Quelques réflexions

Jacques BASTIER,
Bordeaux.

Nous proposons ici quelques réflexions suggérées par la recherche pédagogique que nous menons, ou observons, dans l'académie de Bordeaux et qui touche, depuis au moins trois ans, plus de 20 classes d'élèves non sélectionnés d'origine soit urbaine, soit rurale.

De l'importance relative des programmes.

Il n'est pas possible de changer brusquement et profondément les programmes car, pour les maîtres comme pour les élèves, le présent de chaque jour se situe toujours entre un passé et un avenir dont on ne dispose pas, ou pas totalement. D'ailleurs, la seule réforme véritable se fera avant tout dans les classes et par ***une évolution progressive des méthodes et de l'esprit de l'enseignement.*** Elle sera possible à la condition qu'on admette, dans l'exécution des programmes, une certaine souplesse sur le fond et une grande souplesse dans la forme. Ce principe semble admis en général mais la réussite de la réforme dépendra en définitive surtout de ***la liberté réelle des maîtres*** qui est conditionnée, d'une part par les aptitudes développées en eux par une information et un recyclage appropriés et d'autre part par ***la pression du milieu socio-professionnel.*** Or, sur ces derniers points la tâche à accomplir est immense et est à peine commencée.

De l'ambition de l'enseignement traditionnel.

Admettons que, passé l'âge de 11 ans, n'importe qui puisse apprendre n'importe quoi, avec suffisamment de temps et des méthodes appropriées, s'il en a vraiment le désir. Cela expliquerait que l'enseignement traditionnel des mathématiques ait survécu si longtemps sans que l'on constate une faillite totale. Conçu en partie pour une élite et en partie pour la formation pratique d'un certain type de citoyen, les maîtres ont essayé en vain de concilier l'inconciliable, en cherchant à appuyer les pratiques sur les théories, la réflexion et le raisonnement. Notre expérience actuelle nous permet d'affirmer, contrairement peut-être aux apparences, que nous tentions d'***expliquer l'automobile avant la brouette,*** ou si l'on préfère ***la structure euclidienne sur les réels avant la structure de groupe!*** A quoi aboutissait en fait notre enseignement? A apprendre à se servir d'une automobile à des gens qui n'auront jamais l'occasion d'utiliser autre chose qu'une bicyclette! Remarquons bien d'ailleurs que cet enseignement fondé sur le ***pourquoi*** n'aboutissait le plus souvent qu'à une ***réussite sur le comment*** : conséquence inévitable de la complexité des notions considérées.

Enseignant, dernier artisan.

Il ne s'agit pas ici de dénigrer l'artisan, mais de constater que celui-ci est pratiquement condamné dans notre société qui invente chaque jour des techniques plus rentables que les siennes. Or, si nous n'y prenons pas garde, la partie la plus importante de notre enseignement et celle qui est à première vue la plus efficace, est l'apprentissage de techniques que nous qualifierons d'artisanales, abandonnées partout, sauf à l'école et par certains bricoleurs peu évolués durant leurs loisirs! C'est, par exemple, le cas pour un certain genre de calcul numérique que les calculatrices mécaniques ou électroniques rendent caduc. Il ne faut pas d'ailleurs en déduire que le calcul numérique sans machine doive disparaître de notre enseignement mais seulement qu'il faut le concevoir en tenant compte de cette évolution.

De la vanité des programmes en général.

Nous ne contesterons pas qu'actuellement les programmes comme les examens soient un mal nécessaire au niveau de toute formation spécialisée. Au niveau de la formation générale du premier cycle ne serait-il pas possible d'évoluer vers une suppression de ces maux et de leur nécessité? Observons qu'à ce niveau précisément, il devient très difficile de trouver des critères permettant de choisir avec quelque certitude les connaissances ou les techniques qu'il conviendrait d'apprendre en priorité. Comment déterminer ce qui est vraiment fondamental ou le plus utile au plus grand nombre? Quant à la culture elle va résider sans doute beaucoup plus en mathématique, dans la capacité de l'homme de se servir des machines et surtout de réaliser ce qu'elles sont incapables de réaliser que dans son aptitude à faire plus lentement et moins sûrement le travail des machines. Peut-être nos élèves pressentent-ils cela mieux que nous lorsqu'ils montrent si peu d'enthousiasme à apprendre par cœur ce qui est dans les livres ou les mémoires d'ordinateurs, où ils savent pouvoir le trouver si un jour ils en ont besoin pour une tâche sérieuse. De même lorsqu'ils oublient si vite ce qu'il fallait apprendre pour l'interrogation du lundi. Peut-on leur reprocher aussi de se désintéresser de l'apprentissage d'une technique lorsqu'ils constatent que, quoiqu'ils fassent, ils resteront dans cette technique beaucoup plus lents que plusieurs de leurs camarades mieux doués, ou qu'ils ont conscience que cette technique est déjà dépassée? Mais alors que faire?

Des nombres et de la géométrie comme base de l'enseignement général.

Dans les années qui viennent nous constatons que les programmes du premier cycle ne seront pas profondément bouleversés. Les nombres et la géométrie en constituent apparemment toujours l'essentiel avec une timide apparition des ensembles et de quelques notions de logique et sur les groupes. La mathématique d'aujourd'hui s'applique un peu dans tous les domaines et se trouve aussi presque partout, mais il faut reconnaître que nous sommes peu habitués à la voir ailleurs que dans le domaine traditionnel. De plus, sans faire appel à un matériel coûteux ou encombrant ou à des connaissances spécialisées, peut-être est-il difficile de trouver des domaines aussi favorables à l'enseignement, même réformé, que nous souhaitons mettre en œuvre. Mais, dans ces conditions, il conviendrait de ne plus considérer les nombres et la géométrie comme des buts, mais comme des moyens dont le privilège n'est plus absolue. Dès lors de nombreuses règles, de nombreux théorèmes ou définitions deviennent relativement accessoires et peuvent ne plus être appris, ou oubliés sans inconvénient; il en sera de même pour la plupart des techniques. Paradoxalement un problème ne sera intéressant que dans la mesure où son étude rend l'élève capable de résoudre ceux qui ne lui ressemblent pas! Paradoxalement aussi il sera souhaitable d'abandonner en général l'apprentissage d'un mécanisme au moment où l'élève commence à le maîtriser et, devenant une machine, n'a plus à réfléchir. Bien sûr cela n'est guère compatible avec les examens de type traditionnel qui jugent essentiellement de l'aptitude du candidat à résoudre rapidement quelques problèmes types dont l'intérêt général paraît aujourd'hui très douteux. Comme les maîtres jouent un rôle essentiel dans le choix des sujets et la correction il doit dépendre d'eux que cela change progressivement.

Perspectives d'avenir.

Plutôt que de faire ici un exposé, fastidieux pour tous, de réussites ou d'échecs déjà observés dans nos tentatives beaucoup trop partielles pour être très probantes, essayons d'indiquer les dangers qui guettent le maître et les avantages qu'il peut espérer exploiter dans l'évolution amorcée. Il peut en effet sortir du meilleur ou du pire de ces nouveaux programmes de Quatrième et de Troisième. Du pire, si on s'engage inconsidérément en Quatrième dans les nombres sans se fixer de limites précises. L'apprentissage des techniques du calcul, en effet, ne sera jamais fini. Certains élèves retombent pendant des années et périodiquement dans les mêmes confusions, d'autres restent malhabiles, lents ou étourdis. Si on insiste trop, on peut décourager des élèves susceptibles pourtant de bien réussir en mathématique par la suite; si on s'attarde et si on répète c'est une perte d'un temps précieux pour la plupart. Dans le domaine du calcul numérique ou littéral, on trouve à la fois des justifications de règles et des théorèmes qui se prêtent bien à l'initiation aux démonstrations raisonnées mais de nombreux autres qui ne s'y prêtent pas du tout. Or, il semble également fâcheux d'intercaler constamment, au milieu d'énoncés démontrés, des énoncés admis parce qu'on ne peut s'en passer et que leur démonstration est trop compliquée pour nos élèves. Nous pensons même qu'il faut absolument éviter les pseudo-justifications intuitives ou particulières de tels énoncés car les élèves n'ont déjà que trop tendance à y faire appel ou à s'en contenter. Du pire aussi, si la géométrie devient essentiellement de la géométrie analytique. A première vue cela est pourtant très séduisant car les élèves parviennent à résoudre ainsi de nombreux problèmes avec un minimum de connaissances, d'effort cérébral et de réflexion. Cette économie et cette facilité ont apparemment un grave revers : les élèves perdent le plus souvent de vue l'origine du problème, les démarches logiques et la signification des résultats, éléments qui semblent pourtant les plus importants pour ceux, les plus nombreux, qui ne se spécialiseront pas dans un tel domaine. Le meilleur peut en sortir, par contre croyons-nous, si on profite du changement pour retenir surtout les lignes de force des nouveaux programmes, indépendamment de l'habillage relativement classique qui a été conservé et de toute signification concrète exclusive trop particulière. Ces lignes de force sont les bijections, les groupes, les corps ordonnés, et certains espaces vectoriels, affines et euclidiens de dimension 1 ou 2 essentiellement. Il ne s'agit pas de remplacer l'étude d'une théorie particulière par l'étude des théories plus générales qui la contiennent, mais d'élargir l'horizon de nos élèves en faisant appel souvent à d'autres exemples, généralement plus simples à embrasser dans leur ensemble, des structures en question, très souvent des structures finies. De tels exemples ont commencé à être découverts et utilisés avec un grand profit ces dernières années. Comme leur intérêt est surtout pédagogique et limité sans doute à un niveau bien déterminé un travail important de recherche reste à faire dans ce domaine. Une collaboration étroite entre des spécialistes de ces structures, parfois encore en voie d'élaboration actuellement, et des maîtres du premier cycle ayant quelque imagination pour trouver et mettre au point des exemples adaptés aux élèves paraît, soit dit en passant, une tâche d'un intérêt certainement considérable.

Formation du raisonnement logique et à l'esprit de la mathématique contemporaine.

La vérité mathématique est une vérité hypothético-déductive de structure. D'une certaine façon, cela signifie que la certitude mathématique porte davantage, sinon essentiellement, sur les relations d'inférence entre diverses propositions à l'intérieur d'une théorie déterminée que sur la vérité, toute relative, de ces propositions. Ce fait paraît primordial pour une formation logique et mathématique vraiment moderne. Or le rôle historique de la proposition d'Euclide montre déjà que les domaines traditionnels se prêtent mal à comprendre ce fait; il a fallu près de deux millénaires, en effet, aux mathématiciens pour découvrir les géométries non euclidiennes et, ainsi la relativité de la vérité de la fameuse proposition. Il est bien évident que ce n'est pas par cet intermédiaire que nous pourrons faire comprendre à nos élèves du premier cycle ce qu'est un axiome et une théorie ou une structure, ou simplement une vérité dans la mathématique contemporaine, et comment on la démontre. Pour y parvenir il faut trouver et utiliser d'autres familles de structures, apparentées comme les diverses géométries euclidiennes et non euclidiennes, mais beaucoup plus simples et dont on peut avoir une vue d'ensemble en quelques heures. Nous pouvons affirmer que ces structures existent et sont utilisables au niveau qui nous occupe, si on accepte, là aussi, d'ouvrir notre horizon aux structures finies en particulier. Il ne s'agit que d'appliquer aux structures un vieux principe pédagogique qui veut que, pour mieux faire comprendre l'énoncé du type : la conjonction de a, b et c entraîne d, on donne des exemples où a, b, c, ne sont pas simultanément vérifiés, et où on observe l'influence que cela peut avoir sur d. A notre époque, ne vaut-il pas mieux, au niveau du premier cycle, former nos élèves à situer une règle ou un théorème dans le contexte où ils sont valables et à ne pas les considérer comme des vérités absolues, même si, en contre-partie, nous devons les entraîner moins bien à utiliser certaines de ces règles ou théorèmes d'une façon mécanique et réflexe?

Nous demandons au lecteur de nous excuser d'être autant resté au niveau des généralités; cela est, avouons-le, en partie volontaire et en partie une nécessité. Volontaire, car le principal problème que devront résoudre les maîtres, dans les années qui viennent, sera le problème de choix de ce qu'ils retiendront pour constituer leur enseignement parmi une documentation qui deviendra progressivement vaste et variée : manuels scolaires, émissions de télévision, fiches d'élèves, publications pédagogiques diverses. En effet, ce problème a déjà été le problème principal dans notre expérimentation, alors que nous ne disposions pourtant que d'une documentation relativement beaucoup plus réduite. Essayer de dégager quelques critères pour un tel choix nous a semblé, de ce fait, aussi important que de contribuer à accroître l'embarras de ce choix en enrichissant la dite documentation. Nécessité aussi car les documents les plus réussis que nous avons pu réaliser ont déjà été publiés ou diffusés voire repris et améliorés par d'autres. Nous indiquerons cependant quelques thèmes qui méritent notre attention et que nous avons déjà utilisés avec succès, ou regretté de ne pas l'avoir fait davantage et plus tôt.

Quelques thèmes qui méritent d'être exploités.

A partir de la Sixième : en liaison avec les diagrammes de Venn et de Carroll tableau (vrai-faux ou 0-1) d'appartenance des éléments d'un référentiel à diverses de ses parties; illustration par des cartes perforées; démonstration de quelques égalités ensemblistes par ces diverses méthodes. Exemples de compositions d'applications et de bijections et de groupes de bijections (à 6 éléments au plus pour fixer les idées). Exemples de classification des objets d'un référentiel selon certaines de leurs propriétés, cas des partitions, en utilisant des tableaux rectangulaires ou des arbres.

A partir de la Cinquième : notions sur les connecteurs logiques par les tables de vérité et sur les quantificateurs; propriétés et classification de certaines relations par les propriétés ensemblistes de leurs graphes (cela peut conduire à utiliser des définitions inhabituelles). Exemples de groupes opérant dans des ensembles à partir, en particulier, de machines engendrant certains changements d'états d'un système physique. Exemples d'anneaux d'endomorphisme de groupe commutatif à partir de télécommande avec relais, de telles machines. Par ce procédé il semble que l'on puisse introduire de façon très concrète les anneaux ou corps à 2, 3 ou 4 éléments et peut-être quelques espaces vectoriels ou modules très simples (les endomorphismes du groupe de Klein semblent très intéressants à ce sujet). Préparation à la géométrie affine par un premier contact avec les plans à 4 ou à 9 points et les axiomes communs avec ceux du plan usuel.

Remarque. — Contrairement à ce qu'on pourrait penser ou être tenté de faire, il est préférable de placer, le plus souvent, ces exemples de structures finies avant l'étude des structures classiques apparentées car elles sont plus simples, plus concrètes et permettent de comprendre la signification et l'intérêt des axiomes communs, comme principes de base indépendamment d'une signification concrète particulière. C'est un tel procédé qui peut permettre de partir en Quatrième sur la notion de nombre en admettant essentiellement qu'il existe un corps commutatif ordonné « contenant » les naturels ou les entiers, les élèves étant préparés à comprendre une telle affirmation sans qu'on ait à l'accompagner de justification douteuse ou génératrice d'idées fausses.

En Quatrième : si elle a été préparée suffisamment on peut exploiter assez systématiquement la notion de groupe en géométrie comme en algèbre; centrer l'étude de la géométrie autour des groupes de transformations (dilatations, homothéties, translations, bijections affines d'une droite) semble possible et présenter des avantages sérieux. Introduire le corps des nombres d'une géométrie affine à partir des homomorphismes du groupe des translations conservant les directions, ou si l'on préfère des homothéties vectorielles, procédé que nous avons utilisé avec succès, permet de développer efficacement l'essentiel du nouveau programme en équilibrant la part du numérique et de la géométrie sans réduire cette dernière à la géométrie analytique. Cela permet aussi des analogies entre une ou deux géométries finies et la géométrie affine usuelle. Cela donne beaucoup de cohérence à l'ensemble tout en limitant les propositions admises à un petit nombre, les premières très simples à forme géométrique et les dernières à forme plus algébrique qui n'interviennent que lorsque les élèves ont acquis le maturité suffisante. Malgré les tâtonnements et pertes de temps inévitables d'une première expérimentation, nous constatons que dans les classes qui ont utilisé cette progression, à la fin du second trimestre de la classe de Troisième, l'étude du nouveau programme du premier cycle est presque achevée. Pourtant, nous avons utilisé des méthodes assez lentes : le travail des élèves en classe, par groupe de 4 ou parfois de 2 selon des directives plus ou moins détaillées présentées souvent sur des fiches remplaçant fréquemment le cours magistral.

En *Troisième* seulement : la géométrie métrique selon un procédé très proche de celui indiqué dans le nouveau programme.

Conclusion.

Nous avons conscience de laisser le lecteur sur sa faim. Mais il est impossible de renouveler un enseignement modelé au cours de plusieurs siècles après une expérimentation d'un an dans chaque classe menée par quelques dizaines de professeurs. Nous espérons simplement que notre travail aidera nos collègues dans les orientations et les choix des années qui viennent. Nous croyons à la mathématique moderne pour tous parce que nous sommes persuadés aujourd'hui que ce qui est général est plus simple et sera plus formateur et plus utile au plus grand nombre sans être obligatoirement plus abstrait que ce qui est particulier. Mais la mathématique moderne est née et s'est développée dans un milieu très spécialisé et on trouve, maintenant encore, plus facilement des théories des ensembles ou des groupes pour étudiant bien doué que des situations familières et des progressions propres à faire saisir, à de jeunes élèves, ces notions sans les dénaturer. L'adaptation nécessaire à chaque niveau va dépendre, pour l'essentiel des professeurs enseignant à ce niveau. Nous pensons que la tâche de chacun d'eux sera facilitée si elle peut s'accomplir à l'intérieur de petites équipes elles-mêmes en relation dans le cadre d'organisme plus vaste comme l'A.P.M.E.P.