D) Document rédigé par un élève (R. Hodgson)

(Reproduit pour montrer le genre de travail et la façon de rédiger)

On m'a donné :

(1) 23 x 64 = 46 x 32
(2) 24 x 63 = 42 x 36

Trouvez les naturels de 2 chiffres (ou de 3 chiffres) ayant la même propriété.

*Ensuite on m'a rappelé la structure du système décimal; un naturel abc s'écrit :

$a \times 10^2 + b \times 10^1 + c \times 10^0$

*J'ai utilisé ceci pour étudier (1) :

23 x 64 = 46 x 32
(a) $(2 \times 10 + 3)(6 \times 10 + 4) = 12 \times 10^2 + (8 + 18) \times 10 + 12$
(b) $(4 \times 10 + 6)(3 \times 10 + 2) = 12 \times 10^2 + (8 + 18) \times 10 + 12$

* J'ai remarqué tout de suite que :

a) les deux multiplications donnaient les mêmes coefficients pour 10^2, 10 et 1.

b) les coefficients de 10^2 et 1 étaient les mêmes.

J'ai conclu que ceci devait être ainsi, afin que lorsque l'on intervertit les chiffres dans (b), le coefficient de 1 dans (a) devient le coefficient de 10^2 dans (b).

*Pour la raison ci-dessus, j'ai déduit que, pour que le produit de deux naturels de 2 chiffres égale le produit des mêmes naturels intervertis (ab et cd - ba et dc), la condition suivante doit être remplie :

$a.c = b.d$

*Pour simplifier, j'ai pris b= e

*Cela donne $a + d = c + f$, ce qui, avec $a.d = c.f$, est satisfait seulement si $a = c$ et $d = f$.

*Une autre direction était d'éliminer ae, bd, ce et bf en posant :

$b = e = 0$

*Ainsi, il est possible de résoudre ce problème si

(a) $ad = cf$

(b) $b = e = 0$

par exemple $603 \times 408 = 306 \times 804$

*Je ne vois pas comment avancer dans cette partie du problème.

Remarques :

*Naturels de 2 chiffres : (ab x cd) : ac doit être égal à bd.

*Naturels de 3 chiffres : (abc x def) : ad doit être égal à cf

$b = e = 0$

*Il y a une autre variation pour les naturels de 3 chiffres.

J'ai fait le nouveau calcul :

$ae + bd = ce + bf$

$ae - ce = bf - bd$

$e(a - c) = b(f - d)\ (= n)$

*e, (a - c), b, (f - d) peuvent tous être considérés comme facteurs de n.
Donc n est un nombre de 4 facteurs.

*...

*J'ai décidé de recommencer, avec un nombre n qui satisfait la relation ad=cf, par exemple 24, avec a=8, d=3, e=6, f=4.

Ainsi... 2e = b...et, si e = 1, b = 2...
Nous trouvons 826×314
J'ai vérifié ceci, et j'ai trouvé qu'en effet,

$628 \times 413 = 826 \times 314$

Ainsi, il n'est pas nécessaire que b = e = 0.

* Maintenant, je pouvais trouver d'autres naturels abc et def, sans zéro.

* Mais, en faisant cela, j'ai remarqué que de tels naturels sont difficiles à trouver.
En utilisant 6 chiffres, il est évident qu'il n'y a que 9 chiffres parmi lesquels on peut choisir, alors quelques-uns seront probablement répétés.

...

*Résultats simplifiés : ad = cf, ec = bd, bf = ae.
* Vérification de 324×846.

15 - Ordres sur des ensembles finis à l'école primaire

par une équipe de Toulouse

Note

Les exemples choisis sont des relations d'ordre, qui ne permettent pas la comparaison d'un élément avec lui-même (ordre strict). La réflexivité, souhaitable pour les mathématiciens dans beaucoup de démonstrations, pourrait être introduite, mais la compréhension de la relation serait gênée par une structure de phrase peu naturelle.

Première expérience (C.P. - C.E.)

- Les enfants se classent suivant leur taille, en se mettant en rang. Aucun des élèves n'ayant la même taille, on obtient une première liste. Chacun est alors affecté d'un numéro d'ordre (du plus petit au plus grand.)

1 - Marcel
2 - Anne
3 - Béatrice
.
.
.
20 - Paule

- Le même travail est effectué à partir des poids figurant sur les bulletins médicaux. Pour certains enfants la consigne ne suffit pas. On convient pour ceux qui ont le même poids que le "premier" sera le plus âgé (on aurait pu choisir l'ordre alphabétique).

- Un ordre total est ainsi déterminé sur les enfants grâce à deux consignes dont l'une (le poids) prédomine. D'où une deuxième liste avec à nouveau un numéro d'ordre.

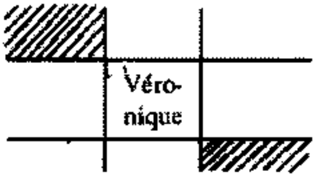
Chaque enfant est caractérisé par un *couple.*
Marcel (1,2) ; Marie (8,6) ; Paule (20,20).

Réaction des enfants : "Paule gagne tout le temps"(sic).
En effet, Paule est de loin la plus grande et la plus grosse de la classe.
Et Marie ? qui gagne-t-elle?
On arrive après beaucoup de recherches individuelles à l'idée d'un tableau que la maîtresse confectionne.

Chaque enfant vient inscrire son nom dans la case qui le représente. Chacun a sa "maison".

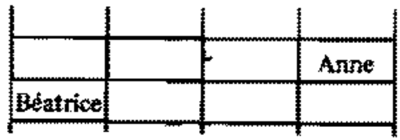
Poids →

Taille		1	2	3	4	...	20
	1		Marcel				
	2				Anne		
	3	Béatrice					
	:						
	20						Paule



Véronique situe tous les camarades qu'elle gagne parce qu'elle est plus grande-*et*-plus grosse, ainsi que tous ceux qui la gagnent.

Béatrice ne gagne pas Anne.
Anne ne gagne pas Béatrice.



L'ensemble des enfants muni de cette relation "gagne" n'est pas un treillis, mais on pourrait facilement dépasser le problème de départ en considérant tous les couples possibles.

Deuxième expérience (C.E.)

Matériel : As, roi, dame, valet de pique et as, roi, dame, valet de carreau.

Consigne donnée aux équipes : classer ces cartes librement.

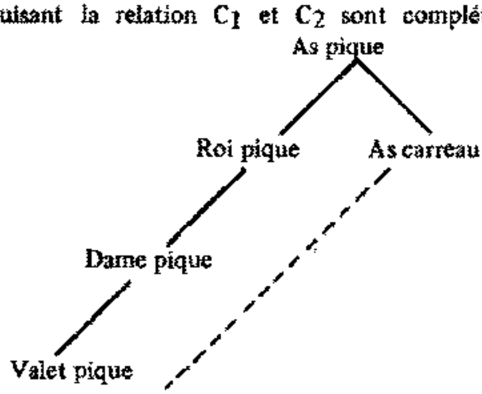
Deux types de classement apparaissent.
Si on décide de conserver dans tous les cas les consignes :

C_1 : pique > carreau	C_2 : as > roi > dame > valet

on obtient :

as pique, roi pique, dame pique, valet pique, as carreau, roi carreau, dame carreau, valet carreau (C_1 prédomine).
as pique, as carreau, roi pique, roi carreau, dame pique, dame carreau, valet pique, valet carreau. (C_2prédomine)

La maîtresse propose alors la recherche de la classification correspondant à C_1 et C_2 sans prédominance d'une consigne.
Soit Roi de pique et as de carreau. Quelle est la carte "la plus proche" qui l'emporte sur les deux ?
Pour organiser toutes les cartes selon C_1 et C_2 on exploite l'idée de "ranger tous les piques" et "mettre les carreaux en face".
Les liaisons traduisant la relation C_1 et C_2 sont complétées sans trop de difficultés.



Troisième expérience (commencée au C.E.1, exploitée en C.M.)

- A partir du mot Lac que Marie-José avait écrit cal, on a cherché les anagrammes de ce mot (6).

- Même recherche avec le mot bac. On décide de rechercher les mots de trois lettres en permettant aussi le redoublement des lettres a, b ou c.

La mise en ordre alphabétique de tous ces mots est facilitée grâce à l'identification :

a = 1; b = 2; c = 3(utilisée spontanément par une fillette du C.E.1).

a a b = 1 1 2
a a c = 1 1 3
a b a = 1 2 1

On pense alors à l'existence des mots de deux lettres. Où les situer ?

a b a = 1 2 1
a b = 1 2 0

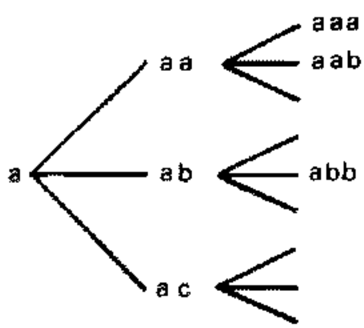
On agit,comme pour un nombre, sur la partie après la virgule.

Cette difficulté a resurgi lors du classement des mots d'une même famille:

- barbe
- barbeau
- barbiche

rappel de l'exercice précédent. Utilisation de chiffres ; pas de difficultés.

Au cours moyen, la détermination de tous les mots d'au plus trois lettres formés à partir de a b c s'est faite directement par la construction d'un arbre.



La lecture des mots rangés se fait en épuisant une branche avant de passer à la branche suivante.

On détermine le nombre de mots d'une lettre, deux lettres, trois lettres.
Généralisation (alphabet plus important ; mots plus longs).
Le problème de l'insertion de nouveaux mots (plus longs) entre a b a et a b b par exemple montre toute la différence avec l'ordre dans les naturels. Comparaison des deux ordres.

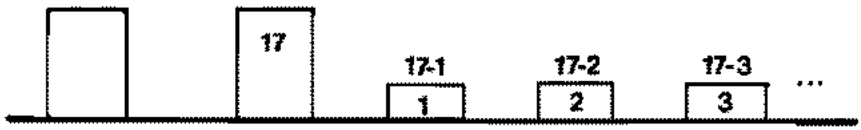
Quatrième expérience

Numérotage $\left\{\begin{array}{l}\text{de paragraphes}\\ \text{de maisons.}\end{array}\right.$ (C.M.)

Les enfants relèvent les numéros des maisons sur un côté de rue. Les maisons étant espacées, on imagine un plan de construction visant à intercaler de nouvelles maisons. Comment numéroter ? On répète le processus.

$17 - 2 < 17 - 2 - 4 < 17 - 3$

17 - 2 - 4 est-il le bâtiment 17 - 24? Ce n'est donc pas l'ordre des nombres à virgules, mais un produit d'ordres de type Ω .



16 - La géométrie au second cycle

par M. CONDAMINE, E.N.S. Saint Cloud

Sujet difficile à aborder

Mr. Condamine ouvre le débat : l'évolution des programmes de Géométrie dans le second cycle, sections C, lui semble satisfaisante : unification de résultats, simplification de la présentation, par suite du choix d'une bonne méthode de construction :

- espaces vectoriels; applications linéaires
- espaces affines; applications affines
- structure euclidienne ensuite; isométries
- rotations; angles.

Quelques détails sont examinés : en particulier, l'amélioration qu'apporte, pour l'étude des isométries, l'étude des applications linéaires involutives, en recourant aux sous-espaces :

- des vecteurs invariants,et
- des vecteurs transformés en leur opposé.

La Géométrie traditionnelle disparaît en grande partie, malgré quelques réticences (faisceaux de cercles, inversion, pôles et polaires...).

Beaucoup d'opposants, formés à une autre géométrie, craignent sincèrement que la présentation actuelle soit plus abstraite et difficile à comprendre pour l'élève. Cependant il semble bien qu'en fait, le groupement par grandes idées et structures facilite le travail d'acquisition des élèves, et même leur travail de recherche.

Problèmes concernant les programmes des sections C

1) Le programme de la classe de Première C semble trop lourd. Il est impensable de supprimer une heure dans cette classe, avec le programme proposé.

Bien que le programme puisse sembler moins lourd une deuxième année, il semble nécessaire d'aborder son allègement.

On conçoit qu'il faille conserver la trigonométrie, dont on a besoin en physique. On pourrait conserver une présentation analogue des angles tout en faisant l'économie des développements sur les isométries, les matrices de rotation dans une base, le produit de telles matrices,...

(Mr. Condamine montre comment on pourrait, à son avis, enrichir les révisions d'Algèbre de considérations sur **C**, ensemble des $z = a + ib$, avec $i^2 = -1$ (comme on peut voir $\mathbf{Q}\sqrt{2}$ par exemple); définir $|z|$; constater que $U = \{z ; |z| = 1\}$ est un groupe multiplicatif; faire opérer ce groupe sur le cercle trigonométrique, comme (**R**, +) opère sur la droite. Ce qui donne une présentation "isomorphe" à la présentation actuelle, plus simple pour l'écriture, économisant beaucoup de vocabulaire géométrique).

2) Est-il bon de traiter, en seconde, d'abord les espaces affines, puis les espaces vectoriels, et en première, de suivre l'ordre inverse ?

On peut penser que les élèves ont une intuition "ponctuelle" de l'espace, et qu'on dégage alors une structure vectorielle, par laquelle on pourra commencer ensuite.

Si on ne se bornait pas aux "vecteurs" de la "Géométrie concrète", il semble bien que le vectoriel qui se rencontre sur de nombreux exemples, soit, objectivement, plus simple que l'affine, ou "ponctuel" de la Géométrie.

Programmes des autres sections

Il semble que la mise en forme théorique des contenus des programmes soit élaborée pour les sections C, et que, pour les autres sections, il soit procédé par amputations. Les collègues présents n'ont pas l'impression que les programmes soient pensés spécialement pour chaque section, et cela paraît regrettable.

En conclusion

L'évolution dans le bon sens doit continuer : actualisation du contenu des programmes, son aménagement simple et efficace pour alléger le travail et faire acquérir le meilleur outil possible.

17 - Etude de documents et méthodes élaborés aux U.S.A. pour initier aux Probabilités des enfants de 7 à 10 ans

par P.-L. HENNEQUIN

Rappelons qu'aux U.S.A. les établissements scolaires et universitaires sont indépendants les uns des autres et les programmes de mathématiques y sont très divers.

En 1969, le Gouvernement Fédéral a chargé un groupe de professeurs Américains, Suédois, Allemands..., d'élaborer un cours complet de Mathématiques depuis l'école élémentaire jusqu'au "Collège" ; ce groupe constitue le C.S.M.P (*) et peut envoyer, sur demande, toute documentation.

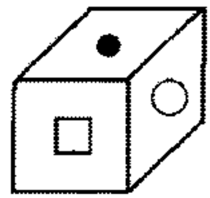
L'équipe travaille, entre autres expériences, sur des enfants de 7 à 8 ans. Le problème est posé : Peut-on enseigner les probabilités dans le 1er degré ? Pour cela, on va demander aux enfants de se livrer à plusieurs expériences qui auront pour but, par exemple, de faire distinguer épreuve et événement (toutes les épreuves n'ont pas la même probabilité).

(*) C.S.M.P. COMPREHENSIVE SCHOOL MATHEMATICS PROGRAM
103 South Washington - CARBONDALE (Illinois) 82901

L'expérience est basée sur le fait que l'enfant est motivé par le jeu et que les probabilités ont été fondées à partir des jeux de hasard.

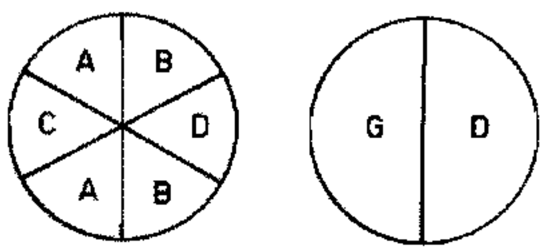
Ière expérience :

Matériel utilisé :
- un dé.

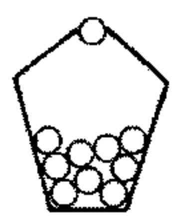


- un escalier lanceur (50 cm environ).On lâche le dé à la partie supérieure et celui-ci sort par la porte du bas après avoir roulé sur les escaliers. On élimine ainsi la probabilité du lancer à la main.

- disque et aiguille.
On fait tourner l'aiguille à la main.
Sur le disque, on peut dessiner plusieurs secteurs.
Exemple :



- un "shaker" ou mélangeur à billes.
Billes de différentes couleurs et orifice permettant de voir la couleur d'une bille en retournant le "shaker"



1- Chaque élève observe le matériel : les différentes faces du cube, les différents secteurs du disque.

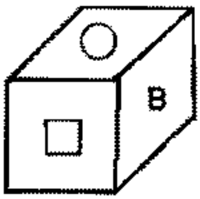
2 - l'élève met le cube dans l'escalier et dessine la face qui est sortie (plusieurs fois) puis il doit dessiner toutes les faces "possibles".

Ensuite, l'élève doit effectuer des expériences analogues avec :
le disque : noter sur quelle lettre ou couleur s'est arrêtée l'aiguille. Quelles sont les régions possibles où elle peut s'arrêter ?
- le shaker : noter les couleurs des billes observées à l'orifice.

On fait faire plusieurs répétitions des expériences.

2ème expérience :

Notion de fréquence : un dé comportant un certain nombre de faces : bleue, verte, avec un cercle ou un triangle.



(Certains symboles figurent sur 2 faces, d'autres sur une seule)

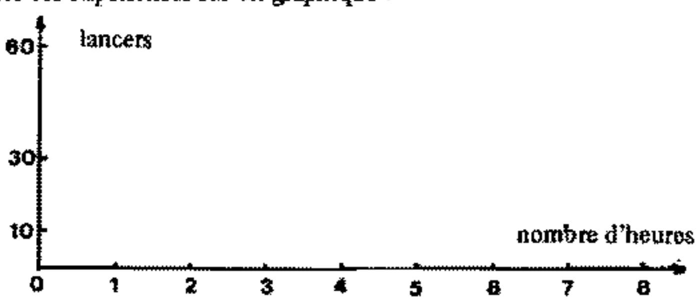
1 - Observation du dé
2 - On fait faire 18 lancers après avoir fait parier les enfants sur le nombre de sorties de la face choisie.
3 - On leur fait représenter sur un graphique la fréquence des résultats ainsi que le nombre d'événements {B} ou {O}, {A,B}...
4 - On leur fait calculer la fréquence de tels événements.

Ensuite, on prend un dé avec sur 2 faces le nombre 0
sur 2 autres le nombre 1
sur les 2 autres le nombre 2

On leur fait faire le jeu suivant : Oncle Bob veut savoir combien d'heures il va travailler ? Pour cela, il joue aux dés :
- il jette 4 dés et calcule la somme des chiffres obtenus.

Est-il possible qu'il travaille 1 heure, 6 heures...?
Quel est le plus petit et le plus grand nombre d'heures de travail ?
Ensuite, on fait 20 expériences en jetant les 4 dés à la fois.

Et cela, on le fait faire en jets séparément à 3 enfants, ce qui nous donne 60 jets. Est-il possible que l'ouvrier travaille 10 heures en 10 jours ?
Est-ce "vraisemblable" ?
A quelle fréquence cela correspond-il ?
On reporte ces expériences sur un graphique :



On répète la même expérience avec 5 dés et on pose les mêmes questions. Enfin, on fait la même expérience avec des dés comportant 1 sur toutes les faces.

Quel est alors le nombre d'heures maximum, le nombre minimum?
Essayer de prévoir qu'on obtient le même nombre.

Exemples de jeux
1er exemple (Introduction aux marches au hasard)
Jeu à 2 joueurs
Une planchette avec des petites cases (9)

Une aiguille tournant sur un disque partagé en 2 : droite D et gauche G. Chaque joueur doit lancer 3 fois l'aiguille (marche à 3 pas). Chaque fois qu'elle s'arrête sur G, il se déplace d'une case vers la gauche, sur D d'une case vers la droite en prenant comme départ la case du milieu.

Un joueur a des pions rouges R, l'autre des pions bleus B.
Pour le 1er coup, le joueur rouge place ses 5 pions dans 5 cases de son choix, le joueur bleu lance l'aiguille et place ses 5 pions en effectuant successivement 5 marches au hasard de 3 pas à partir du centre et prend les pions de son adversaire s'il aboutit dans une case occupée par l'un d'eux. Au 2ème coup, on recommence en permutant les deux joueurs, on continue jusqu'à ce qu'un joueur ait pris tous les pions de son adversaire.

Peu à peu, les élèves arrivent à voir que certaines cases sont priviligiées, ainsi si l'on place ses jetons sur les cases à une distance paire du centre, les jetons sont imprenables car en 3 coups on atteint une position impaire.
On suggère alors aux élèves de changer de règle, par exemple :
- jouer à 4 pas
- enlever les 2 cases extrêmes
- aiguille à 3 positions : gauche, droite, nulle
- Convenir que si un joueur a réussi à montrer que l'autre a placé le pion sur une position imprenable, il le prend.

Autre exemple (Introduction à la notion d'événement)
On prend un dé avec des dessins sur ses faces
- sur 2 faces, on a B
- sur 1 face, on a V
- sur 1 face, on a △B
- sur 2 faces, on △V

Le jeu se joue à 2 joueurs A et B et en 3 manches.

1ere manche :
Chaque joueur choisit une des 4 épreuves et les choix doivent être différents.{ } fréquence i.
On fait 15 expériences et on marque la fréquence de l'événement choisi.

2ème manche :
Chaque joueur choisit un événement formé de la réunion de 2 des 4 épreuves et le joueur qui a la plus grande fréquence à la 1ère manche choisit en dernier. Ici aussi, on va marquer la fréquence de l'événement choisi { , } fréquence j.

3ème manche :

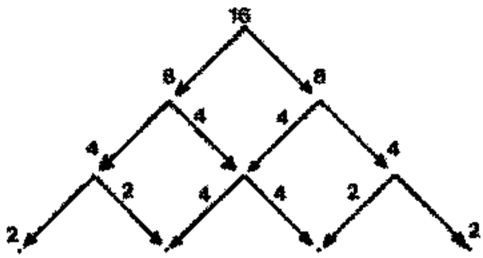
Même procédé avec 3 épreuves {, ,}

A la fin a gagné le joueur qui a la plus grande somme des fréquences.

Etude de marches au hasard

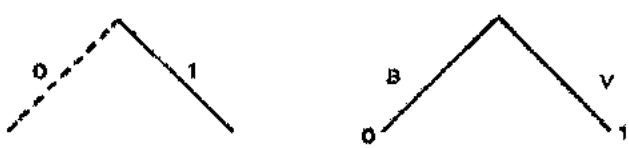
1) Etude déterministe

On reprend une planchette sur laquelle on met des clous à des places déterminées en quinconce, et des anneaux qu'on fait progresser suivant le schéma. Les anneaux sont placés successivement sur les clous de chaque ligne; on passe d'une ligne à la suivante en répartissant également les anneaux d'un clou sur les deux clous les plus voisins.



2) Etude probabiliste :

On met 16 anneaux sur le 1er clou. Pour déplacer ces anneaux, on se sert d'une aiguille ou de cartes indiquant la marche à suivre.



exemple de 4
pas : 0.1.1.0

On peut aussi utiliser des nombres au hasard.

On peut faire un graphe à partir de 20 expériences, un autre à partir de 500 et montrer que la dispersion relative est plus faible dans le second cas que le premier, on compare au modèle déterministe.

Conclusion : un gros effort vient d'être fait pour introduire les outils algébriques dans le 1er degré et faire réfléchir les élèves à la mathématisation de modèles déterministes. Il semble qu'un effort analogue pourrait être entrepris pour les outils probabilistes et l'étude de situations aléatoires.

18 - L'enseignement de la probabilité et des statistiques en 1ère et Terminale depuis 1967 Bilan de l'expérience

par P.-L. HENNEQUIN

Le groupe s'est tenu le vendredi et le samedi avec, chaque fois, une trentaine de participants; les discussions, parfois animées, ont porté sur trois thèmes :

A - Comment motiver les élèves au calcul des Probabilités ?

La motivation à la statistique peut se faire aisément par l'étude de populations (presse, annuaires, manuels de géographie ou de biologie) mais il est souvent difficile d'accéder à des documents bruts qui n'ont pas subi une première élaboration statistique.

Les liens entre statistique et probabilités apparaissent nettement dans la théorie de l'inférence statistique (tests d'hypothèse et estimation des paramètres) mais il s'agit d'une théorie difficile qui vient, à juste titre, d'être rejetée des programmes.

Il reste donc à motiver directement les élèves aux Probabilités en leur présentant un certain nombre de *modèles probabilistes* d'une situation concrète. Le choix des probabilités dans le modèle devra être présenté comme résultant d'une *mesure* sans qu'on précise comment celle-ci a été effectuée (de même qu'en géométrie on se donne des mesures de longueurs et d'angles alors que la détermination effective de celles-ci relève de la physique).

Il faudrait suggérer aux I.R.E.M. de rédiger un certain nombre de fiches donnant de tels exemples de modèles probabilistes.

B - Comment contrôler les connaissances des élèves ?

Le stock actuel de textes de baccalauréat concerne surtout l'analyse combinatoire. Or il s'agit d'une branche difficile des mathématiques où les hypothèses sont bien souvent implicites et où le langage joue un rôle important. Tous les participants souhaitent que le calcul des probabilités se dégage complètement de l'analyse combinatoire. Il semble que la répartition binomiale d'une part, l'étude de couples de variables aléatoires d'autre part puissent être de bonnes sources de problèmes.

C - Comment normaliser les notations ?

Une discussion s'engage sur la "bonne" définition de la fonction de répartition. Faut-il choisir $P(X < x)$ ou $P(X \leqslant x)$? Sans doute est-il plus important de bien interpréter les discontinuités de cette fonction (abscisse et amplitude des sauts) que de savoir si elle est continue à droite ou à gauche. Etant donné qu'à l'heure actuelle les deux définitions sont choisies, il convient de laisser une certaine liberté dans ce domaine tout en insistant sur le fait que les deux nombres $P(X < x)$ et $P(X \leqslant x)$ peuvent être distincts.

19 - Compte-rendu d'une expérience sur l'élaboration d'emplois du temps à l'aide d'un ordinateur

par J.-C. HERZ, conseiller scientifique à la Cie IBM France

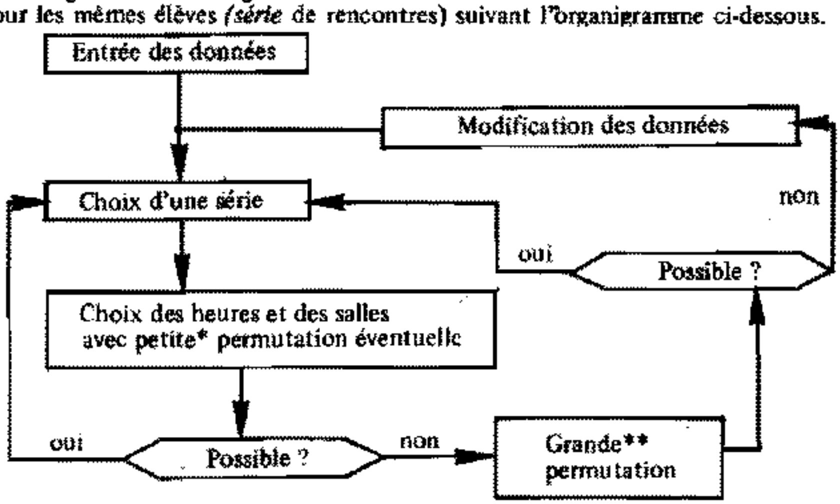
Le problème des emplois du temps est simple dans son principe et complexe dans son détail. Il comporte à la base cinq ensembles finis : E (élèves), A (activités), P (professeurs), S (salles), H (heures). Si on appelle *rencontre* un quadruplet (g, p, a, d) avec $g \subset E$, $p \in P$, $a \in A$, et $d \in N$ (durée), l'inconnue du problème est une application de R dans SxH, où R est un ensemble donné de rencontres. La complexité vient du très grand nombre de conditions, souvent difficiles à formuler, que doit vérifier cette application.

Dans l'expérience décrite, on s'est spécialement attaché à la formulation des voeux des professeurs et des contraintes pédagogiques. Ces deux types de conditions peuvent s'exprimer au moyen de la notion commune de *structure*. Une structure est une application dans N de l'ensemble J des demi-journées de la semaine :

Lu		Ma		Me		Je		Ve		Sa	
3	3	0	0	3	0	4	0	0	0	3	0

Chaque valeur est une borne supérieure du nombre d'heures acceptable pour un certain sous-ensemble de rencontres (celles concernant un professeur donné, ou celles concernant une activité donnée d'un groupe d'élèves donné). On se donne généralement pour chaque sous-ensemble plusieurs structures, classées par ordre de préférence.

L'algorithme traite globalement les rencontres concernant la même activité pour les mêmes élèves *(série* de rencontres) suivant l'organigramme ci-dessous.



* Permutation de rencontres déjà placées sans changement de structure
** Permutation de rencontres déjà placées avec changement de structure

Un essai partiel (la partie "Grande permutation" n'existant pas encore) sur un établissement de 19 classes et 27 professeurs a donné un remplissage à 90 % en 20 secondes de calcul sur gros ordinateur.

Une équipe travaillant indépendamment à l'Université de Grenoble est arrivée à peu près aux mêmes résultats. Les autres essais en France sont beaucoup plus embryonnaires.

20 - Système $\times\varnothing$ ou description d'un système de correction automatique et personnalisée d'exercices (actuellement 1.900 élèves sur 200 problèmes d'informatique)

par André POLY (E.N.S. de Saint-Cloud)

I - Origine

Le système Xϕ de correction automatique est né au Conservatoire National des Arts et Métiers, au moment où le nombre d'auditeurs du Cours télévisé d'Informatique Générale du Professeur NAMIAN était devenu trop élevé pour que le seul courrier et les polycopiés d'exercices assurent un lien assez profond et rapide entre les réalisateurs du cours et leurs utilisateurs. Un système de correction automatique utilisant des cartes "perfostyles" avait déjà été amorcé pour les Mathématiques en classes de 5ème et 6ème dans deux C.E.S. (soit 400 élèves) qui travaillaient avec les fiches GALION (1).

II - Description du système

Cinq assistants du Professeur NAMIAN mettent au point les textes des questionnaires, et, prévoyant les réponses probables des élèves, conçoivent les "commentaires" à donner à chacune des réponses possibles.

Ces textes hebdomadaires sont envoyés aux élèves qui suivent les cours sur la deuxième chaîne. Ils y répondent en cochant des feuilles préimprimées dites "feuilles à lecture de marque" qui comportent :

- dix colonnes de 10 cases où ils cocheront leurs réponses aux dix exercices proposés.
- une place "correspondance" où ils peuvent écrire librement.
- une zone d'identification à la fois automatique et visuelle comportant un matricule, un numéro de questionnaire et l'adresse en clair de l'élève.

Ces feuilles (reçues au plus tard le jeudi suivant) seront lues automatiquement et les réponses de chaque élève seront ainsi enregistrées.

La correction des 1.900 élèves demandait trois quarts d'heure le jeudi soir et conduisait à deux sortes de produits :

---

(1) Expérience menée par nos collègues BRUNET et JULIAN aux C.E.S de THIAIS ET VITRY.

- Un état statistique de toutes les réponses effectivement données par les élèves, qui permettait au Professeur de mieux connaître l'impact de son cours sur la population des auditeurs.

- Un jeu de cartes "Edition" qui, le vendredi soir, donnait lieu à l'impression "des corrigés personnalisés". Chaque élève recevait alors son corrigé (de une à deux pages de 50 lignes de 100 caractères environ).

III - Critiques et réflexions diverses

- Limitation dans l'analyse due au système (genre Q.C.M.) adopté, mais qui sera amélioré par une analyse beaucoup plus fine en cours de réalisation.

- Les professeurs trouvent le système trop sec : abandon du style, de l'exposé du raisonnement qui conduit à la bonne réponse.

- C'est plus un système d'évaluation d'un test qu'un examen.

- Il faut que le questionnaire soit très au point pour pouvoir juger l'élève (et tout vient de celui qui rédige les textes.)

- Il a été employé efficacement sur des élèves de 6ème qui travaillaient sur fiches : cela leur permettait de savoir s'ils pouvaient aller plus loin.

- Coût :

Pour 1.900 élèves, le système 1971 est revenu à 110.000 Francs avec, environ 12.000 Francs de programmation Ordinateur, 40.000 Francs de timbres, 30.000 Francs de lecture optique ce qui met l'exercice corrigé à, environ 30 centimes.

IV - Elaboration d'un questionnaire

Le Professeur doit :
a) Faire le texte du questionnaire
b) Prévoir les réponses et leurs combinaisons
c) Faire les commentaires appropriés.

a) Le questionnaire : il doit essayer de bien cerner la notion à tester afin que les "mauvaises" réponses aient une signification.

Exemple : Question A
Bonne réponse (1) et (4) et (6)
Mauvaises réponses prévues (1) et (4)
(1) et (6)
(1) et (5)

b) Cartes branchements

Les cartes branchements servent à relier la réponse prévue aux numéros des commentaires à donner à l'élève.

Exemple :

Commentaires

Réponse	Message 1	Message 2	Message 3
1 - 4 - 6	n1	n2	
1 - 4	n3	n4	n2
1 - 6	n3	n5	n2
1 - 5	n3	n6	n2
autres réponses	n7	n2	

c) "Commentaires"

L'apparition, pour un élève, de la réponse (1 - 6) engendre l'impression des commentaires numéro n3, n5 et n2; on peut ainsi composer le texte du corrigé à base d'éléments standards de texte :

Exemple :

n1 "votre réponse est exacte"
n2 explication de la démarche qui mène à la bonne réponse.
n3 "votre réponse est inexacte"
n4 explicitent l'erreur commise
n5 (dans la mesure où la réponse prévue permet
n6 de trouver l'origine de la faute)
n7 "votre réponse n'est pas prévue, mais voici la bonne réponse "

Après un premier passage de ces questionnaires auprès d'élèves, on s'apercevra par exemple que la réponse non prévue (4) et (6) a été faite avec un pourcentage élevé, il est alors facile d'introduire une nouvelle carte "branchement" et un lot de commentaires appropriés.

A la limite, on devrait attendre l'ensemble des réponses des élèves et son analyse statistique, avant de prévoir les commentaires corrigés des réponses données, mais les délais de réponse rapide imposés par les élèves sont incompatibles avec la conception, la rédaction, la perforation et la mise en machine de ces divers éléments.

Ainsi, on voit que le questionnaire et ses "corrigés" devront évoluer et se perfectionner dans le temps au fur et à mesure des tests auprès des élèves.

V - Remarques

Il existe une version compressée du système qui n'envoie pas de commentaires mais donne la liste des réponses de chaque élève en établissant la statistique globale du questionnaire.

VI - Conclusion

(si on peut en donner une au baptême d'un système qui entre à l'Ecole Maternelle.)

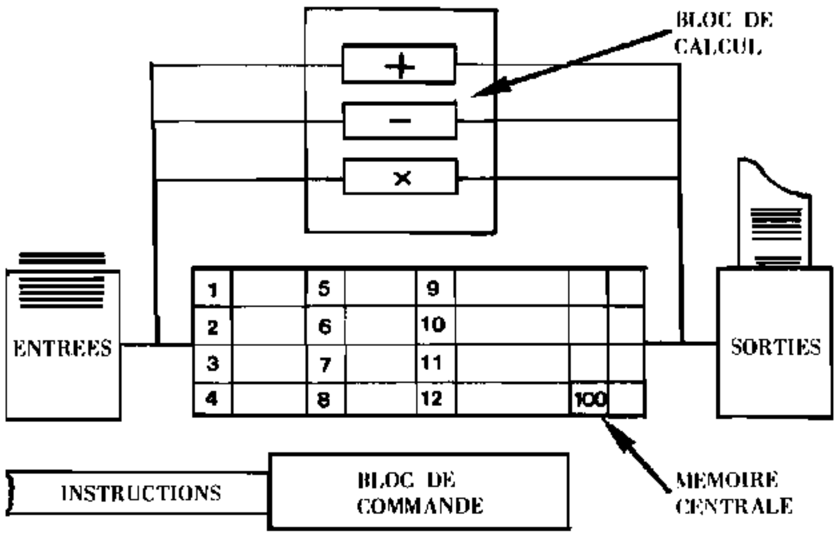
Instrument de contrôle des élèves (ou de l'enseignement du maître), le système xϕ vaut ce que valent les questionnaires et les corrigés écrits par le maître. Il a été conçu pour réaliser un genre de "ffed back" d'un cours télévisé, mais peut aussi tout modestement permettre, à peu de frais, au maître isolé de contrôler sa classe, de suivre chaque élève en vraie grandeur, de permettre même à chaque élève de se tester, chaque semaine, sur tel ou tel point...; restent les aléas et les délais des transmissions.

21 - O. B. E., un "ordinateur" pédagogique dans votre classe

par André POLY (E.N.S. de Saint-Cloud)

O.B.E., c'est d'abord un dessin animé 16 mm parlant (1) intitulé "Organisation générale d'une Calculatrice", réalisé il y a quatre ans par le centre audio-visuel de l'E.N.S. de Saint-Cloud. Dans ce film, un schéma animé mettait en évidence les grandes fonctions d'un ordinateur.

(1) Organisation générale d'une calculatrice distribué par SFRS 96, Bd Raspail Paris VIe



Très vite cependant, l'idée vint à son réalisateur de simuler le fonctionnement de cette machine schématique sur un véritable ordinateur. Cet ensemble pouvait permettre à des adultes de vérifier leur bonne compréhension du film en "programmant" la machine schématique et en recevant les résultats de cette programmation comme si la machine avait réellement existé.

C'est une assistante (2) aux sciences de l'éducation de l'Université de Paris X, intéressée par les méthodes actives, qui proposa de fabriquer une maquette en bois de la structure machine permettant aux élèves de manipuler les informations, l'un jouant le rôle du lecteur de cartes, l'autre le rôle de tel opérateur du bloc de calcul, etc... Les élèves, placés dans un contexte de découverte guidée, devaient être à même de comprendre les principes généraux de la programmation (notion d'adresse en particulier), et d'effectuer une première approche des concepts fondamentaux de l'informatique : notion d'algorithme, notion de modèle, codification de l'information, etc...

Un groupe de cinq étudiants (3) du C_3 de maîtrise des sciences de l'éducation s'est chargé de la réalisation de la maquette, de son utilisation en situation pédagogique, et de l'observation des réactions des élèves, tandis qu'une équipe de trois informaticiens (4) de l'E.N.S. de Saint-Cloud mettait au point le simulateur dont la description suit, ainsi qu'un modèle de cartes perfostyl (perforables à la main), permettant aux élèves de perforer eux-mêmes leurs programmes.

Cette première tentative faite auprès des enfants des classes de 4ème révèle que le système ainsi conçu est facilement utilisable, économique, et qu'il conduit à des exercices assez complexes (pluriel des noms en ou, simulation d'une caisse enregistreuse d'un monoprix), qui laissent espérer une expérimentation des plus intéressante.

---

(2) Melle Linard, Maîtrise des Sciences de l'éducation

(3) Melle A.M. Rabany, Mrs Lantenant, Machelot, Maladorno, Robert
(4) Mme Lemagnen, Mrs Carpentier et Poly

La meilleure façon de comprendre le fonctionnement d'O.B.E. consiste à détailler la structure d'une instruction et à analyser un petit programme. L'instruction type se présente comme suit :

1 – Lettre caractérisant l'opération ex : A pour addition	2 – Adresse du 1er opérande	3 – Adresse du 2ème opérande	4 – Adresse du résultat
φ	a_1	a_2	a_3

Une telle instruction engagée dans le bloc de commande, met en action l'opérateur d'addition, y envoie le contenu de l'adresse a_1 et de l'adresse a_3. Pour que cette calculatrice soit un ordinateur, il faut que l'ensemble des instructions soit enregistré en mémoire préalablement au traitement. Pour assurer l'enchaînement de ces instructions, il est donc nécessaire de préciser à quelle adresse il faut ranger l'instruction et à quelle adresse on trouvera l'instruction suivante. L'instruction prend alors la forme suivante :

A a_1 φ a_2 a_3 a_4 a_5

a_1 est l'adresse où est rangée l'instruction lors du changement de programme
φ est la lettre caractérisant l'opération
a_2 est l'adresse du 1er opérande
a_3 est l'adresse du 2ème opérande
a_4 est l'adresse où l'on doit ranger le résultat
a_5 est l'adresse de l'instruction suivante

Par exemple, voici un programme permettant de calculer la moyenne de trois nombres entiers quelconques.

– 001 L 010 ______ ______ 002

001 est l'adresse de la première instruction.

L signifie Lire (sous-entendu une carte sur laquelle figure le 1er nombre au lecteur de carte)

010 est l'adresse à laquelle il faut ranger le nombre lu.

002 est l'adresse de l'instruction suivante :

– 002 L 015 ______ ______ 003

(lire le 2ème nombre, l'envoyer en 015 et passer à l'instruction suivante rangée à 003)

– 003 L 020 ______ ______ 004

(lire le 3ème nombre, l'envoyer en 020 et passer à l'instruction suivante rangée à 004)

– 004 L 025 ______ ______ 005

(lire la constante 3, l'envoyer en 025 et passer à l'instruction 005)

– 005005 A 010 015 015 006
(additionner le contenu de 010 au contenu de 015, mettre le résultat en 015, passer à l'instruction 006)
– 006 A 015 020 015 007
(additionner le contenu de 015 au contenu de 020, mettre le résultat en 015, passer à l'instruction 007)
– 007 D 015 025 015 008
(Diviser le contenu de 015 par le contenu de 025 et ranger le résultat en 015, passer à l'instruction 008)
– 008 I 015 _____ _____ 009
Imprimer le contenu de 015 (sous-entendu à l'imprimante) et aller en 009.
– 009 FIN

Cette instruction signale que le programme est terminé.

L'intérêt d'une telle structure (programme enregistré en mémoire, enchaînement des instructions assuré au niveau de l'instruction) tient dans la possibilité de réaliser des débranchements conditionnels de la forme : "Si telle condition est réalisée, effectuer tel traitement, sinon effectuer tel autre".

Voici l'organisation d'une instruction de ce type en langage O.B.E. :

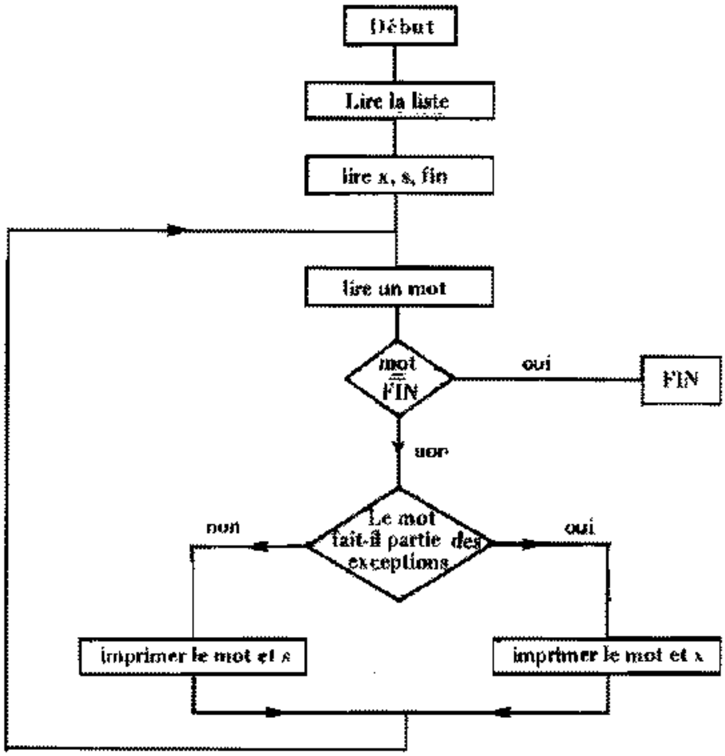
005	E	009	011	015	016
Adresse où doit être rangée l'instruction lors du changement de programme	Opérateur de comparaison (ici d'égalité) signifie il y a égalité entre :	le contenu de cette adresse et	le contenu de cette seconde adresse, prendre l'instruction suivante	à cette adresse	sinon, prendre l'instruction suivante à cette adresse

Nous avons maintenant les éléments nécessaires pour prendre en compte le problème du pluriel des noms en "ou" qui a été traité par les élèves lors de l'expérience de cette année, et qui présente l'avantage de ne pas être un exemple mathématique. Rappelons en effet qu'O.B.E 70 a des mots mémoires de 20 caractères alphanumériques, c'est-à-dire qu'il traite comme tout ordinateur qui se respecte aussi bien des nombres que des lettres. La règle d'orthographe que nous voulons faire appliquer à la machine est la suivante :

"Les noms terminés par "ou" prennent un s au pluriel sauf les suivants qui prennent un x : bijou, caillou, hibou, chou, genou, joujou, pou"

- On mettra à la suite du programme :
- 7 cartes contenant chacune un des mots exception
- 3 cartes contenant respectivement x, s, et FIN
- un paquet de cartes contenant chacune un mot dont on cherche le pluriel
- une carte contenant le mot FIN

Organigramme



Vous pouvez, en parcourant l'organigramme pas à pas, vérifier que la machine doit bien déterminer le pluriel de cette façon et essayer à titre d'exercice de rédiger le programme O.B.E. correspondant (supposez pour simplifier que la liste a été entrée de l'adresse 010 à 016, la lettre x en 017, la lettre s en 018 et le mot FIN en 019).

Il n'est pas possible dans le cadre d'un tel article de donner une idée exacte de la grande simplicité et des possibilités complètes de cet ensemble pédagogique. C'est pourquoi, il sera organisé à la rentrée prochaine et dans le courant de l'année des journées réunissant des enseignants intéressés, les concepteurs et les premiers expérimentateurs du système.

Si vous voulez des précisions supplémentaires à ce sujet vous pouvez envoyer votre nom et votre adresse à l'Ecole Normale Supérieure (Service Informatique), 3 avenue du Palais 92 St. Cloud et être ainsi tenus au courant de l'organisation de ces journées.

22 - Topologie dans le second cycle

par F. COLMEZ

Actuellement dans l'enseignement les notions topologiques sont sacrifiées au profit des notions algébriques. Il ne serait cependant pas difficile d'en dégager certaines par l'étude du plan.

Voisinage

La relation de voisinage entre individus, habitants d'une même maison, élèves d'une même classe n'est pas *transitive* : en général, le voisin de mon voisin n'est pas mon voisin. Cette constatation permet de dire que la mathématisation par une relation algébrique de la notion de voisinage n'est pas satisfaisante, car une telle mathématisation ne permet de répondre à la question "Paul est-il voisin de Pierre"?que d'une manière tranchée par oui ou par non. En réalité on souhaite plus de nuance, et on veut pouvoir considérer comme voisins les individus suffisamment voisins d'un voisin proche.

Ce que l'on veut, c'est apprécier le ***degré de voisinage***, bref comparer les paires d'individus.

Cette comparaison se fait aisément dans le plan euclidien grâce à la notion de distance : on peut dire que *a et b sont voisins d'ordre* ρ si $d(a, b) < \rho$.

En particulier, l'inégalité triangulaire $d(a, c) \leqslant d(a, b) + d(b, c)$ permet d'affirmer que a et c sont voisins d'ordre ρ dès que a et b d'une part, b et c de l'autre sont voisins d'ordre $\rho/2$.
La notation suivante est utile :
boule de centre a et de rayon ρ : $B(a,\rho) = \{x ; d(x,a) < \rho\}$.

Frontière intérieur - extérieur

Qu'est-ce qui permet d'affirmer qu'on est à l'intérieur d'un pays plutôt qu'à la frontière de celui-ci ? C'est que, dans le premier cas, on peut se déplacer dans toutes les directions en restant dans le pays *si on ne va pas trop loin*, tandis que dans le second cas, on peut soit sortir du pays, soit y rester selon la direction choisie, *même si on ne va pas loin*.

On peut traduire ceci dans le plan euclidien F.
Soit A une partie de F ($A \neq \phi$ et $A \neq F$)
Soit x un point fixe de F et ρ un réel positif. Considérons la boule $B(x,\rho)$, A et $\complement A$. Nous avons à priori les 4 possibilités exclusives suivantes :

(1) $B(x, \rho) \cap A = \phi$ et $B(x,\rho) \cap \complement A = \phi$
(2) $B(x,\rho) \cap A \neq \phi$ et $B(x,\rho) \cap \complement A = \phi$
(3) $B(x, \rho) \cap A = \phi$ et $B(x, \rho) \cap \complement A \neq \phi$
(4) $B(x, \rho) \cap A \neq \phi$ et $B(x, \rho) \cap \complement A \neq \phi$

(1) est exclue car $B(x, \rho) = [B(x, \rho) \cap A] \cup [B(x, \rho) \cap \complement A] = \phi \cup \phi = \phi$
or $B(x, \rho) \neq \phi$
Si (2) est vraie pour ρ et si $\rho' < \rho$ (2) est vraie pour ρ' également.
On dit alors que *x est point intérieur* à A. En fait $B(x, \rho) \cap \complement A = \phi$ est équivalent à $B(x, \rho) \subset A$ et aussi à $B(x, \rho) = B(x, \rho) \cap A$.

En langage imagé : tout point de F suffisamment voisin de x est un point de A.
. Si (3) est vraie pour ρ, x est un point intérieur de $\complement A$, on dit que *x est un point extérieur* de A.

Si (4) est vraie pour ρ, deux cas sont à envisager :
α)(4) n'est plus vraie pour un $\rho' < \rho$ on est soit dans le cas (2), soit dans le cas (3) pour ρ'. β)(4) est vraie pour tous les $\rho' < \rho$ et finalement (4) est vraie pour tout $\rho > 0$, *x est dit point frontière de A.*

On voit immédiatement que les points frontières de A sont aussi les points frontières de $\complement A$; A et $\complement A$ ont même frontière

$$F_r(A) = F_r(\complement A)$$

Ces définitions "collent" bien avec l'intuition, mais nous allons voir un exemple incitant à la prudence dans le maniement de celle-ci.

Exemple

Soit A la partie de $\mathbf{R}^2$ suivante :

$A = \{ (x, y) ; x \in \mathbf{Q} \text{ et } y \in \mathbf{Q} \text{ et } x^2 + y^2 < 1 \}$

$F_r(A) = \{ (x, y) ; x \in \mathbf{R} \text{ et } y \in \mathbf{R} \text{ et } x^2 + y^2 \leqslant 1 \}$

Adhérence

Cette notion est moins usuelle que celle de frontière, elle s'obtient en décomposant celle-ci.

Définition

x est adhérent à A si $\forall \rho > 0, B(x, \rho) \cap A \neq \phi$

En particulier, tout point de A est adhérent à A; l'ensemble des points adhérents à A se note $\bar{A}$, c'est l'adhérence de A. On a $A \subset \bar{A}$.

Un point frontière de A est un point adhérent à la fois à A et a $\complement A$.

$F_2(A) = \bar{A} \cap \overline{\complement A} = F_2(\complement A)$

Continuité - Discontinuité

La locution "déformation continue" était, il n'y a pas si longtemps, utilisée dans le second cycle sans autre présentation qu'intuitive (déformation continue des trièdres).

Intuitivement, on oppose la déformation continue d'une membrane de caoutchouc à son déchirement.

Il peut être intéressant de mathématiser d'abord le déchirement pour obtenir la définition de la discontinuité, puis par négation la définition de la continuité; il faut alors vérifier que celle-ci "colle" bien avec l'intuition.

Soit alors une membrane schématisée par un disque de centre 0 et de rayon 1; avec une épingle nous perçons un trou au milieu; sous l'effet de la tension le trou se dilate, la membrane peut alors être schématisée par une couronne circulaire:

$\{a < x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cup \{f(0)\}$

Il faut bien donner à O une image, on peut supposer que f(O) est un point du cercle de centre O et de rayon a.

L'application f est définie ainsi : l'image par f d'un point du disque situé à la distance r de O, est le point du même rayon situé à la distance $\varphi(r)$ de O; l'application φ de $]0,1]$ sur $]a,1]$ étant (continue) croissante.

Toute boule de centre O a pour image par f une couronne de centre O et par conséquent n'est pas incluse dans la boule.

B(f(0),ϵ) si ϵ est assez petit ($<2a$)

On a donc $\exists\epsilon>0, \forall\rho>0, f<B(0,\rho)>\not\subset B(f(0),\epsilon)$

Par négation, la définition de la continuité d'une fonction g au point x_0 sera :

$\forall\epsilon>0, \exists\rho>0\ g<B(x,\rho)>\subset B(g(x_0),\epsilon)$

Remarque

La restriction de f au disque pointé (diminué de 0) est une application continue; mais il n'est pas possible de prolonger cette restriction en choisissant différemment l'image de 0 de manière à obtenir une application continue.

Limite

Cette remarque peut permettre d'introduire la notion de limite en x_0 d'une application définie sur une partie A de F quand x_0 est adhérent à A.

Conclusion

L'unanimité s'est faite dans le groupe pour estimer que, sans préjuger du reste, la notion de limite de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou mieux de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$) présentée à l'aide de bases de voisinages, serait plus accessible aux élèves et plus commode à tout point de vue.

23 - La formation permanente

par Maurice GLAYMANN, directeur de l'I.R.E.M. de Lyon

Il faut distinguer trois types de formation des maîtres : la *formation initiale* confiée à l'Université ou aux Ecoles Normales, le *recyclage* provisoire mais utile pendant une période où interviennent d'importants changements de programmes et enfin la *formation permanente*, essentielle aujourd'hui, compte tenu d'une part de l'évolution de la mathématique, des disciplines et techniques utilisant la mathématique, et d'autre part de la recherche pédagogique ; l'une et l'autre doivent conduire à rendre de plus en plus efficace le contenu et les méthodes de notre enseignement.

La formation permanente, confiée aux I.R.E.M., doit permettre à tous les maîtres, dans le cadre de leur service, de repenser périodiquement les fondements de leur enseignement. Il est fondamental que cette formation prenne appui sur une recherche systématique : des expérimentateurs hautement qualifiés tant du point de vue mathématique que pédagogique, travaillant en équipes avec des mathématiciens et des psychologues, doivent être habilités à faire de la recherche dans des classes. Leur rôle est de mettre en évidence les concepts efficaces et féconds et d'indiquer les voies pédagogiques pour introduire à un niveau donné ces concepts. L'idéal serait évidemment que les expérimentateurs soient aussi formateurs, sans que pour autant ce type d'activité devienne un métier.

Il est bon de redire ici que, jusqu'à présent, la plupart des I.R.E.M. existants se sont limités à la phase de recyclage des maîtres, et qu'une fois cette mission achevée, il faudra passer au stade de la formation continue ; cependant, il est devenu urgent de créer un I.R.E.M. par Académie afin de ne pas accentuer le déséquilibre grave au niveau de la formation des maîtres.

L'A.P.M. doit jouer ici un rôle prépondérant en créant dans ses régionales des structures qui permettront la mise en place rapide d'I.R.E.M. actifs. Une autre tâche de notre Association est d'étudier et de définir avec l'ensemble des Collègues ce que devra être la formation permanente.

24 - Travail sur fiches et par équipes Description de la méthode, rôle de l'enseignant Discussion à partir de documents

par une équipe de professeurs
du C.E.S. expérimental de Montmorillon

1. *Cadre de travail*

Le C.E.S. de Montmorillon est chargé d'expériences par l'I.N.R.D.P. avec protocole expérimental. A l'initiative d'un groupe de professeurs et du chef d'établissement qui désirait travailler dans cette direction, le travail expérimental a débuté pendant l'année scolaire 1966-1967. L'expérience fonctionne dans le cadre du C.E.S. et pour toutes les disciplines.

L'effectif du lycée et du C.E.S. est de 1000 élèves.

L'établissement possède des moyens importants : laboratoire de langues, magnétoscope, cinquante machines à calculer Olivetti P 20, etc... Le papier et les stencils sont fournis par le C.R.D.P. Une secrétaire est à la disposition des équipes.

2. *Répartition des élèves*

Les conseillers d'O.S.P. font passer des tests d'aptitude et de connaissance aux élèves en fin de C.M.2. Puis ceux-ci sont répartis en groupes de niveau, mobiles, en mathématique, français, langue vivante et en groupes hétérogènes pour les autres disciplines. Chaque classe comporte deux unités de 96 élèves au maximum. Chaque unité contient quatre groupes de 24 élèves au plus ; il n'y a donc pas de dédoublement en travail dirigé. Quatre professeurs de français, de mathématique, de langue vivante, etc..., sont nécessaires par unité. Chaque groupe étant homogène, travaille suivant le rythme qui lui est propre. Tous les élèves d'une unité ont mathématique, par exemple, à la même heure. La constitution des groupes peut varier constamment (professeurs et élèves) ; ainsi un tiers de l'effectif a changé de groupe en cours d'année. D'autre part, un élève peut appartenir au groupe x de français et y de mathématique (x différent de y).

Tous les élèves font le même programme sur le même fichier avec un décalage dans le temps, d'où :

- suppression de la notion de classe de 6ème, 5ème, etc...
- continuité sur les quatre années du C.E.S.
- suppression du redoublement sauf cas exceptionnels
- possibilité de faire une 5ème année pour terminer le 1er cycle
- suppression des classes de transition.

L'équipe de mathématique comprend tous les professeurs d'un C.E.S. : PEGC, certifiés, maîtres de transition. La répartition suivant les différents groupes se fait en équipe sans tenir compte des titres administratifs.

L'horaire de mathématique est de quatre heures, dont une heure consacrée au calcul numérique sur machine. Dans chaque unité les deux groupes les plus lents ont une heure supplémentaire de travail dirigé sous la surveillance d'un professeur. Suivant les besoins, des élèves des autres groupes peuvent bénéficier de cette heure de façon temporaire. Cette heure existe en français et langue vivante.

3. *Travail sur fiches et par équipes en mathématique*

Les élèves sont répartis en groupes autonomes de quatre et travaillent uniquement sur fiches. En 6e/5ème il n'y a pas de séances collectives.

Les fiches élaborées par les enseignants du C.E.S. sont conçues pour favoriser le travail en équipe des élèves.

Exemple : fiche B 7 (en annexe).

Ⓢ Chaque élève de l'équipe étudie des situations différentes mais introduisant le même concept. Ce travail est *individuel* . Chaque élève choisit un exercice noté I, II, III ou IV.

Ⓒ *Collectif :* travail en équipe, confrontation, élaboration d'un énoncé, classement, formalisation du concept à partir des expériences individuelles, etc...

En général il est demandé à l'équipe, dans la fiche, de faire contrôler par le professeur le résultat obtenu. Celui-ci ne donne pas le résultat : il accepte, dialogue ou refuse. La correction des exercices n'est jamais faite en dehors de l'équipe concernée. Il est très important que l'élève découvre lui-même, à l'occasion d'un exercice, ses erreurs sur son cahier. S'il fait trop d'erreurs, il est vite contrôlé par les membres de son équipe. D'autre part, le maître n'impose jamais *sa* formalisation, il accepte un résultat si mathématiquement il est correct et s'il est écrit dans un français acceptable. Pour permettre une utilisation ultérieure du fichier, certaines définitions figurent sur la fiche mais jamais au même endroit que l'apprentissage :

Exemple : B 7 : étude et formalisation par l'équipe de la notion d'application.
B 8 : début : définition d'application.

La fiche $x+1$ (x entier) n'est fournie à une équipe que lorsque la fiche x est terminée.

Les équipes restent fixes pendant l'étude d'un chapitre : durée variable de un à deux mois. A la fin de chaque chapitre un brassage obligatoire est effectué dans chaque groupe afin de permettre à chaque élève de travailler avec tous les autres élèves. Des travaux annexes sont alors nécessaires pour ramener toutes les équipes d'un groupe au même point.

Les élèves sont habitués à chercher des renseignements dans leur fichier et leurs cahiers qui restent dans la salle de classe.

Tout le travail (en 6e/5e) est fait au C.E.S. Parallèlement il est fait un travail libre sur l'initiative des élèves, ainsi un groupe de 5ème fait une étude statistique sur un test d'élèves de 4ème.

Tous les élèves d'une classe ont le même test de fixation, avec une notation commune. Cela pose un problème car les élèves les plus rapides ont étudié la question très longtemps avant le test. Les enseignants ont un projet de test systématique trois semaines après que l'équipe ait vu la question à contrôler. La notation utilisée est la notation A.B.C.D.E.

4. *Programme. Elaboration de la fiche*

Pour l'instant il y a un brassage du programme sur deux années : 6ème et 5ème (projet 6ème à 3ème). Il serait souhaitable d'avoir un programme "noyau" assimilable par tous les élèves avec liberté aux équipes d'enseignants d'étudier des prolongements suivant leurs goûts et les intérêts de leurs élèves.

Un collègue se charge de l'élaboration d'un chapitre, puis le soumet à discussion en équipe. A cet effet deux heures chaque semaine sont prévues dans l'emploi du temps pour ce travail de concertation. Les fiches sont, bien sûr, améliorées après usage.

Conclusion

Il est évident que le rôle du professeur est modifié. Il devient un *animateur* à la disposition des équipes. Celles-ci ne travaillant pas au même rythme il n'a jamais à intervenir simultanément dans les six équipes, ou collectivement.

La présence des professeurs stagiaires a permis de réaliser des expériences d'observation du comportement des enseignants dans ce nouveau rôle (six enseignants pour quatre groupes ; deux observateurs avec permutation).

Nous donnons en annexe deux chapitres du fichier :

1) de B 7 à B 11 (début de la classe de sixième) : *application et application bijective.*

2) de F-1 à F-7 (début de la classe de cinquième) : *produit cartésien.*

B–7 - CLASSE DE SIXIEME (1970-1971)

1) Prends des fichettes sur le bureau. Choisis tes relations (I, II, III ou IV).

Sur une fichette complète la représentation *sagittale* de chacune de tes relations – *N'écris rien* dans les *colonnes* placées à côté des patates.

Ensuite, sur la même fichette mais *derrière,* complète la représentation cartésienne.

Ⓢ I)

a) Elise est née au mois de Juin, Paul est né au mois de Janvier, Amélie en Avril, Robert en Août, Charlotte en Mars, Denis en Septembre.

b) Charlotte vit à la campagne, Denis vit à la mer, Elise et Amélie vivent à la montagne, Paul et Robert vivent à la campagne.

c) Pendant les dernières vacances, Elise a séjourné deux semaines au moins au Mexique, Charlotte a séjourné deux semaines au moins en Italie et Denis en Suisse. Paul, Amélie et Robert ne sont pas partis à l'étranger. Personne n'est allé en Espagne.

d) Denis porte des sandales, Elise porte des bottes, Robert porte des tennis et Paul des souliers.

e) Elise a passé ses vacances en France et au Mexique, Paul, Amélie et Robert ont passé leurs vacances en France. Charlotte a passé ses vacances en France, en Italie et en Suisse. Denis est allé en France puis en Suisse.

f) Paul regarde la télé souvent de même que Denis. Elise, Anne et Charlotte la regardent parfois, Robert jamais.

II)

a) Paul aimerait exercer la profession d'ingénieur de même que Robert. Elise aimerait exercer la profession d'infirmière. Charlotte aimerait être hôtesse de l'air et Denis professeur. Aucun enfant ne veut être pilote ou médecin. Amélie n'a pas d'idée.

b) Elise achète chaque semaine Lisette, Paul achète chaque semaine Spirou, Amélie achète Mickey, Robert achète Tintin, Charlotte Tout l'univers et Denis Pilote.

c) Elise voudrait visiter la Chine, Robert et Denis voudraient visiter l'Espagne. Paul et Amélie voudraient visiter l'Italie et Charlotte l'Angleterre.

d) Paul est allé souvent en colonie de vacances de même que Charlotte. Robert, Amélie et Denis sont allés en colonie de vacances une fois. Quant à Elise, elle n'y est jamais allée.

e) Denis pratique le football. Amélie et Charlotte pratiquent l'athlétisme. Robert pratique trois sports : le basket, le rugby et l'athlétisme. Elise pratique le basket et l'athlétisme. Paul ne fait pas de sport.

f) Les enfants sont malades, Robert a la rougeole, Paul a la coqueluche, Elise a la grippe, Amélie a les oreillons, Charlotte a une bronchite et Denis a la rubéole.

III)

a) Robert est né à Lille, Elise à Poitiers, Denis à Paris, Paul à Lyon, Amélie à Marseille et Charlotte à Nantes.

b) Elise est montée en avion une fois, de même que Paul et Robert. Amélie n'est jamais montée en avion, comme Charlotte et Denis. Aucun n'y est monté souvent.

c) Au marché, Elise a acheté des bananes, Robert a acheté du pain et Charlotte de la viande.

d) Tous les enfants vont à l'école. Amélie a la qualité d'externe. Elise et Robert ont la qualité d'interne, Paul, Charlotte et Denis sont demi-pensionnaires.

e) Robert joue avec un mécano, Elise et Amélie avec une poupée, Paul avec un train électrique. Charlotte et Denis ne jouent avec aucun de ces jouets.

f) Robert aime jouer de l'harmonica et de la trompette. Charlotte aime jouer du piano comme Elise qui joue aussi de l'harmonica. Denis joue de l'harmonica, du piano et de l'accordéon. Paul et Amélie ne sont pas musiciens.

IV)

a) Elise est âgée de 13 ans, Amélie est âgée de 11 ans. Paul a 12 ans, Robert 10 ans, Denis 8 ans et Charlotte 9 ans.

b) Pendant les vacances Denis a visité Paris. Elise a visité Paris, Londres et New York. Amélie a visité Paris, Robert a visité Paris et Montmorillon. Aucun enfant n'a visité Bordeaux. Paul et Charlotte n'ont visité aucune des villes précédentes.

c) Amélie va au cinéma parfois. Elise et Robert y vont souvent, Paul, Charlotte et Denis jamais.

d) Robert boit du lait, Paul du jus d'oranges et Denis de l'eau.

e) Elise préfère étudier les Sciences Naturelles. Paul préfère étudier le dessin. Amélie préfère le français, Charlotte et Robert la mathématique. Denis préfère l'histoire. Aucun des enfants ne préfère la géographie.

f) Robert aime la couleur jaune. Elise et Charlotte aiment la couleur indigo. Amélie aime le rouge et Paul le marron. Denis n'a pas de préférence et personne n'a choisi l'orange.

2) Sur la représentation sagittale de *chacune* de tes relations, écris, dans la colonne de *gauche*, le nombre de flèches partant de *CHAQUE ELEMENT* de l'ensemble de départ.

© 3)

a) Mettez toutes vos fichettes en commun. A l'aide des chiffres de la colonne de gauche sur chaque représentation sagittale, classez les relations en *DEUX* groupes.

Montre le résultat au professeur.

b) Ecris la particularité de chaque groupe.

B-8 - CLASSE DE SIXIEME (1970-1971)

1) Tu viens de classer les relations en *deux* groupes. Voici les noms des relations de chaque groupe.

VOCABULAIRE :

APPLICATION : de *CHAQUE* élément de l'ensemble de *DEPART*, part *UNE SEULE* flèche.
Une relation qui *n'est pas* une application est appelée une *NON-APPLICATION*.

Réserve dans ton cahier, *trois* pages non écrites *à la suite*.

Prends *une* fichette représentant une relation qui est une *non-application*, colle-la à l'aide d'un morceau de scotch sur la première page. En titre tu écris : Relation - non-application.

N'écris rien sur *les deux pages suivantes*.

© 2)

a) Partagez-vous les fichettes représentant *des applications*.

b) Sur la représentation sagittale de *chacune* des applications, écris dans la colonne *de droite*, le nombre de flèches arrivant à *CHAQUE ELEMENT* de l'ensemble d'arrivée.

c) Remettez en commun toutes les fichettes *que vous venez de compléter*.

A l'aide des chiffres de la colonne de droite, classez les applications en *DEUX* groupes.

Montre le résultat au professeur.

d) Ecris la particularité de chaque groupe.

B-9 - CLASSE DE SIXIEME (1970-1971)

1) Tu viens de classer les *applications* en *deux* groupes. Voici les noms des applications de chaque groupe :

VOCABULAIRE :

APPLICATION BIJECTIVE (ou BIJECTION) : à *CHAQUE* élément de l'ensemble d'*ARRIVEE* arrive *UNE SEULE* flèche. Une application qui n'est pas bijective conserve le nom *d'application.*

a) Prends *une* fichette représentant une *application*, colle-la avec un morceau de scotch sur la deuxième page.
En titre tu écris : Relation - Application.

b) Prends *une* fichette représentant une *application bijective*, colle-la sur la troisième page.
En titre tu écris : Relation - Application bijective (ou bijection)

2) a) Regarde la fichette collée représentant une *application*.
Regarde la représentation cartésienne.
Ecris dans le cadre placé en haut, le nombre de croix tracées dans chaque *colonne*.

© b) Comment reconnais-tu une application sur une représentation cartésienne ?

3) a) Sur la représentation cartésienne de la fichette représentant une non *application*, écris dans le cadre placé en haut, le nombre de croix tracées dans *chaque colonne.*

© b) Comment reconnais-tu une non-application sur une représentation cartésienne ?

4) a) Sur la représentation cartésienne de la fichette représentant une *application* bijective, écris dans le cadre placé en haut, le nombre de croix tracées *dans chaque colonne*, puis dans le cadre de droite le nombre de croix tracées *dans chaque ligne.*

© b) Comment reconnais-tu une application bijective sur une représentation cartésienne
Montre tes réponses au professeur.

5) a) Pour savoir *le nom* d'une relation quelle première question dois-tu te poser ?

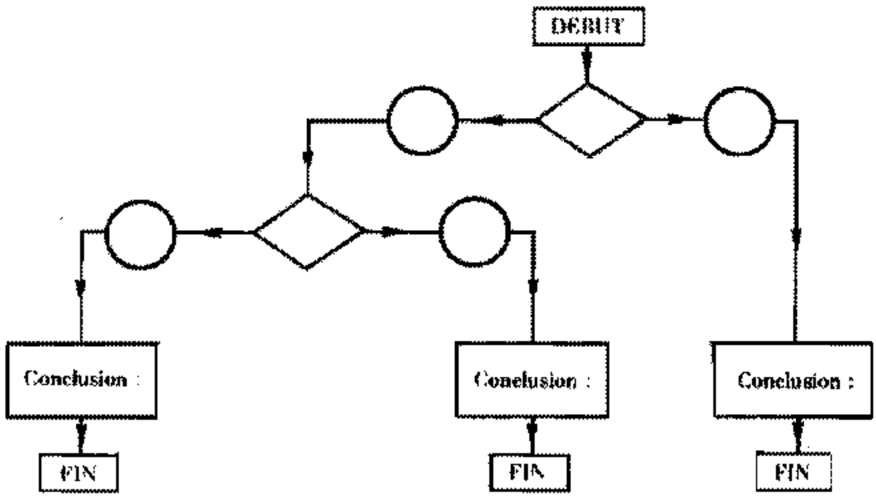
b) Si la réponse est *non* : Quel est *le nom* de la relation ?

c) Si la réponse est *oui* : Quelle deuxième question dois-tu te poser ?

d) Si la réponse à cette question est *non* : Quel est *le nom* de la relation ?

e) Si la réponse à cette question est *oui* : Quel est *le nom* de la relation ?

6) Voici un dessin appelé ORDINOGRAMME (quel nom barbare !) : il résume ce que tu as fait à l'exercice 5, recopie-le et complète-le :



Indications :

a) Dans les cases ◇ tu écris les questions.

b) Dans les cases ○ tu écris OUI ou NON

c) Dans les cases ▭ tu écris le résultat.

d) Pour lire l'ordinogramme *tu commences* par la case *DEBUT* puis tu suis les flèches jusqu'au mot FIN en lisant au passage ce qui est écrit dans les cases traversées.

B–10 - CLASSE DE SIXIEME (1970-1971)

1) a) Recopie le tableau suivant :

	Application	Non-application	Application bijective
relation fiche B 3 ex 3 a			
relation fiche B 4 ex 1			
relation fiche B 6 ex 2 a			
relation fiche B 6 ex 7			

b) Recherche *les représentations sagittales* des relations indiquées *dans le tableau.*

Pour *chaque* relation répond, *dans le tableau,* par OUI ou par NON aux questions suivantes :

a) est-ce une application ?
b) est-ce une non-application ?
c) est-ce une application bijective ?

2)

a) Recopie le tableau suivant :

	Application	Non-application	Application bijective
relation fiche B 4 ex 3			
relation fiche B 6 ex 4			
relation fiche B 5 ex 5			

Ⓢ 3) Choisis une des fiches "Annexes B 1" I, II, III ou IV.

a) Complète chaque colonne en indiquant le nombre de flèches ou de croix, pour chaque élément.

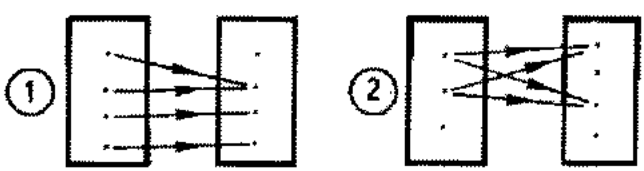
b) Ecris sous chaque représentation le *nom* de la relation.

4) Utilise l'ordinogramme de la fiche B-9, pour écrire sous chaque représentation de la fiche "Annexe B-2", le *nom* de la relation.

5) Sur la fiche "Annexe B-3", complète chaque représentation pour obtenir la relation qui est indiquée dessous.

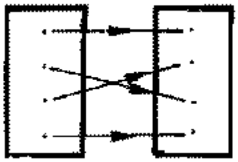
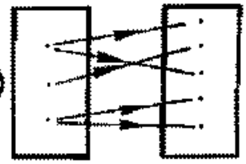
B–11 - CLASSE DE SIXIEME (1970-1971)

1°) Les représentations sagittales des relations suivantes sont incomplètes. L'ensemble de départ est un ensemble de personnes, l'ensemble d'arrivée aussi. L'une a pour lien verbal "a pour soeur", l'autre "a pour mère". Dessine ces représentations *et place correctement le lien verbal.*



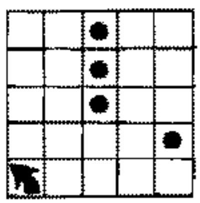
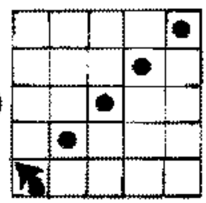
2°) L'ensemble de départ est un ensemble de départements et l'ensemble d'arrivée un ensemble de villes. Les liens verbaux *à placer* sont : "a pour préfecture" et "a pour sous-préfecture."

Recopie et *complète les représentations suivantes :*

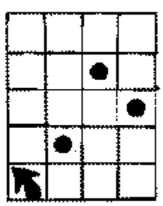
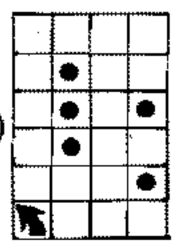
3

4


3°) Les relations des exercices 1 et 2 sont numérotées. Indique pour chacune dans quelle catégorie elle se place. *Explique* ta réponse.

4°) Les représentations cartésiennes des relations suivantes sont incomplètes. L'ensemble de départ est un ensemble de villes, l'ensemble d'arrivée un ensemble de personnes.
Les liens verbaux *à placer* sont : "a pour maire" et "a pour conseiller municipal". Recopie et complète les représentations :

5

6


5°) a) L'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont des nombres naturels. Les liens verbaux *à placer* sont "est un diviseur de" et "est la moitié de". Recopie et complète les représentations :

7

8


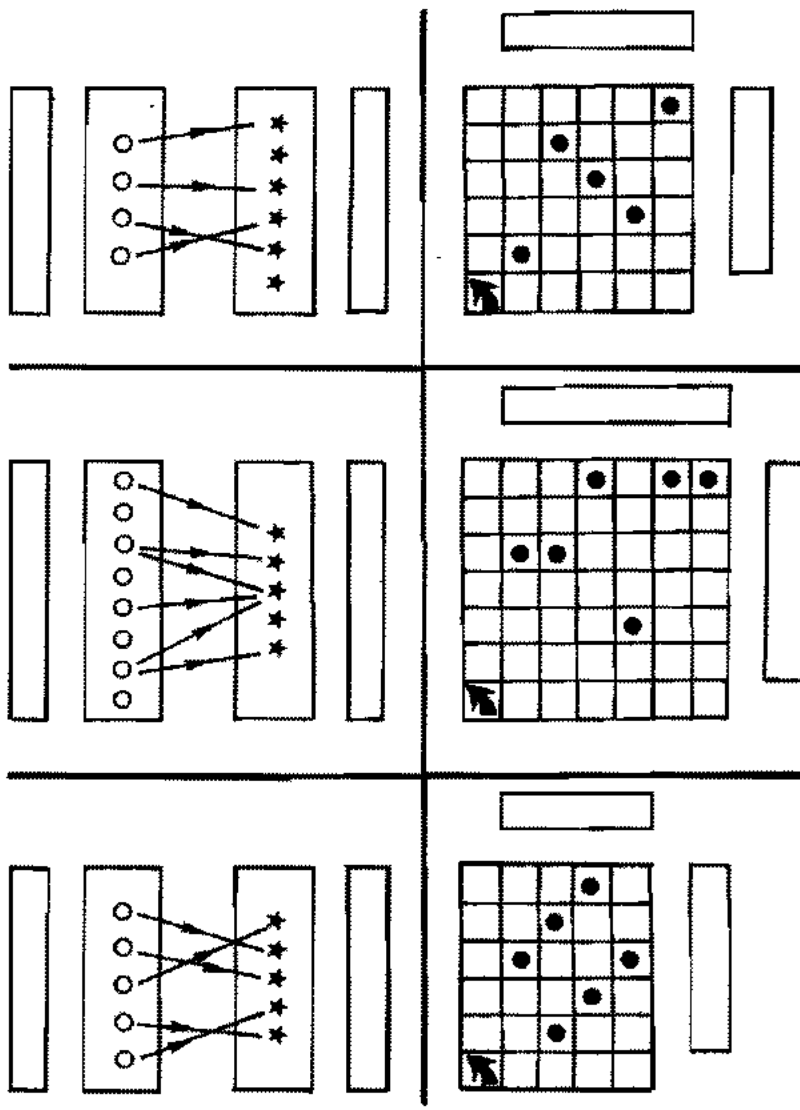
b) Complète ces représentations par des nombres naturels qui conviennent.

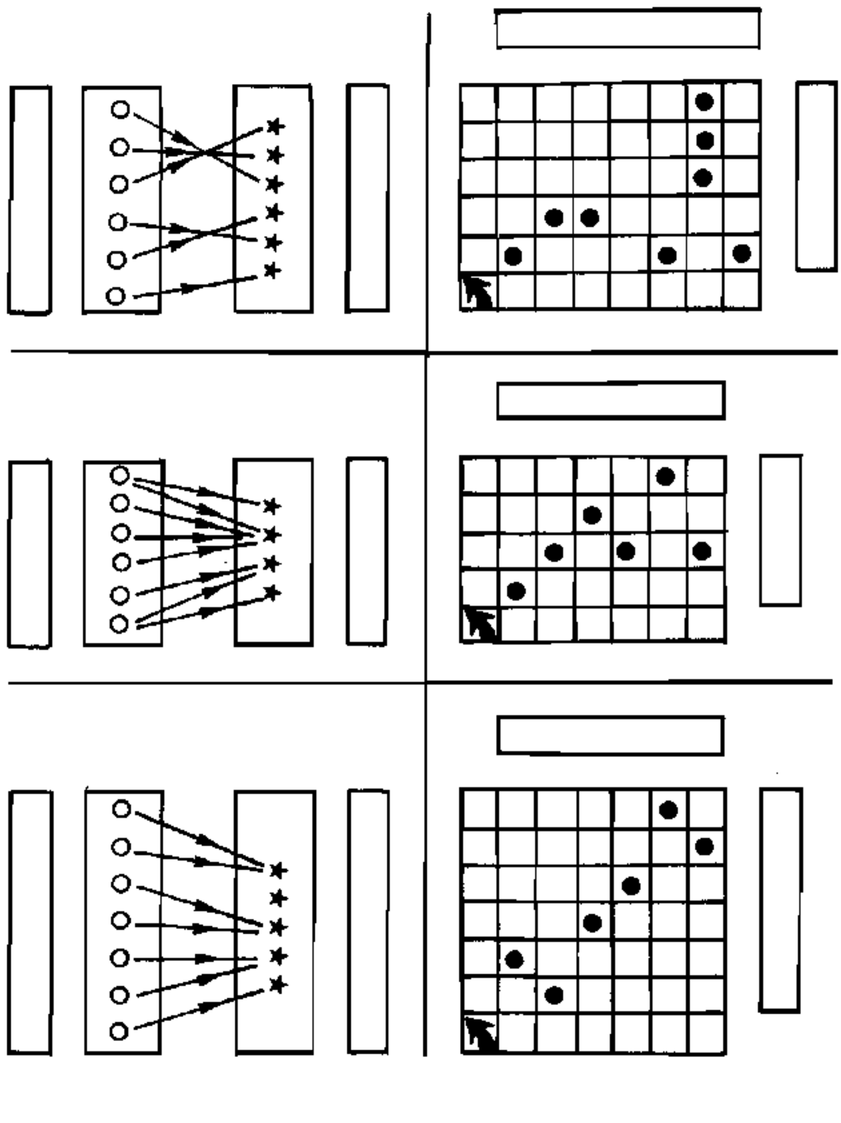
6°) Les relations des exercices 4 et 5 sont numérotées. Indique pour chacune dans quelle catégorie elle se place. *Explique* ta réponse.

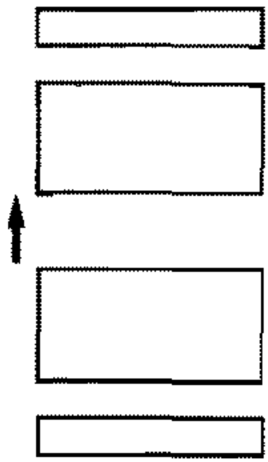
7°) Dessine un diagramme représentant l'ensemble des relations, l'ensemble des applications et l'ensemble des non-applications, si tu ne sais pas répondre tu peux regarder la fiche A12 exercice 2.

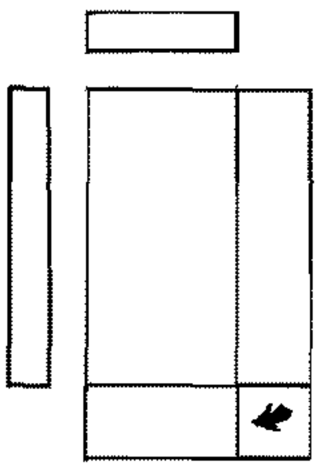
8°) Dessine un diagramme représentant l'ensemble des relations, l'ensemble des applications et l'ensemble des applications bijectives.

B–I - CLASSE DE SIXIEME (1970-1971)

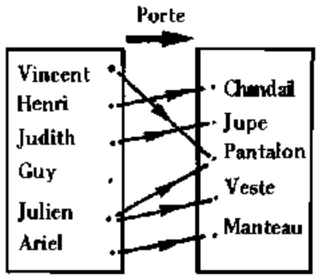






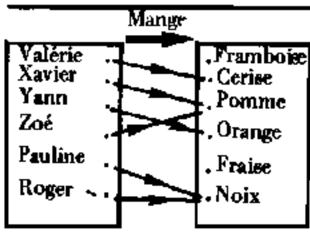


B–2 - CLASSE DE SIXIEME (1970-1971)



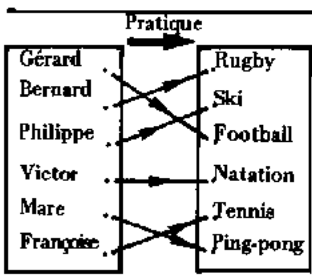
Joue

Poker					●	
Crapette			●			
Manille				●		
Bataille						●
Belotte	●					
Bridge		●				
	Jim	Gilles	Bill	Ruth	Yves	Eve



Habite

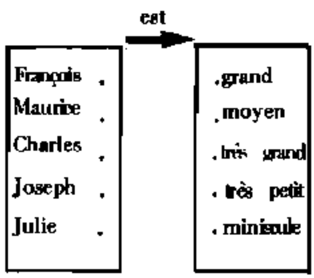
Lille		●				
Brest			●		●	
Lyon	●			●		●
Paris						●
	Cécile	Hélène	Nicole	Sophie	Line	Josette



Porte

Melon					
Foulard					●
Bonnet		●		●	
Casquette	●				
Béret			●		
	Luc	Yves	Paul	Jacques	Elise

B–3 - CLASSE DE SIXIEME (1970-1971)

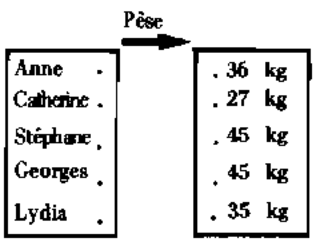


Application

est occupé à

démonter					
découper					
construire					
coller					
réparer					
	Jim	Nick	Ted	Dol	Ralph

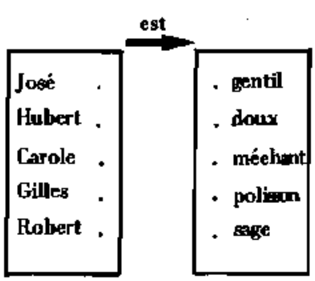
Non application



Application bijective

timbres				
légumes				
Vêtements				
Livres				
	Fernand	Lisa	Jules	Denise

Application bijective



Non application

mesure

1m57				
1m29				
1m72				
1m53				
1m47				
	Paul	Raoul	Berthe	Suzon

Application

F–1 - CLASSE DE CINQUIEME (1970-1971)

1)

a) Voici une date importante pour les enfants de France : le 25 Décembre. Nous la notons : (25 ; 12).

VOCABULAIRE : (25;12) s'appelle un COUPLE

Voici une autre date importante en France : (14;7). Quelle est cette date ?

b) Ecris de la même façon ta date de naissance.

c) Voici deux dates : (1;5) et (5;1) Quelle est la plus remarquable ? Pourquoi ?

d) Les couples (1;5) et (5;1) ne donnent pas le même renseignement. Ils sont donc *différents :*

VOCABULAIRE : (1;5) est le COUPLE COMMUTE de (5;1)

Quel est le couple commuté de (2;11) ?

e) Ecris un couple. Ecris son commuté.

2) Dans les HLM de Montmorillon (cité des Varennes), chaque escalier d'un bâtiment est désigné par une lettre.
L'ensemble des noms des escaliers du dernier bâtiment est :
$P = \{E ; F ; G ; H\}$
Pour chaque escalier il y a huit appartements numérotés de 1 à 8.

a) Ecris l'ensemble Q des numéros des appartements d'un escalier.

b) Monsieur Dupont habite dans l'escalier E appartement 3. Son adresse est notée par le couple (E ; 3)

Où habite la personne dont l'adresse est notée (H ; 5) ?

c) Ecris, sous forme de couple, les adresses de toutes les personnes habitant dans ce bâtiment.

d)

VOCABULAIRE : L'ensemble des couples obtenus s'appelle le *PRODUIT CARTESIEN de l'ENSEMBLE P par l'ENSEMBLE Q.*

NOTATION : $P \times Q$ qui se lit "P croix Q"

Traduis en langage mathématique puis à l'aide des symboles le lien existant entre :

(E ; 3) et $P \times Q$
(I ; 7) et $P \times Q$
(H ; 6) et $P \times Q$
(5 ; G) et $P \times Q$

F–2 - CLASSE DE CINQUIEME (1970-1971)

Voici un extrait d'un catalogue d'un magasin de vente par correspondance, chaque élève de ton équipe choisit un modèle de vêtement désigné par une lettre majuscule.

Ⓐ *Le ciré maxi :*
Réf 031 2453 : Marron
Réf 031 2450 : Noir

Tailles	150	156	162	168	174
Prix	87	90,50	94	97,50	101

Ⓑ *La chemisette polo :*
Réf 261.4296 : vert
Réf 261.4299 : camel
Réf 261.4292 : bleu

Tailles	150	162	174
Prix	30	30	30

Ⓒ *Le pull col roulé :*
Réf 261.4288 : bleu
Réf 261.4281 : chaudron
Réf 261.4287 : noir
Réf 261.4284 : bleu roy

Tailles	150	162	174
Prix	19	19	19

Ⓓ *Le jean :*
Réf 201.1907 : beige
Réf 201.1901 : brique
Réf 201.1904 : bleu

Tailles	156	162	168	174
Prix	55	55	55	55

Ⓢ 1)

a) Pour le modèle que tu as choisi, écris la liste des éléments de l'ensemble A des tailles proposées.

Ecris la liste des éléments de l'ensemble B des coloris proposés.

b) Tu vas écrire l'ensemble de *toutes* les possibilités offertes pour habiller des enfants avec le modèle que tu as choisi, sous forme d'un produit cartésien, *pour cela :*

choisis le premier ensemble
choisis le second ensemble
écris la liste des éléments du produit cartésien.

c) Entoure en rouge dans la liste le couple représentant le vêtement que tu choisirais pour toi.

Dans quel ensemble est pris le premier terme de ce couple ?

Dans quel ensemble est pris le second terme du couple ?

C2)

a) Comment appelle-t-on les éléments d'un produit cartésien $A \times B$?

b) Comment sont-ils formés ?

c) Ecris une définition du produit cartésien $A \times B$ de deux ensembles. Montre ta réponse au professeur.

S3)

a) Ecris le nombre de possibilités offertes pour habiller des enfants avec ton modèle.

b) Quel est le nombre de tailles offertes ?

c) Quel est le nombre de coloris offerts ?

d) Comment obtient-on le nombre d'éléments d'un produit cartésien $A \times B$?

4) Pour Carnaval des enfants veulent se déguiser pour aller au bal masqué. Ils ont à leur disposition quatre chaussures gauches : une rouge (R), une bleue (B), une verte (V), une noire (N), qui constituent l'ensemble G et deux chaussures droites : une jaune (J), et une orange (O) qui constituent l'ensemble F.

a) Ecris la liste des éléments de l'ensemble G puis de F.

b) Ecris, sous forme de couple, toutes les paires de chaussures possibles que les enfants peuvent mettre.

c) Combien en trouves-tu ?

d) De quel ensemble est élément chaque paire de chaussures ?

5) $R = \{a ; b ; c ; d\}$ $\qquad S = \{1 ; 2 ; 3\}$

a) Ecris la liste des éléments de $R \times S$

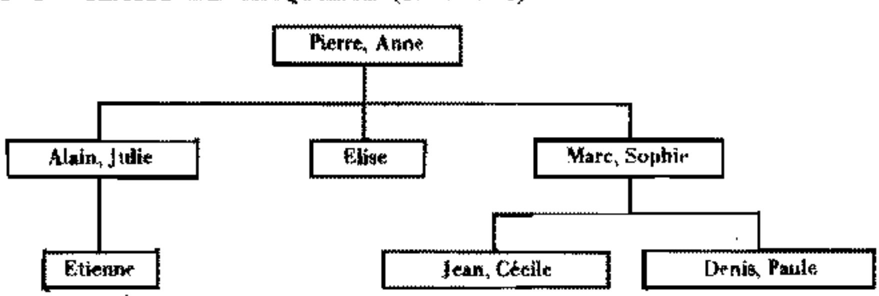
b) Quel est le nombre d'éléments de $R \times S$?

Comment l'as-tu obtenu ?

c) Réponds aux questions a) et b) pour le produit cartésien $S \times R$

d) Les ensembles $R \times S$ et $S \times R$ sont-ils identiques ? Ont-ils le même nombre d'éléments ?

F–3 - CLASSE DE CINQUIEME (1970-1971)



1) Sur l'arbre généalogique tu vois que Pierre et Anne ont eu trois enfants : Alain, Elise et Marc.

a) Quels sont les enfants de Marc et Sophie ?

b) Quels sont les parents d'Etienne ?

c) Quelle est la grand-mère paternelle de Paule ?

2)

a) Ecris l'ensemble M des personnes de sexe masculin

b) Ecris l'ensemble F des personnes de sexe féminin

c) Ecris dans les cases d'un tableau tous les éléments de M × F. (Tu peux désigner les prénoms par leur initiale pour aller plus vite).
Montre au professeur.

3)

a) Ecris *tous* les couples de la forme "mari ; femme".

b) Retrouves-tu chacun des couples précédents dans le tableau donnant M × F ?

Si oui, entoure les en rouge dans le tableau.

c) Dessine à nouveau le tableau de l'exercice 2c, *n'écris pas les éléments de M × F dans les cases,* mais trace une croix à la place des couples entourés.

d) Tu viens de dessiner la représentation cartésienne d'une relation. Est-elle complète ? Sinon complète-la.

Dessine une représentation sagittale de cette relation.

e) Pour cette relation obtenue à partir de M × F :

- Quel est l'ensemble de départ ?
- Quel est l'ensemble d'arrivée ?
- Quel est le lien verbal ?

4) Voici un ensemble de couples, E :
E = {(Etienne ; Elise) ; (Jean ; Julie) ; (Jean ; Elise) ;
(Etienne ; Sophie) ; (Denis ; Elise) ; (Denis ; Julie)}

a) Ecris en langage mathématique puis à l'aide des symboles le lien existant entre E et M × F.

b) Dessine une représentation sagittale de la relation déterminée par E.

c) Pour cette relation obtenue à partir de M × F :

- Quel est l'ensemble de départ ?
- Quel est l'ensemble d'arrivée ?
- Quel est le lien verbal ?

5) A quel sous-ensemble du produit cartésien M × F correspond la relation de *M vers F* de lien verbal... a pour mère... ?

6) Ecris le sous-ensemble de M × F déterminant la relation qui à chaque *petit-fils* fait correspondre sa *grand'mère.*

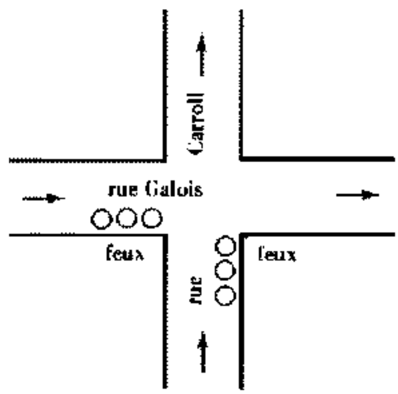
© 7) a) En sixième tu as appris à déterminer une relation par :
un ensemble de départ A
un ensemble d'arrivée B
un lien verbal
Par quoi peut-on remplacer le lien verbal ?
b) Comment peut-on aussi déterminer une relation ?
Montre ta réponse au professeur.

F–4 - CLASSE DE CINQUIEME (1970-1971)

1) Dans la fiche F-3 tu as appris que :
Tout *SOUS-ENSEMBLE* du produit cartésien $A \times B$ détermine une *RELATION de A vers B.*

VOCABULAIRE : Ce sous-ensemble s'appelle le GRAPHE de la relation.
Ecris le *graphe* de la relation de l'exercice 6 fiche F-3.

2) Au carrefour de la rue Galois et de la rue Carroll on trouve des feux rouge (R), orange (O), vert (V) (voir plan) :



a) Ecris l'ensemble A des feux de la rue Galois.

b) Ecris l'ensemble B des feux de la rue Carroll.

c) Quel est l'ensemble qui donne *toutes les possibilités* que peut rencontrer un automobiliste au carrefour quand les feux sont allumés ?

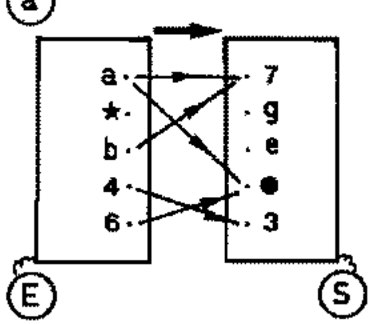
d) Le couple (V ; V) est-il souhaitable pour la circulation ?

e) Ecris le graphe de la relation qui permet aux automobilistes de circuler au carrefour sans aucun risque d'accident.

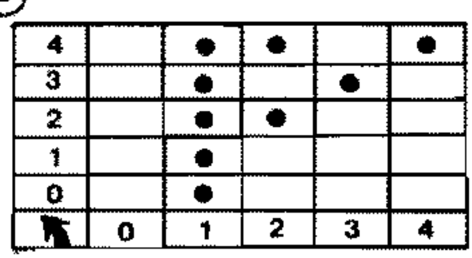
f) Dessine la représentation cartésienne correspondante.

3) Ecris le graphe de chacune des relations suivantes :

(a)



(b)

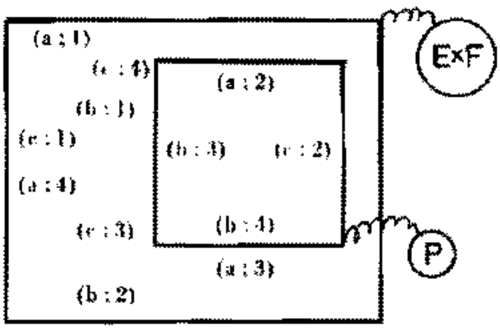


est un diviseur de

4) E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}
G = {(1 ; 2) ; (2 ; 4) ; (3 ; 6) ; (4 ; 8) } est le graphe d'une relation dans E.
a) G est un sous-ensemble d'un ensemble, lequel ?
b) Dessine une représentation sagittale de la relation dans E définie par G.
c) Quel est le lien verbal ?

F–5 - CLASSE DE CINQUIEME (1970-1971)

Ⓢ I)



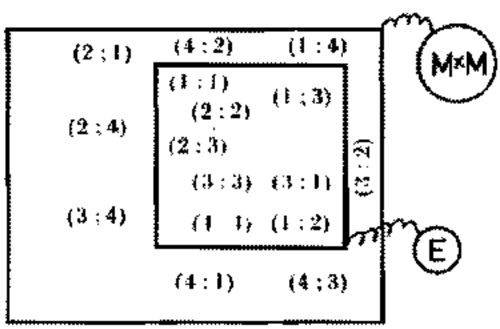
a) Ecris l'ensemble E puis l'ensemble F.

b) P est le graphe d'une relation, quel est l'ensemble de départ ? Quel est l'ensemble d'arrivée ? Dessine une représentation sagittale de cette relation.

c) Choisis un autre sous-ensemble de E × F, dessine une représentation cartésienne de la relation correspondante.

d) Ecris le graphe d'une application de E vers F.

II)



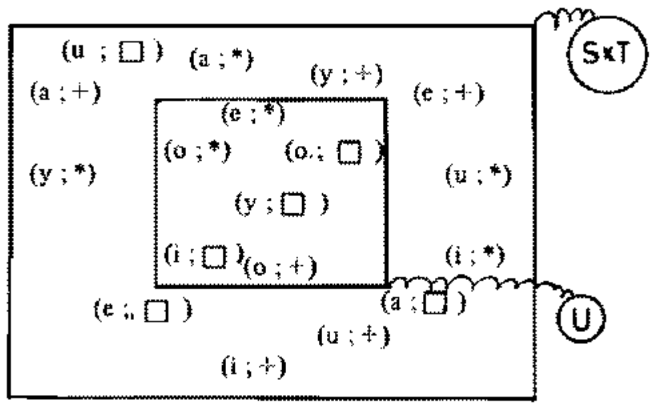
a) Ecris l'ensemble M.

b) E est le graphe d'une relation, quel est l'ensemble de départ ? Quel est l'ensemble d'arrivée ? Dessine une représentation sagittale de cette relation. Est-elle réflexive ?

c) A partir d'un autre sous-ensemble de M × M dessine une représentation cartésienne de la relation correspondante.

d) Ecris le graphe d'une application bijective dans M.

III)



a) Ecris l'ensemble S.

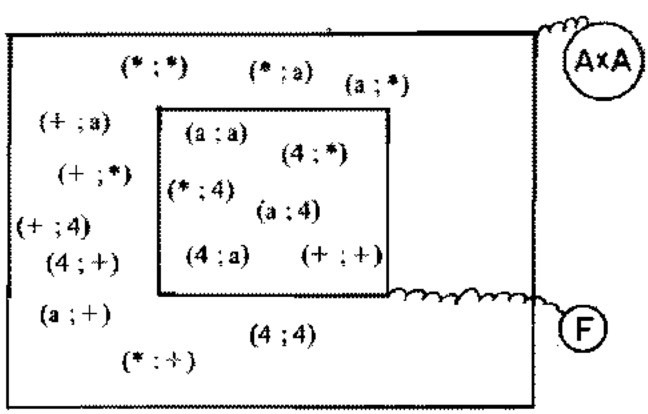
b) Ecris l'ensemble T.

c) U est le graphe d'une relation. Quel est l'ensemble de départ ? Quel est l'ensemble d'arrivée ? Dessine une représentation sagittale de cette relation.

d) Choisis un sous-ensemble de S × T différent de U, dessine une représentation cartésienne de la relation correspondante.

e) Ecris le graphe d'une application de S vers T.

IV)



a) Ecris l'ensemble A.

b) F est le graphe d'une relation, quel est l'ensemble de départ ? Quel est l'ensemble d'arrivée ? Dessine une représentation sagittale de cette relation. Est-elle symétrique ?

c) Choisis un sous-ensemble de A × A différent de F, dessine une représentation cartésienne de la relation correspondante.

d) Ecris le graphe d'une application bijective dans A.

F–6 - CLASSE DE CINQUIEME (1970-1971)

1) Prends une boîte d'allumettes et colle sur *chaque face*, une feuille de papier blanc.

2) a) Colorie la boîte avec trois couleurs : bleu, rouge, vert, de façon que :

les trois couleurs soient utilisées
il y ait une seule couleur sur chaque face
le rouge ne rencontre pas le bleu

b) Exprime ton résultat par une relation entre les faces et les couleurs. Tu peux pour cela *numéroter les faces.*

Ecris le graphe de cette relation.

c) *VOCABULAIRE :* Les faces coloriées en bleu et en rouge sont appelées *FACES OPPOSEES.*

Dans l'ensemble des faces, dessine une représentation sagittale de la relation de lien verbal"....est opposée à ..."

3)

a) Prends un tétraèdre, avec les mêmes consignes qu'à la question 2, colorie chaque arête.

b) Exprime ton résultat comme à la question 2b), pour cela écris une lettre, A, B, C ou D à côté de chaque sommet.

VOCABULAIRE : L'arête située entre A et B s'écrit (AB)

c) Comment peux-tu appeler les arêtes rouge et bleue ?

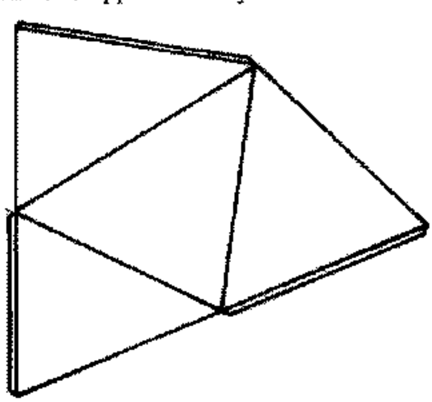
4)

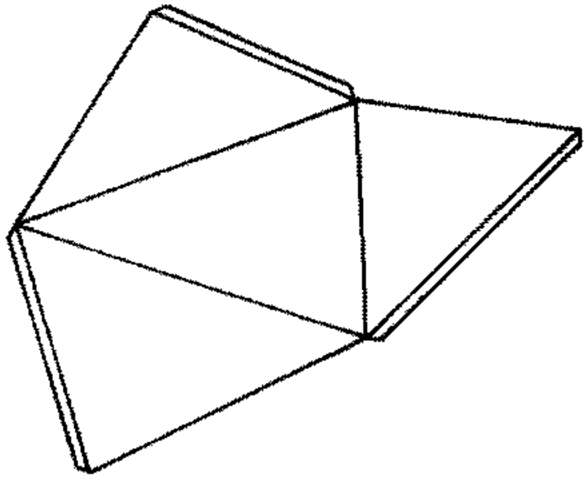
a) Colorie les arêtes d'un tétraèdre en rouge, bleu et vert, de façon que les arêtes opposées soient de la même couleur.

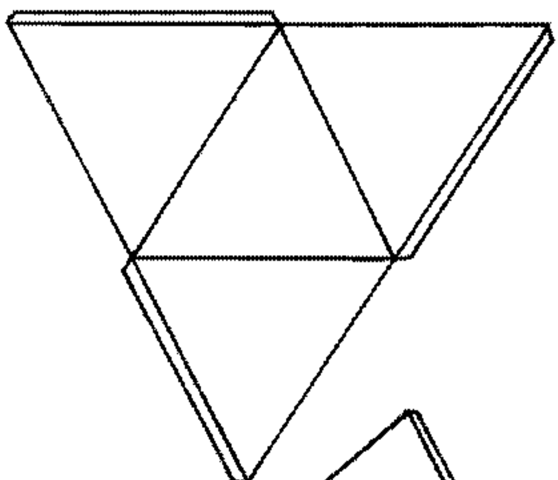
b) Exprime ton résultat par une relation entre les arêtes et les couleurs. Ensuite écris son graphe

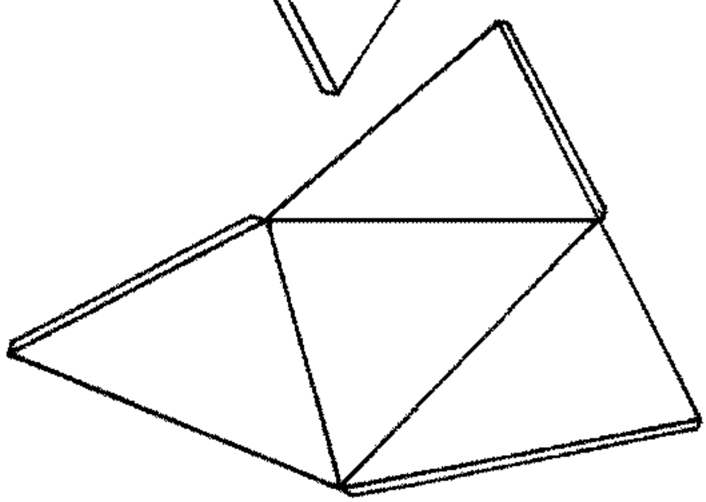
c) Dessine la représentation sagittale d'une relation entre les arêtes.

Cette relation est-elle une application bijective ?



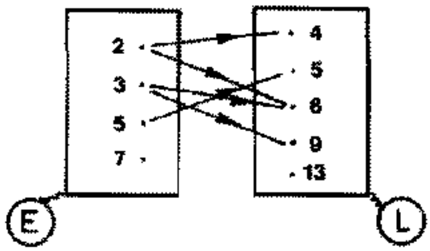






F–7 - CLASSE DE CINQUIEME (1970-1971)

1) Voici le diagramme sagittal d'une relation de E vers L :



a) Ecris le graphe G de cette relation.

b) G est inclus dans un ensemble, lequel ?

c) Ecris la liste des éléments de l'ensemble H : chaque élément de H est le couple commuté de chaque élément de G.

d) H est inclus dans un ensemble, lequel ?

e) H est le graphe d'une relation : dessine une représentation sagittale de cette relation.

f) Pour cette relation :

Quel est l'ensemble de départ ?
Quel est l'ensemble d'arrivée ?
Quel est le lien verbal ?

VOCABULAIRE :

Cette nouvelle relation s'appelle *RELATION RECIPROQUE* de la relation donnée.

2)

A = {Marseille ; Bordeaux ; Poitiers ; Lille ; Montpellier}
B = {33 ; 34 , 13 ; 86 ; 59}

C est le graphe d'une relation de A vers B

C = {(Marseille ; 13) ; (Poitiers ; 86) ; (Lille ; 59) ; (Montpellier ; 34) ; (Bordeaux ; 33)}

a) Dessine une représentation sagittale de la relation définie par C.

b) Dessine une représentation sagittale de la relation réciproque de la relation préeédente.

c) La relation donnée est-elle une application ? Si oui, cette application est-elle bijective ?

d) La relation réciproque est-elle une applieation bijeetive ?

3)

M = { Paris ; Rouen ; Lyon ; Nantes ; Tours }
P = {Seine ; Rhône ; Loire}

a) Dessine une représentation cartésienne de la relation de M vers P définie par... est situé sur...

b) Dessine une représentation cartésienne de la relation réciproque de la relation précédente.

c) La relation donnée est-elle une application ? Si oui, cette application est-elle bijective ?

d) La relation réciproque est-elle une application ?

Ⓢ

4) Reprends l'exercice que tu as choisi fiche F-5, pour *chacune* des *trois* relations écris le graphe des relations réciproques.

©

5) F est le graphe d'une relation d'un ensemble A vers un ensemble B, explique comment est obtenu le graphe de la relation réciproque. Montre ta réponse au professeur.