Sur l'expérience en 4^{e}

Louis Duvert,
Lyon.

La classe de Quatrième est marquée par l'apparition des « démonstrations » et par le début du « calcul algébrique ». Les difficultés habituelles subsistent, mais le travail sur fiches permet au maître de mieux les étudier, de voir les erreurs « à l'état naissant ».

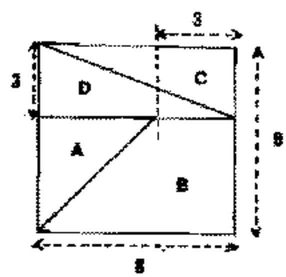
① D'abord, quel est le sens du mot « démontrer »? Il serait ambitieux de prétendre en Quatrième en donner une définition irréprochable!

Un premier effort, important, consiste à faire prendre conscience aux élèves de la *nécessité* logique de démontrer, au lieu de se fier à quelques cas particuliers :

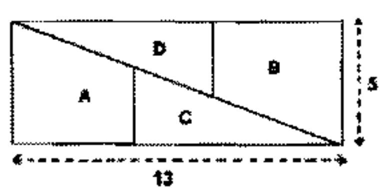
a) En géométrie, c'est délimiter le rôle des figures, c'est faire la différence entre une constatation expérimentale (et, par là-même, souvent approximative) et une démonstration, indépendante du « cas de figure ».

Les « paradoxes géométriques » peuvent nous y aider. En voici un exemple, propre à ébranler une confiance excessive en la loyauté des figures :

Un carré de côté 8 (l'unité étant l'interligne d'une feuille quadrillée) est subdivisé en quatre surfaces A, B, C, D. Son aire est 64 (carreaux).



On découpe ces quatre surfaces et on les dispose de la façon suivante :
Elles constituent un rectangle, dont l'aire est : 13×5, c'est-à-dire 65.
D'où vient le « carreau » supplémentaire?
(Extrait de : Northrop. Fantaisies et paradoxes mathématiques.)



b) En algèbre, certaines propriétés des lois de composition se prêtent bien à des réflexions utiles :

1° Pour démontrer qu'une loi est commutative, il ne suffit pas d'exhiber quelques exemples. On risque de fausser leurs idées en laissant écrire ou dire aux élèves, même jeunes :

« $3 + 5 = 5 + 3$, *donc* l'addition des naturels est commutative »

ou encore :

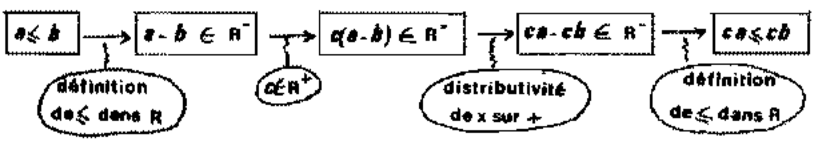
« L'addition des naturels est commutative; *en effet*, $11 + 4 = 4 + 11$ ». Il faut distinguer entre des *exemples* qui *illustrent* la commutativité et une *démonstration* de la commutativité.

S'il s'agit d'un ensemble fini E, une façon de la démontrer consiste à contrôler « en extension » que *chaque* élément de $E \times E$ vérifie le moule $a * b = b * a$, par exemple par un examen complet de la table de Pythagore. Mais il peut exister d'autres sortes de démonstrations, même pour un ensemble fini.

2° Pour démontrer qu'une loi est non-commutative, au contraire, un seul « contre-exemple » suffit; la définition de la commutativité comporte un quantificateur universel, donc sa négation comporte un quantificateur existentiel. Une erreur se rencontre fréquemment : « non-commutativité » signifierait qu'aucun élément de $E \times E$ ne vérifie $a * b = b * a$...

Ce qui amène à poser un certain nombre de questions :

A quel niveau introduire les quantificateurs? Les notions logiques de négation, de déduction, de contraposition? Peut-on s'en passer dans l'initiation à la démonstration? Quel sort réserver aux « petits mots » comme : « or », « donc », « il vient », « on a », etc.? Quelles sont la validité et l'efficacité pédagogique des « organigrammes » (ou « déductogrammes »?) tels que le suivant :



② Une fois l'élève à peu près convaincu de la nécessité des démonstrations, comment l'aider à comprendre les démonstrations qu'on lui présente et mieux encore à en faire lui-même?

Peut-être est-il bon, au cours de cette initiation, de sérier les problèmes; par exemple de distinguer entre la découverte, ou plutôt la *construction*, d'une démonstration, et sa *rédaction;* de proposer des exercices « spécialisés ».

Les uns où on ne viserait que la construction.

D'autres où la construction serait donnée, ou préalablement élaborée en classe collectivement, et où l'effort de l'élève porterait uniquement sur la rédaction.

D'autres encore où on laisserait à l'élève le soin de rédiger l'énoncé (qui n'aurait pas été donné par écrit dans les formes requises).

On peut aussi proposer des « puzzles mathématiques » : le maître rédige soigneusement une démonstration, puis la découpe en morceaux tels que la reconstitution du « bon ordre » soit possible (éventuellement de plusieurs manières); et c'est cette reconstitution qu'on demande aux élèves.

Exemple : L'axiome A_5 s'énonçait, cette année-là, de la façon suivante :

« L'équipollence est transitive »

et la propriété 4 de la fiche G6 (édition expérimentale).

« Si M, N, P sont les milieux respectifs de (A, B), (A, C) et (B, C),

(N, M) eq (P, B)

et (N, M) eq (C, P) »

« Une démonstration a été découpée en treize morceaux qu'on a mélangés :

(1) l'axiome A_5 permet de déduire :
(2) Pour cela, on introduit le milieu M de (A, C).
(3) On considère dans le plan quatre points A, B, C, D.
(4) On veut démontrer que (I, J, K, L) est un parallélogramme.
(5) « (L, K) eq (A, M) » entraîne « (A, M) eq (L, K) ».
(6) Donc (I, J, K, L) est un parallélogramme.
(7) On appelle I, J, K, L, les milieux respectifs de (A, B), (B, C), (C, D), (D, A).
(8) Comme la relation « ...est équipollent à... » dans l'ensemble des couples de points est symétrique.
(9) (I, J) eq (A, M).
(10) De (I, J) eq (A, M) $\wedge$ (A, M) eq (L, K),
(11) D'après la propriété 4 de la fiche G6
(12) et (L, K) eq (A, M)
(13) (I, J) eq (L, K).

En les remettant dans le bon ordre, retrouve cette démonstration ».

③ L'élève de Quatrième qui a compris ce qu'exige une démonstration exige à son tour du professeur une précision plus grande dans le vocabulaire.

Par exemple, il repousse le mot « montrer », dont on ne sait jamais s'il requiert une démonstration ou s'il signifie simplement... simplement quoi?

Démontrer, montrer, établir, illustrer, contrôler, vérifier, admettre, supposer, poser comme axiome, déduire, ... : à nous de clarifier toute cette terminologie si nous ne voulons pas accroître inutilement les difficultés de nos élèves.