Axiomatique unitaire en Théorie des ensembles

par C. FRASNAY (Université Paul Sabatier, Toulouse)

I. Préambule, cadre logique, abréviations.

1) Dans la Théorie dont nous allons préciser l'axiomatique, les objets sont — comme de coutume — des *classes* (possédant tel ou tel élément) ou des *éléments* (appartenant à telle ou telle classe). Les *ensembles* sont les classes-éléments, selon le diagramme suivant :

	élément	non-élément
classe	ensemble	classe pure
non-classe	élément pur	

Formellement, l'axiomatique *unitaire* règle l'emploi de 2 symboles (spécifiques) primitifs, qui sont : l'objet $\varnothing$ (vide) et le prédicat binaire $\in$ (appartenance). Elle se place « d'entrée de jeu » dans la Théorie, et sous une forme abrégée qui ne nécessite pas plus de 6 symboles dérivés : 4 prédicats unaires [Cl (classe), El (élément), Ens (ensemble), Part (partition)] et 2 prédicats binaires [$\notin$ (non-appartenance), $\subseteq$ (inclusion)].

Le lien établi entre les notions symbolisées par $\varnothing$, $\in$, Cl assimile les éléments purs à des *corpuscules* : objets, autres que la classe vide $\varnothing$, auxquels rien n'appartient. Ces corpuscules constituent un ensemble : la *matière* M de la Théorie. Bien entendu, on pourrait décider — par un axiome auxiliaire ($M = \varnothing$) — que la Théorie soit *immatérielle* (sans corpuscules) : dans ce cas, les notions d'« élément » et d'« ensemble » coïncideraient.

A l'opposé, on peut décider que la matière M de la Théorie sera (par exemple) un ensemble de caractères d'imprimerie tels que : $\boxed{X}$, $\boxed{'}$, $\boxed{\neg}$, $\boxed{\vee}$, $\boxed{\exists}$, $\boxed{\to}$, $\boxed{\tau}$ (ou $\boxed{\iota}$), $\boxed{\varnothing}$, $\boxed{\in}$ d'une part (alphabet primitif), $\boxed{\wedge}$, $\boxed{\Rightarrow}$, $\boxed{\Leftrightarrow}$, $\boxed{\forall}$, $\boxed{\exists !}$, $\boxed{\neq}$, $\boxed{\notin}$, $\boxed{\subseteq}$, $\boxed{Cl}$, $\boxed{El}$, $\boxed{Ens}$, etc... d'autre part (alphabet dérivé). Les suites finies d'éléments de M sont alors les mots d'une langue formelle dont on doit préciser la grammaire (règles de construction de la classe des mots significatifs : termes et formules).

La synonymie de deux mots se marque au moyen du symbole métalinguistique $\approx$. Par exemple : $\boxed{\Rightarrow} \approx \boxed{\vee}\ \boxed{\neg}$.

2) L'axiomatique unitaire fusionne deux conceptions importantes de la Théorie des Ensembles : celle de Zermelo-Fraenkel (conception sans univers, dans laquelle tout objet est un élément) et celle de Kelley-Morse (dans laquelle il existe des classes pures, dont la plus grande est l'*univers*). Dans une Théorie « ZF, immatérielle » (comme dans la Mathématique de N. Bourbaki), les notions de « classe », d'« élément » et d'« ensemble » coïncident.

Par ailleurs, on est amené tout naturellement (dans le cours de la Théorie) à préciser la notion de *finitude*. Toute classe pure est infinie. Par contre, en ce qui concerne les ensembles, on débouche sur une alternative entre deux versions : la version *finitiste* (dans laquelle tout ensemble est fini) et la version *infinitiste* (dans laquelle il existe des ensembles infinis).

3) Toute axiomatique de la Théorie des Ensembles présuppose un cadre logique. L'axiomatique unitaire peut ainsi s'inscrire : soit dans la Logique *sélective*, soit dans la Logique *descriptive*.

Dans l'un et l'autre cas, les schémas d'axiomes logiques règlent l'emploi de 13 symboles (7 primitifs, 6 dérivés) qui sont : la variable muette X et l'accent (donnant les variables parlantes X', X'', X''', etc...) ; les 5 connecteurs $\urcorner$ (négation), $\vee$ (disjonction), $\wedge$ (conjonction), $\Rightarrow$ (implication), $\Leftrightarrow$ (équivalence) ; les 2 prédicats $=$ (égalité), $\neq$ (non-égalité) ; les 3 mutificateurs de quantification $\exists$ (existence), $\forall$ (universalité), $\exists^1$ (existence et unicité) ; enfin un mutificateur (sélecteur ou descripteur) qui est à l'origine de l'écriture des termes : τ (en Logique sélective) ou $\imath$ (en Logique descriptive).

Les deux modes logiques (sélectif, descriptif) ont une plus ou moins grande capacité de préhension des termes. En effet, si x est une variable parlante dans une formule φ, et s'il existe des objets vérifiant φ dans les occurrences de x, la Logique sélective distingue parmi eux un objet privilégié : alors $(\tau x)\varphi$ désigne cet objet. La Logique descriptive exige davantage : s'il y a existence et unicité d'un objet vérifiant φ dans les occurrences de x, alors $(\imath x)\varphi$ désigne cet objet.

A un détail près (absence de l'axiome de fondation), la Mathématique de N. Bourbaki repose sur une variante de l'axiomatique du type : « sélectif, ZF, immatériel, infinitiste ». A l'opposé (en vue de l'étude des langues formelles), la Métamathématique selon l'idéal de D. Hilbert pourrait se baser sur une axiomatique du type : « descriptif, KM, matériel, finitiste ».

4) Dans certaines formules, on abrège l'écriture des connecteurs en pratiquant la relativisation des quantificateurs. Ainsi : $(\underset{\alpha}{\exists} x)\beta$, $(\underset{\alpha}{\exists^1} x)\beta$, $(\underset{\alpha}{\forall} x)\beta$ signifient respectivement : $(\exists x)\,(\alpha \wedge \beta)$, $(\exists^1 x)\,(\alpha \wedge \beta)$, $(\forall x)\,(\alpha \Rightarrow \beta)$.

Voici maintenant les définitions des 6 abréviations (spécifiques) annoncées précédemment :

$$(x \notin y) \equiv (\urcorner(x \in y)).$$
$$(x \subseteq y) \equiv ((\forall u)\,((u \in x) \Rightarrow (u \in y))).$$
$$(\mathrm{Cl}(y)) \equiv ((y = \varnothing) \vee (\exists x)\,(x \in y)).$$
$$(\mathrm{El}(x)) \equiv ((x = \varnothing) \vee (\exists y)\,(x \in y)).$$
$$(\mathrm{Ens}(x)) \equiv (\mathrm{Cl}(x) \wedge \mathrm{El}(x)).$$

$$(\mathrm{Part}(x)) \equiv \left(\mathrm{Cl}(x) \wedge (\underset{u \in x}{\forall u})\,(\underset{v \in x}{\forall v})\ \ [(u = v) \Leftrightarrow (\exists t)\,((t \in u) \wedge (t \in v))] \right).$$

(Cette dernière abréviation aura un rôle plus tardif.)

II. Présentation de l'axiomatique unitaire.

L'axiomatique unitaire comprend 2 schémas d'axiomes $S_1(\varphi, x)$, $S_2(\theta, x)$ (d'où résulte une infinité d'axiomes implicites) et 4 axiomes explicites A_0, A_1, A_2, A_3 communs aux deux versions (finitiste, infinitiste).

L'orientation de la Théorie : soit vers la version finitiste, soit vers la version infinitiste, nécessite un axiome explicite additionnel : soit l'*axiome de finitisation* A_4, soit l'*axiome d'infinitisation* A'_4 (négations l'un de l'autre).

Enfin, la *formule de sélection* A_5 joue un rôle à part. Dans une Théorie sélective, ou dans une Théorie descriptive finitiste, on démontre que A_5 est un théorème. Par contre, P.J. Cohen a présenté en 1963 une Théorie descriptive infinitiste dans laquelle la négation de A_5 était un théorème. Lorsqu'on souhaite pouvoir disposer de A_5 dans une Théorie descriptive infinitiste, on doit donc en faire un axiome explicite additionnel (axiome de sélection, ou *axiome de choix*).

1) *Les deux schémas d'axiomes* (implicites).

— $S_1(\varphi, x)$: *Schéma de séparation.*

Soit φ une formule, et soit x une variable parlante dans φ.

La formule suivante est alors un axiome :

$$\left[\underset{Cl(u)}{(\exists u)}\ (\forall x)\ (\varphi \Rightarrow (x \in u))\right] \Rightarrow \left[\underset{Cl(v)}{(\exists v)}\ (\forall x)\ (\varphi \Leftrightarrow (x \in v))\right].$$

— $S_2(\theta, x)$: *Schéma de substitution.*

Soit θ un terme, et soit x une variable parlante dans θ.

La formule suivante est alors un axiome :

$$\left[(\forall x)\ El(\theta)\right] \Rightarrow \left[\underset{Ens(u)}{(\forall u)}\quad \underset{Ens(v)}{(\exists v)}\quad \underset{x \in u}{(\forall x)}\quad (\theta \in v)\right]$$

2) *Les quatre axiomes explicites communs* (aux deux versions).

— A_0 : *Axiome constitutif.*

$$\left[(\forall x)\ (\exists y)\ (x \in y)\right] \vee \left[(\exists y)\ (\forall x)\ (x \subseteq y)\right]$$

— A_1 : *Axiome d'extension.*

$$\underset{Cl(x)}{(\forall x)}\ \underset{Cl(y)}{(\forall y)}\ \left[(x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x) \Rightarrow (x = y)\right]$$

— A_2 : *Axiome d'échange* (entre appartenance et inclusion).

$$\underset{Ens(u)}{(\forall u)}\quad \underset{Ens(v)}{(\exists v)}\quad (\forall x)\ \left[((x \in u) \Rightarrow (x \subseteq v)) \wedge ((x \subseteq u) \Rightarrow (x \in v))\right]$$

— A_3 : *Axiome de fondation.*

$$\underset{\substack{Cl(u)\\ u \neq \varnothing}}{(\forall u)}\quad \underset{x \in u}{(\exists x)}\quad \underset{y \in u}{(\forall y)}\quad (y \notin x)$$

3) *Les axiomes explicites additionnels.*

— A_4 : *Axiome de finitisation* (pour la version finitiste).

$$\underset{\substack{Ens(u)\\ u \neq \varnothing}}{(\forall u)}\quad \underset{x \in u}{(\exists x)}\quad \underset{y \in u}{(\forall y)}\quad (x \notin y)$$

— A'_4 : *Axiome d'infinitisation* (pour la version infinitiste).

$$\underset{\mathrm{Ens}(u)}{(\exists u)} \quad \underset{x \in u}{(\forall x)} \quad \underset{y \in u}{(\exists y)} \quad (x \in y)$$
$$u \neq \varnothing$$

— A_5 : *Axiome de sélection* (seulement pour la version infinitiste, en mode descriptif).

$$\underset{\mathrm{Part}(u)}{(\forall u)} \quad (\exists v) \quad \underset{x \in u}{(\forall x)} \quad \underset{y \in v}{(\exists^1 y)} \quad (y \in x)$$

III. Quelques remarques sur le développement de la Théorie.

Introduisons d'autres prédicats dérivés : Elp (élément pur), Clp (classe pure), $\subset$ (inclusion stricte), $\ll$ (appartenance ou égalité).

$$\left|\begin{array}{l} (\mathrm{Elp}\ (x)) \equiv (\neg\ \mathrm{Cl}\ (x)) \\ (\mathrm{Clp}\ (x)) \equiv (\neg\ \mathrm{El}\ (x)) \\ (x \subset y) \equiv ((x \subseteq y) \wedge (x \neq y)) \\ (x \ll y) \equiv ((x \in y) \vee (x = y)) \end{array}\right.$$

1) Pour $\varphi \equiv ((x \in \varnothing) \wedge (x \neq x))$, le schéma $S_1(\varphi, x)$ donne le théorème : $(\forall x)\ (x \notin \varnothing)$, d'où résulte : $(\forall x)\ (\mathrm{Elp}\ (x) \Leftrightarrow (x \subset \varnothing))$. En faisant intervenir A_2, on obtient : $(\forall x)\ ((x \subseteq \varnothing) \Rightarrow (\exists y)\ (x \in y))$ et, par conséquent :

$$\left\{\begin{array}{l} (\forall x)\ (\mathrm{El}\ (x) \Leftrightarrow (\exists y)\ (x \in y)) \\ (\forall x)\ (\mathrm{El}\ (x) \vee \mathrm{Cl}\ (x)) \\ (\forall x)\ (\exists y)\ ((x \in y) \vee (y \in x)) \end{array}\right.$$

2) En combinant S_1, S_2, A_0, A_1, A_2, on obtient les termes usuels : *singleton* $\{a\}$ (d'un élément a), *intersection* $x \cap y$, *booléen* $P(x)$ (classe des ensembles inclus dans x), $\cup\, x$ (union des ensembles appartenant à x), *doubleton* $\{a, b\}$ (de deux éléments a et b), *réunion* $x \cup y$, *successeur* $a^+ = a \cup \{a\}$ (d'un élément a), *couple* $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ (de deux éléments a et b), *produit* $x \times y$, ... Il en résulte les concepts de *graphe*, *fonction*, application de x dans y, *injection*, *équipotence*, etc...

Ainsi :
$$\left\{\begin{array}{l} u \in \mathbf{P}(x) \Leftrightarrow \mathrm{Ens}\ (u) \wedge (u \quad x) \\ u \in \cup\, x \Leftrightarrow (\exists v)\ ((u \in v) \wedge (v \in x)) \\ \mathrm{El}\ (y) \Rightarrow (\forall x)\ ((x \quad y) \Leftrightarrow (x \in y^+)) \end{array}\right.$$

Posons : $0 \equiv \varnothing$, $1 \equiv P(0)$, $2 \equiv P(1)$. L'introduction du doubleton $\{a, b\}$ (de deux éléments a et b) s'effectue en appliquant le schéma $S_2(\theta, x)$ à l'ensemble $u = 2$ et (par exemple) au terme descriptif :

$$\theta \equiv (\iota y) \left[((x = 0) \wedge (y = a)) \vee ((x = 1) \wedge (y = b)) \vee ((x \notin 2) \wedge (y = 0))\right]$$

Il existe alors un ensemble v tel que $a \in v$, $b \in v$, permettant d'appliquer le schéma $S_1(\varphi, x)$ à $\varphi \equiv ((x = a) \vee (x = b))$. Ainsi, pour deux éléments distincts a et b, l'ensemble $2 = P(P(\varnothing))$ apparaît comme le prototype du doubleton $\{a, b\}$.

3) L'axiome de fondation A_3 rend les Mathématiques « décentes » en interdisant $(x \in x)$ et les cycles d'appartenance tels que : $(x \in y) \wedge (y \in x)$, $(x \in y) \wedge (y \in z) \wedge (z \in x)$, etc...

C'est aussi un axiome de commodité qui permet, par exemple, d'alléger la définition des *ordinaux* et des *naturels* :

$$\begin{cases} \mathrm{Od}\,(y) = (\forall x)\left[(x \ll y) \Rightarrow (\mathrm{Cl}\,(x) \wedge (\cup x \subseteq x))\right] \\ \mathrm{Nat}\,(y) = (\forall x)\left[(x \ll y) \Rightarrow (\mathrm{Cl}\,(x) \wedge (\cup x \subset x))\right] \\ \qquad\qquad x \neq \varnothing \end{cases}$$

L'axiome A_2 permet alors de montrer que le prédicat $\ll$, restreint aux ordinaux, est un prédicat de « bon ordre ».

On obtient, par ailleurs, les théorèmes suivants :

$$\begin{cases} ((x \ll y) \wedge \mathrm{Nat}\,(y)) \Rightarrow (\mathrm{Nat}\,(x)) \\ (\mathrm{Nat}\,(x)) \Rightarrow (\mathrm{Ens}\,(x) \wedge \mathrm{Nat}\,(x^+)) \\ (\mathrm{Od}\,(x) \wedge \mathrm{Od}\,(y)) \Rightarrow ((x \ll y) \Leftrightarrow (x \subseteq y)) \end{cases}$$

4) Parmi les nombreuses caractérisations de la finitude, on peut adopter : (x est fini) $\equiv$ (x est équipotent à un naturel).

a) L'axiomatique unitaire finitiste repose sur les 2 schémas S_1, S_2 et sur les 5 axiomes A_0, A_1, A_2, A_3, A_4. L'introduction du foncteur d'union $\cup$ permet de donner à l'axiome de finitisation A_4 la forme équivalente B_4 :

$$\underset{\mathrm{Ens}\,(x)}{(\forall x)}\ ((x \subset \cup x) \Rightarrow (x = \varnothing))$$

(d'où résulte immédiatement que tout ensemble ordinal est un naturel). Dans cette version finitiste, on démontre que tout ensemble est fini.

Soit p une partition d'une classe $a = \cup p$. Lorsque a est un ensemble, l'équipotence de a avec un naturel entraine :

$$(\exists q)\ \underset{x \in p}{(\forall x)}\ \underset{y \in q}{(\exists^1 y)}\ (y \in x)$$

En faisant intervenir l'axiome de fondation A_3, on peut étendre ce résultat à toute partition p d'une classe pure a. Finalement, la formule de sélection A_5 est une conséquence de S_1, S_2, A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 (même en Logique descriptive).

b) L'axiomatique unitaire infinitiste repose sur les 2 schémas S_1, S_2 et sur les 6 axiomes A_0, A_1, A_2, A_3, A'_4, A_5. (Si la Logique sous-jacente est sélective, A_5 peut être ôté de l'axiomatique.)

L'axiome d'infinitisation A'_4 peut prendre la forme équivalente B'_4 :

$$\underset{\mathrm{Ens}\,(x)}{(\exists x)}\ ((x \subseteq \cup x) \wedge (x \neq \varnothing))$$

Dans cette version infinitiste, on démontre que les naturels constituent un ensemble ordinal infini : cet ensemble ω est tel que $\omega = \cup \omega$.

5) La forme donnée à l'axiome constitutif A_0 permet d'énoncer de nombreux théorèmes communs aux théories (ZF) et (KM). Il n'en reste pas moins une alternative entre :

$$\begin{cases} A'_0 : (\forall x)\,(\exists y)\,(x \in y) \quad \text{(conception ZF)} \\ A''_0 : (\exists y)\,(\forall x)\,(x \subseteq y) \quad \text{(conception KM)} \end{cases}$$

a) Introduisons deux mutificateurs spécifiques Réf/mod. et El/mod. en posant, pour une variable parlante x figurant dans une formule φ ou dans un terme θ :

$$(\text{Réf/mod. } x)\ \varphi \equiv \underset{\mathrm{Cl}\,(u)}{(\exists u)}\ \underset{\mathrm{El}\,(x)}{(\forall x)}\ (\varphi \Rightarrow (x \in u))$$

$$(\text{El/mod. } x)\ \theta \equiv (\forall x)\ (\mathrm{El}\,(\theta))$$

— Lorsque la formule (Réf/mod. x) φ est un théorème, on dit que « la formule φ est référentiable modulo x ». Pour qu'il en soit ainsi quelle que soit φ, il faut et il suffit que la formule particulière « $x = x$ » soit référentiable modulo x. Cela revient à imposer l'axiome A''_0 (conception KM). Le schéma de séparation (pour toute formule φ comportant la variable parlante x) devient alors :

$$\underset{\mathrm{Cl}\,(v)}{(\exists v)} \quad \underset{\mathrm{El}\,(x)}{(\forall x)} \quad (\varphi \Leftrightarrow (x \in v))$$

— Lorsque la formule (El/mod. x) θ est un théorème, on dit que « le terme θ est élémentaire modulo x ». Pour qu'il en soit ainsi quel que soit θ, il faut et il suffit que le terme particulier « x » soit élémentaire modulo x. Cela revient à imposer l'axiome A'_0 (conception ZF). Le schéma de substitution (pour tout terme θ comportant la variable parlante x) devient alors :

$$\underset{\mathrm{Ens}\,(u)}{(\forall u)} \quad \underset{\mathrm{Ens}\,(v)}{(\exists v)} \quad \underset{x \in u}{(\forall x)} \quad (\theta \in v)$$

b) L'axiome A''_0 introduit dans la théorie (KM) une classe V (l'*univers*) telle que : $(\forall x)$ (El $(x) \Leftrightarrow (x \in \mathrm{V})$). Il en résulte que V est une classe pure.

Signalons également que l'axiome de fondation A_3 peut prendre dans (KM) une forme équivalente B_3 (utilisant le foncteur P et le symbole d'univers V) :

$$\underset{\mathrm{Cl}\,(x)}{(\forall x)} \quad ((\mathrm{P}(x) \subseteq x) \Rightarrow (x = \mathrm{V}))$$

A l'analogie existant entre l'axiome de fondation A_3 et l'axiome de finitisation A_4 correspond naturellement une analogie entre les énoncés B_3 (caractérisation de l'univers V) et B_4 (caractérisation finitiste du vide $\varnothing$).

c) Dans la Théorie (KM), le schéma S_1 permet d'introduire deux classes ω et Ω telles que :

$$\begin{cases} (\forall x) \ ((x \in \omega) \Leftrightarrow \mathrm{Nat}\,(x)) \\ (\forall x) \ \ (x \in \Omega) \Leftrightarrow (\mathrm{El}\,(x) \wedge \mathrm{Od}\,(x)) \end{cases}$$

Ces classes ω et Ω sont des ordinaux infinis. La classe Ω des ordinaux élémentaires est une classe pure (c'est d'ailleurs le seul ordinal non élémentaire).

Nous avions déjà mentionné l'existence de ω dans toute Théorie infinitiste : (ZF) ou (KM).

D'une manière un peu abusive — mais suggestive — on peut associer à chacune des quatre théories (ZF) ou (KM), finitiste ou infinitiste, une « situation » des ordinaux ω et Ω dans cette théorie : existence ou inexistence, appartenance ou égalité...

	finitiste	infinitiste
(ZF)	inexistence de Ω	
	inexistence de ω	existence de ω
(KM)	existence de ω et Ω	
	$\omega = \Omega$	$\omega \in \Omega$

C. Frasnay, 28 juin 1971 *.

* Une première ébauche de cet article, terminée le 18 mai 1971, avait été distribuée à Toulouse, lors des Journées nationales de l'A.P.M.E.P., pour préluder à la conférence de l'auteur sur le sujet : « Finitude, finitisation, finitisme ».