En marge de l'apprentissage de la déduction

M. MOTTE,
Lycée Bonaparte de Toulon.

M. Chayé ayant évoqué le problème de l'apprentissage de la déduction, je m'attarderai volontiers, pour ma part sur des préoccupations voisines : la création des conditions affectives favorables à cet apprentissage.

On voit que les grandes lignes de l'apprentissage que décrit J. Chayé peuvent inspirer notre travail dès la classe de Sixième. J'y vois au moins deux avantages sur la situation antérieure :

• *L'initiation est très progressive: les mots « hypothèse », « conclusion », « prouver » ne sont plus rencontrés avec la brutalité d'autrefois;* on évite ainsi des malentendus.

En même temps on a davantage d'ambition : on essaya de faire comprendre ce qu'est un objet mathématique; comment il naît de nos décisions inspirées par le modèle qu'on veut décrire; comment des conséquences en découlent qui ne doivent rien à l'observation du modèle.

Et l'expérience montre que cette ambition est payante : elle, aussi, éloigne les malentendus.

• *Une autre cause d'inhibition disparaît: la ligne de démarcation entre les élèves qui trouvaient les démonstrations géométriques et les autres.* C'est ce que j'observe dans ma classe expérimentale (Troisième); mais à ce prix : que les problèmes proposés en Quatrième et en Troisième restent de types variés et ne se placent pas tous dans le cadre d'un édifice axiomatique important; que le professeur ne marque pas, par son attitude, une plus grande estime pour le travail de déduction formelle que pour les activités d'observation, de classement, d'organisation.

Je me suis demandée s'il n'existerait pas d'autre « préalable » au succès de l'apprentissage de la déduction. Nous voulons amener nos élèves à démontrer. Mais quand et pourquoi démontrons-nous? Quand cherchons-nous avec acharnement une démonstration?

La réponse à cette question est complexe; mais *un* de ses termes est certainement « lorsque le problème nous intéresse ».

Le goût de la recherche, de la découverte, précéderait ainsi celui de la démonstration, et pousserait tôt ou tard nos jeunes chercheurs vers les moyens les plus puissants.

C'est bien ce que l'on observe.

L'éveil et la préservation du goût de la recherche chez nos élèves ne peuvent donc être laissés au hasard — ce qui risque d'être le cas si nos préoccupations sont polarisées par le contenu des programmes et son découpage en tranches, ou si nous nous laissons enfermer dans le cadre de tel ou tel manuel — *et ils ne doivent pas être subordonnés à l'introduction des enfants dans des domaines formalisés.*

Il s'agit donc de mettre nos apprentis devant des situations leur posant des questions suffisamment excitantes, auxquelles ils soient cependant *tous* susceptibles de donner un début de réponse.

Actuellement chacun de nous n'est pas très riche de telles situations — en dehors de la combinatoire —. Il est probable que ces situations existent et que nous finirons par les découvrir : leur recherche est un travail de longue haleine à laquelle nous devons tous nous atteler car il ne faut pas espérer qu'elles vont être très nombreuses dans les nouveaux manuels.

Il ne suffit pas que la situation soit intéressante : il faut que le jeune élève soit convaincu qu'il peut la maîtriser. Il le sera s'il obtient rapidement des bouts de réponse qui l'encourageront à aller plus loin; plus généralement *si la situation lui suggère une action.* Souvent ce serait une erreur que de vouloir le guider vers *une* démarche : il ne sait pas encore se laisser guider. Au contraire plus la situation permet des attaques différentes mieux elle convient.

Les problèmes fermés, directifs, ne conviennent pas à ce stade.

Voici quelques exemples de situations répondant à ces préoccupations, toutes — sauf une — utilisables à partir de la Sixième.

Pour le travail en équipes — où le problème peut être plus difficile.

1. On propose d'écrire un entier naturel, puis les entiers qu'on peut obtenir en le divisant par un nombre premier et en itérant cette opération. On peut suggérer la représentation sagittale où la flèche signifie « ... divisé par un nombre premier donne... », autrement dit l'ébauche du treillis des diviseurs du nombre considéré (cf. fiches « Relations » de Z. P. Dienes). De nombreux problèmes se posent qu'on peut laisser les enfants formuler, en les aidant : organisation des schémas dans le plan et dans l'espace; comparaison des schémas; recherche des nombres pouvant habiller un schéma donné, etc.

2. Quels nombres peut-on atteindre à partir de 3 et 5 en ajoutant 3 ou 5 autant de fois qu'on veut? Ou : quelles sommes pourrait-on payer si on possédait uniquement des pièces de 3 F et de 5 F?

3. Dénombrement des chemins entre deux nœuds d'un quadrillage (cf. fiche « Problèmes ouverts des Documents de la R.T.S. et article de M. Roumanet, p. 88 dans « Actes du Ier Congrès international de l'Enseignement Mathématique »).

4. (Dus à J. J. Fletcher.) « Dans une machine sont disposés en file, trois gobelets. Quand on appuie sur le bouton C la machine retourne le gobelet de gauche et échange les deux autres sans les retourner. Quand on appuie sur le bouton D la machine retourne le gobelet de droite et échange les deux autres sans les retourner. » Tel était le début d'une fiche dont j'avais longuement médité la rédaction pour amener, en six questions, des élèves de Quatrième à explorer complètement cette situation. Je ne sais pourquoi je n'avais pas vu que je tenais une situation en or pour la libre activité des élèves. Je m'en suis heureusement avisée à temps et, lorsque le moment m'a paru favorable à l'introduction de cette étude, j'ai lu deux fois le paragraphe reproduit ici et dit : « Voilà : je crois que vous pouvez vous passer d'une fiche mais si une équipe préfère être guidée la fiche est prête, qu'elle la demande! »

Une très belle activité a suivi : s'il m'a toujours été possible de m'entretenir avec toutes les équipes qui désiraient un avis par contre je n'ai pu « photographier » la démarche et les tâtonnements des huit équipes.

Voici ce que j'ai noté :

18 novembre : « Trois équipes s'intéressent spontanément à un arbre donnant tous les états qu'on peut atteindre à partir d'un état en agissant sur les boutons. Deux ou trois autres équipes viennent un peu plus tard à cet arbre. »

21 novembre : « Plusieurs équipes découvrent qu'à partir d'un état on ne peut pas atteindre n'importe quel état et réorganisant leur travail avec une représentation sagittale des bijections :

« .devient. en appuyant sur D », « .devient. en appuyant sur C. »

« Une équipe a étudié toutes les transformations que peut réaliser la machine je me demande si elles ont cherché tous les couples de chaque composée. »

Le 25 novembre, une dernière séance est consacrée à ce travail, en mon absence. Le 28, de l'avis général « personne n'a plus d'idée », il faut faire une synthèse. C'est alors que l'équipe qui avait établi dès le 21 la table de composition nous apprend que « c'est exactement pareil que pour le dictionnaire vénusien réduit (*) : les règles de simplification sont les mêmes. »

Les élèves n'attendent nullement de moi que je leur révèle la solution : je n'ai donc aucune difficulté à m'en tenir à la ligne de conduite que je me suis fixée : ne rien révéler, laisser les enfants aller leur chemin.

Au fond je ne sers généralement qu'à activer une prise de conscience ou à les rassurer sur leur audace.

(*) Un travail à partir du monoïde engendré par a, b.

Voilà, lorsqu'une équipe m'appelle, ce que je puis entendre : « Madame nous pensons nous donner comme but de recherche toutes les dispositions des gobelets que peut donner la machine. Est-ce que vous pensez que c'est une bonne question? » ou bien : « Joëlle a eu l'idée d'un tableau cartésien : on était d'accord, mais ça ne marche pas très bien ». Moi : « que devrait-il donner ce tableau? » etc. « Oui, c'est ça on sentait bien que ça n'allait pas, on va chercher autre chose. »

Pour le travail individuel à la maison :

1. (D'après Rosenstihiel et Mothes : Mathématiques de l'action.)

On considère quatre points disposés en carré et, au centre, un cinquième point. Entre ces points on a le droit de tracer quatre segments à condition :

— de ne pas former une ligne brisée fermée,

— de ne pas laisser un point isolé.

Il faut :

a) Trouver toutes les figures possibles.

b) Étudier, sur l'ensemble des figures trouvées, la relation « on peut passer de la figure x à la figure y en déplaçant un seul segment ».

Devoir très bien accueilli (Sixième) : bien entendu l'ensemble des figures est remis sans commentaire mais on peut lire, dans la présentation même, le reflet de préoccupations de recherche méthodique.

Les copies ont des physionomies très variées la question *b)* ayant suggéré des initiatives et recherches très différentes.

2. Parties de $\mathbb{Z}$ stables pour l'addition (Quatrième).

a) Cherche une partie P de $\mathbb{Z}$ telle que l'addition soit une loi de composition interne sur P.

b) Cherche d'autres parties répondant à cette condition : de telles parties de $\mathbb{Z}$ sont appelées « parties stables pour l'addition ».

As-tu trouvé des parties stables finies?

c) Pour chaque partie stable P trouvée, examine si $(P; +)$ est un groupe.

La formulation des questions *a)* et *b)*, où une seule question paraît suffire, vise à rassurer l'élève — qu'un sujet qu'il pressent vaste effraie, non sans raison — et à fixer son attention sur la définition d'une partie stable avant que son imagination soit entraînée vers la recherche d'autres parties. Cette formulation n'ôte aucune liberté aux jeunes chercheurs; d'où les remarques et les initiatives trouvées dans les copies. Quelques-uns se proposent de prouver qu'il n'y a pas de partie stable finie autre que $\varnothing$ et $\{0\}$ et il ne manque à une de ces démonstrations que quelques... raffinements pour être la nôtre. Certains affirment « l'ensemble $a.\mathbb{Z}$ des multiples de a est une partie stable, quel que soit a »; très peu explicitent le raisonnement; mais n'est-ce pas suffisant pour autoriser à penser qu'un plus grand nombre a fait ce raisonnement mais a jugé inutile de l'exposer? Dans un prolongement de ce travail, sur les parties de $\mathbb{Z}$ stables pour la soustraction, je demandais :

a) Tu as trouvé des parties de $\mathbb{Z}$ stables pour l'addition : sont-elles stables pour la soustraction?

b) Il te reste donc à chercher des parties de $\mathbb{Z}$ stables pour la soustraction et non stables pour l'addition.

c) Récapitule dans un tableau :

$P \subset \mathbb{Z}$	P stable pour $+$	P stable pour $-$	$(P, +)$ groupe

d) En te limitant à l'ensemble des parties examinées quels énoncés peux-tu faire?

Voici quelques réponses :

C. C. : « Si $P \subset \mathbb{Z}$, si P est stable pour la soustraction, alors P est stable pour l'addition. »

F. F. : « Toute partie de $\mathbb{Z}$ stable pour la soustraction est stable pour l'addition. »

F. M. : « Dans $\mathbb{Z}$ toute partie stable pour la soustraction est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. »

I. V. : « *En me limitant aux parties étudiées* je vois qu'une partie P stable pour l'addition est stable pour la soustraction si et seulement si la partie P munie de l'opération addition est un groupe. »

Ainsi se trouvent atteints certains objectifs : les élèves se sont posé des questions; ils ont pris l'initiative de démonstrations; ils ont formulé correctement des observations en utilisant les connecteurs « si... alors », « si et seulement si. »

• *Éveiller et préserver...* • Éveiller sera l'affaire des classes de Sixième et Cinquième... en attendant mieux. Mais préserver ce goût et la confiance de l'enfant dans ses possibilités demandera toute notre attention *pendant la période assez longue où la sensibilisation et l'aptitude à la déduction formelle s'éveillent et se développent très inégalement dans la classe.*

J'ai parlé plus haut de l'importance de *continuer à admettre dans les classes de Quatrième et Troisième des exercices de types variés* sans privilégier la géométrie déductive. On en trouvera plusieurs exemples. Les deux premiers se placent dans le cadre de l'exploration intuitive des permutations d'un quadrillage ou d'une tapisserie : les suivants sont consacrés à l'introduction de la notion de distance. Dans ces derniers on peut remarquer des situations allant d'une démonstration [δ vérifie : $\delta(x;y) + \delta(y;z) \leqslant \delta(x;z)$] que l'élève pourra établir aussi bien avec un arbre épuisant les cas possibles pour les valeurs de $\delta(x;y)$ et $\delta(y;z)$ que par le raisonnement économique interprétant le premier membre comme la longueur d'un chemin de x à z — à l'étude d'une somme

$$\sum_{i=1}^{i=30} (|a - b| + |b - c|)$$

en passant par la manipulation de relations ternaires, de « lieux géométriques » etc.

Corrélativement l'attitude du professeur ne devrait pas conduire l'enfant à l'idée qu'il y a des activités mathématiques nobles et d'autres moins nobles.

Il faut ajouter à cela l'importance de *continuer* pendant cette période *la pratique du travail en équipes*. Je n'ose m'étendre ici sur ce qui est une question de méthode dans la conduite de la classe. Pourtant le travail en équipes nous ramène aux conditions affectives : je vois que ce mode de travail permet d'entretenir chaque enfant, quels que soient les accidents de sa scolarité (santé, problèmes familiaux, baisse momentanée de l'intérêt) dans la conviction qu il peut *faire* des mathématiques; permet de proposer des travaux plus difficiles, donc plus intéressants ou plus proches des vrais problèmes; permet à l'enfant des *audaces* qu'il n'aurait pas toujours seul : il s'enhardit à dire « nous avons essayé de prouver », à combiner astucieusement les égalités, à critiquer... exactement comme, avec des camarades, il appprend à grimper aux arbres et à sauter des ruisseaux même s'il est un peu chétif ou d'un naturel un peu timoré.

Pour conclure : les inhibitions, qui ont pesé si lourd dans l'apprentissage de la déduction, devraient disparaître.

• Les programmes de Sixième et de Cinquième nous offrent un cadre favorable à l'apprentissage de la recherche et de la déduction — objectifs qui doivent nous préserver de réduire ces programmes à l'acquisition d'un vocabulaire et de quelques techniques sur les décimaux relatifs.

• Le programme de Quatrième en préparation n'a pas tenu compte des observations et avertissements des expérimentateurs sur les inconvénients qui résulteraient d'une place privilégiée donnée à la géométrie; à « l'approche des réels », « dont l'étude est nécessairement directive, il juxtapose un programme de géométrie assez important. J'espère que, malgré tout, les maîtres trouveront le moyen de préserver dans ces classes l'esprit et les méthodes des classes précédentes et que ces quelques lignes les y aideront tant soit peu.