3

Compte-rendus d'expérimentateurs

L'expérimentation a démarré en octobre 1967 sous l'égide de l'I.P.N., maintenant I.N.R.D.P., en Sixième dans une cinquantaine de classes et se poursuit actuellement en Troisième ; une deuxième vague s'est formée en 1968, elle touche actuellement la Quatrième.

Durant les deux années d'expérimentation en Quatrième, les conditions de travail n'ont pas été idéales : les programmes étaient d'abord inconnus puis variaient à chaque nouvelle rédaction de la Commission Ministérielle et des décharges promises n'étaient plus accordées. Malgré cela de nombreuses équipes ont bien voulu faire un rapport sur leur expérimentation en Quatrième, indiquer le programme suivi, les méthodes pédagogiques utilisées et donner leurs conclusions.

Au risque de déformer leurs intentions, en les résumant, disons que les expérimentateurs semblent : se plaindre de la longueur du programme ; souhaiter l'établissement d'un programme minimum répondant à la finalité de l'enseignement obligatoire jusqu'à seize ans. Pour les expérimentateurs l'objectif à atteindre est une véritable démocratisation de l'enseignement de la mathématique dont deux conditions nécessaires (mais non... nécessairement suffisantes) sont : programme minimum assimilable par, pratiquement, tous les élèves ; création dans tous les établissements de « clubs mathématiques » dans lesquels s'effectueraient des activités... libres.

Nous publions, dans l'ordre, des comptes rendus de collègues enseignant à : Fribourg, Mulhouse, Nancy, Marseille, Clermont-Ferrand, Lorient, Boulogne-sur-Mer, Limoges, Montpellier, Lyon.

En Alsace

Voici d'abord un article qui met le lecteur dans l'ambiance d'une classe expérimentale.

Quelques histoires vécues dans une classe expérimentale.

M. AUZÉ,
Lycée de Fribourg.

Je participe depuis trois ans à l'expérimentation des nouveaux programmes du premier cycle dans l'équipe qui s'est créée à l'I.R.E.M. de Strasbourg en 1968 après que nos amis Lyonnais nous aient initiés à leur méthode de travail. Je veux essayer de raconter quelques histoires réellement vécues au cours de cette expérience et éventuellement de réfléchir sur leur signification.

Il fut convenu, dès le début, qu'à ces nouveaux programmes devait correspondre une pédagogie nouvelle. J'ai donc, comme la plupart de mes collègues expérimentateurs d'Alsace, tenté par l'utilisation de fiches, de mettre en œuvre un enseignement non directif.

J'ai dû surmonter d'énormes difficultés provoquées par la différence des cadences de chacun. Certains élèves enthousiastes avalaient littéralement les fiches et les remèdes qu'avaient suggérés les Lyonnais, en l'occurrence les fiches complémentaires de Galion disparaissaient dans le gouffre de leur appétit de savoir. D'autres, au contraire, tout heureux de profiter d'une liberté qu'ils n'avaient pratiquement jamais eue à l'école, pensaient davantage aux jeux de leur âge qu'aux subtilités de la mathématique, fût-elle qualifiée de moderne.

Ce premier trimestre de Sixième se termina donc dans une ambiance de kermesse. Tout le monde était content. Ceux qui voulaient travailler avaient bien travaillé et les autres s'étaient bien amusés. Les notes obtenues aux interrogations de contrôle n'étaient jamais catastrophiques, tant il est vrai que le langage des ensembles est accessible à quiconque est doué d'un minimum de bon sens.

J'étais cependant inquiet. Je comprenais que je ne pouvais plus, dans le cadre de l'organisation existante, laisser aller chacun à son rythme. Il y avait un programme à respecter dans l'intervalle d'une année scolaire. L'idée se fit jour en moi que les notions de programme et d'enseignement non directif sont incompatibles. Aussi adoptai-je un compromis : lorsque certaine question s'avérait difficile, j'abandonnais mon rôle de moniteur déambulant dans les travées, et pour les quelques instants où je devais projeter les lumières indispensables, je remontais sur l'estrade pour redevenir professeur traditionnel. Ainsi le travail sur fiche ne piétinait pas et quitte à ce que les plus attardés terminent le travail à la maison, les écarts entre les rapides et les lents diminuèrent et des séances de synthèse, inconcevables dans la situation du premier trimestre, purent être organisées. Maintenant encore je m'en tiens à cette méthode, avec cette nuance que ce sont les élèves qui sollicitent mon intervention au tableau lorsque les difficultés rencontrées dans les fiches leur paraissent insurmontables.

Ces interventions se font d'ailleurs plus fréquentes au niveau de la classe de Quatrième. Je veille à ce qu'elles soient minimales, car je pense fermement que la découverte par l'enfant lui-même est une méthode idéale de connaissance. Elles sont cependant motivées par le fait que, déjà en Cinquième et plus encore en Quatrième la matière enseignée devient parfois d'une difficulté telle que l'intelligence d'un enfant de 13 ans ne peut s'en saisir par ses propres moyens.

En Sixième la mathématique étant essentiellement descriptive, les diagrammes et les jeux imaginés par des pédagogues de renom permettent de faire face de manière satisfaisante à toutes les difficultés du programme. Mais en Cinquième et en Quatrième on voit poindre assez souvent ce qui constitue l'essentiel du travail mathématique, le raisonnement déductif. Je m'en tiendrai seulement à deux domaines où ce raisonnement s'exerce de manière soutenue, la géométrie en Quatrième et la résolution des équations.

Pour ce qui concerne la géométrie, ou tout au moins ce que nous en avons traité en cette fin de deuxième trimestre, c'est-à-dire droites du plan, parallélisme et projection, l'équipe de Strasbourg a adopté la progression suivante :

— première approche des axiomes d'incidence dans un plan à quatre points;

— dessin géométrique dans le plan matériel afin de visualiser les dits axiomes;

— mathématisation des situations qui viennent d'être envisagées;

— énoncés des axiomes; leur application à des plans finis;

— extension à un plan mathématique quelconque.

On a donc d'abord travaillé dans un plan à quatre points. Sur les conseils du psychologue attaché à notre équipe nous n'avons pas prononcé le mot plan; amusons-nous avec un ensemble à quatre éléments, tel était le titre de la première fiche de géométrie; de même les droites étaient appelées paires.

Nous avons cependant conservé le mot parallèle, parce que nous pensions que grâce à l'information, son sens est tellement vulgarisé que nous ne risquions pas, en l'employant dans ce cas particulier, de traumatiser les élèves.

Songeons par exemple à des expressions comme discussions parallèles, entreprises parallèles, polices parallèles, etc.

Cette fiche passa très bien.

La fiche suivante fut une fiche de dessin géométrique. Elle avait un but technique, en particulier la construction de parallèles par un procédé affine (règle et équerre, fausse si possible, compas interdit), mais aussi et surtout un but avoué dans sa conclusion, la nécessité de l'élaboration d'un modèle mathématique rendant compte aussi parfaitement que possible de la situation entrevue dans le plan matériel.

Dans les fiches suivantes la mathématisation ne posa pas de problème aux élèves tant que l'on s'en tint à des plans finis (plans à 4 points, plans 9 points). Les enfants pouvaient alors inventorier les objets sur lesquels ils travaillaient. Il n'en fut pas de même lorsqu'il fallut par exemple établir la transitivité du parallélisme dans l'ensemble des droites d'un plan mathématique qui pouvait être non fini. Incontestablement ce fut là un échec; 20 p. 100 seulement des élèves se montrèrent capables de saisir le raisonnement ou tout au moins de le reproduire.

Faut-il s'en étonner? Jadis aussi cette leçon était un test redoutable et bien peu nombreux étaient ceux qui le passaient avec succès.

Il me semble cependant que la progression que nous avons suivie à Strasbourg est préférable à l'ancienne (dessin géométrique, mathématisation dans un plan non fini) parce qu'elle a prouvé que la majorité des élèves étaient capables de manipuler les axiomes dans la situation plus simple des plans finis.

Sans cela 80 p. 100 des élèves n'auraient pas, au cours de cette leçon effectué de véritable travail mathématique; ils auraient certes fait du dessin géométrique et le professeur, sinon les élèves (notez cette restriction, je la justifierai plus loin), aurait pu croire qu'il enfonçait des portes ouvertes, les axiomes d'incidence.

Vint ensuite la leçon sur les projections. On travailla d'abord dans des plans finis. Là encore, après une intervention magistrale nécessitée par un début de fiche quelque peu rébarbatif, tout alla pour le mieux. Les élèves projetaient habilement et déjouaient facilement les quelques pièges que l'on peut imaginer dans ce genre d'exercice (par exemple prendre la droite sur laquelle on projette parmi celles de la direction de projection). Je voulus alors exposer une situation analogue dans le plan matériel.

Je croyais être rapidement compris. Las! Il fallut bien vite déchanter. Dans le plan matériel deux traits qui ne se coupent pas sont pour la plupart des élèves deux droites parallèles. Cela justifie ma restriction antérieure. On rencontre toujours la même difficulté lorsqu'il s'agit d'extrapoler à des objets non finis ce qui a été compris pour des objets finis.

A la lumière de cette expérience je pense avoir pris réellement conscience des limites du dessin géométrique en tant que support du raisonnement et de l'intérêt de la géométrie dans des plans finis pour ce même raisonnement. J'ai conscience également de l'insuffisance de ces plans finis qui ne peuvent servir de modèle à la réalité.

Pour ce qui concerne la résolution des équations, les élèves ont travaillé successivement dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et enfin $\mathbb{R}$. Chaque fois les axiomes permis et les règles de simplification qui en découlent étaient mis en évidence.

Une résolution d'équation reste toujours difficile en ce sens qu'elle nécessite un enchaînement judicieux des axiomes. Elle est incontestablement plus valable qu'avant comme travail typiquement mathématique, parce qu'elle casse cet automatisme qui était de règle lorsqu'on faisait opérer les élèves dans un ensemble $\mathbb{R}$ inavoué.

Je pense qu'en Quatrième il faut rester simple dans ce domaine et s'interdire tout cas pathologique (par exemple, résoudre dans $\mathbb{D}$ l'équation $3x = 2{,}7$) parce que l'on fausse alors le jeu naturel.

Je voudrais terminer sur une anecdote.

Après avoir fait réaliser les quelques encadrements qui devaient suggérer $\mathbb{R}$, j'ai demandé à mes élèves si, outre les nombres qu'ils avaient déjà rencontrés, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$ il y en avait beaucoup d'autres dans $\mathbb{R}$. Silence... Alors je fis voter, à mains levées, il est vrai. La majorité décida qu'il y en avait peu ; en fait nous n'avions guère encadré que $\sqrt{2}$, π et quelques fractions.

J'avoue que j'éprouvais alors une joie secrète de donner raison à la minorité qui, j'ose l'espérer, a été guidée dans son choix par autre chose que le hasard.

Notre collègue P. Lévy, professeur au Lycée expérimental Lambert à Mulhouse, fait partie de la même équipe que M. Auzé, auteur de l'article ci-dessus. Il nous adresse un rapport (concernant une classe de Quatrième, mixte, de 36 élèves et de niveau considéré comme « normal » pour l'enseignement long) beaucoup moins optimiste.

I. — Programme suivi.

En principe : le programme officiel, dans la mesure où il était porté à notre connaissance par les projets successifs de la commission compétente.

D'autre part, nous avons suivi les fiches fabriquées en commun à l'I.R.E.M. de Strasbourg.

Remarque sur le paragraphe I du projet de programme de mars 1971 :
La composition des applications n'étant pas au programme de Cinquième, on ne peut se contenter de l'évoquer en révision.

Remarques générales : L'approche des réels reste très difficile au niveau de Quatrième. La suppression de l'étude préalable de $\mathbb{Q}$ me semble alourdir et non alléger la tâche des enseignants et des élèves.

Concernant le paragraphe III : Il est très difficile de concilier « manipulations, exercices pratiques utilisant les instruments de dessin » avec la présentation abstraite, générale, indépendante de l'espace sensible, matériel ou physique qui ressort des autres lignes du programme.

D'autre part, comment expliquer, ou même présenter des constructions ou tracés géométriques *avant* d'avoir étudié la géométrie?

II. — Méthodes pédagogiques.

En raison de la difficulté de l'ampleur du programme, il n'a guère été possible de poursuivre l'enseignement non directif, sur fiches, qui était possible en Sixième et Cinquième.

Il a été constaté que les élèves de Quatrième n'étaient pas capables, au début de l'année scolaire de travailler avec leur cahier de cours, en l'absence de documents imprimés.

Nous avons alors introduit le premier fascicule expérimental de Galion 4^e, en signalant les paragraphes à savoir, ceux qui étaient à lire, ceux qui étaient facultatifs.

Par la suite, les élèves ont reçu les fiches fabriquées en commun à l'I.R.E.M. de Strasbourg, avec des explications complémentaires quand il le fallait.

Contrôle des connaissances : notamment par exercices de contrôle en classe; applications simples du cours.

« Exemple : à partir d'un nombre décimal, calculer son opposé, sa norme, son inverse, ses puissances d'exposants relatifs jusqu'à un certain rang. Résoudre des équations simples du premier degré en utilisant les opérations précédentes. »

— Travaux plus importants, à domicile, « exemple : étude du sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathbb{D}$ dont les éléments sont de la forme :

$$(\pm\, 2^n . 10^p) \vee (\pm\, 5^n . 10^p) \qquad n \in \mathbb{N}; \qquad p \in \mathbb{Z}$$

montrer que $\mathcal{G}$ est un groupe multiplicatif... »

III. — Difficultés.

Comme signalé au paragraphe I : les réels par encadrement; la géométrie dans sa présentation ensembliste et générale; la liaison entre cette géométrie et l'usage des instruments, etc.;

La résolution des inéquations du premier degré, pour les élèves faibles, était plus facile par les règles de transposition, division, etc. que par les relations d'ordre.

IV. — Succès.

En y passant beaucoup de temps, on arrive à faire acquérir « la notion de groupe » en développant en détail de nombreux exemples.

Il semble y avoir moins d'erreurs qu'autrefois sur le calcul des puissances.

En tout cas ce programme requiert une préparation approfondie de la part des maîtres et un effort soutenu des élèves.

Une dernière remarque, portant à la fois sur le programme et les difficultés.

Les démonstrations sur les figures traditionnelles (triangle, quadrilatère) étaient difficiles pour les élèves de Quatrième; il ne faudrait pas se contenter d'écrire « ... déduits, (théorèmes), raisonnements, comprendre et rédiger des démonstrations ». Il semble que ces difficultés ne seront pas moindres, au contraire, avec le nouveau programme et qu'elles sont sous-estimées actuellement, ce qui pourrait entraîner de fâcheuses conséquences...

V. — Informations complémentaires.

Signalons qu'au lycée de Mulhouse, il existe 8 classes de Quatrième expérimentales.

a) Classes Quatrième-2 et quatrième-3, de niveau comparable à la Quatrième-1, difficultés supplémentaires : le professeur devant être envoyé par l'I.P.N. n'est jamais arrivé et le collègue nommé longtemps après la rentrée n'avait pas enseigné en Cinquième expérimentale en 1969-70.

b) Classe Quatrième-4 (niveau enseignement court) a porté moins d'intérêt au nouveau programme, une grande partie des élèves n'ayant pas l'intention (ou les capacités) de rester au lycée au delà de la scolarité obligatoire.

c) Classe Quatrième-6 (niveau C.E.G.) a reçu un enseignement modifié dans le sens du concret (par rapport au programme nouveau).

d) Annexe Wolf : l'expérience n'a pas été autorisée dans ces classes, mais seulement tolérée depuis trois ans. Deux classes ont reçu le même enseignement que les classes 1, 2, 3 du bâtiment principal. Leur hétérogénéité a causé des difficultés et des résultats assez inégaux suivant les élèves.

e) Dernière classe Wolf. Notre collègue, Eprinchard, a adapté le programme à sa classe, notamment en introduisant le (corps) $\mathbb{Q}$ avant $\mathbb{R}$ et en développant la géométrie sous forme concrète et expérimentale; les résultats sont satisfaisants.

A Nancy

Bilan concernant le paragraphe II.

L'étude des nombres réels est terminée à peu près dans toutes les classes (un léger retard est néanmoins enregistré dans un C.E.S. où le niveau des élèves est moins élevé et où quelques difficultés surgissent de la part des parents qui s'inquiètent).

L'exposé de la question n'a pas été tout à fait le même dans les différentes classes, mais il est dans l'ensemble à peu près celui-ci : on étudie les types d'encadrements d'un nombre décimal suggérés par le programme : $[a.10^p, (a+1)\ 10^p[$; $]a.10^p, (a+1)\ 10^p]$; $[a.10^p, (a+1)\ 10^p]$, avec a et p éléments de $\mathbb{Z}$.

On considère ensuite les différents types de suites décimales illimitées périodiques ou non, que l'on encadre et on débouche toujours sur le théorème des intervalles emboîtés soit pour définir le nombre réel, soit après l'avoir défini comme suite décimale illimitée. La compréhension de ce théorème (admis) est l'objectif de toute la théorie. On utilise ensuite ce théorème pour définir la somme et le produit de deux nombres réels avec étude des propriétés de l'addition et de la multiplication; on résout ensuite les équations $ax = 1$; $x^2 = a$, $ax = b$, en travaillant uniquement sur des exemples.

Cette partie du programme est évidemment délicate à traiter; il y a des difficultés concernant l'encadrement des nombres négatifs; des difficultés d'expression et en plus du vocabulaire utilisé dans le libellé du programme il faut souvent introduire des locutions plus ou moins heureuses, en particulier pour faire comprendre la notion d'intervalles emboîtés dont la largeur tend vers zéro quand leur nombre augmente indéfiniment.

Dans les classes où le niveau est plus faible, après avoir introduit beaucoup de notions — ce qui a demandé beaucoup de temps — il faut finalement admettre la plupart des résultats pour continuer.

Cependant, si l'on considère la majorité des classes expérimentales, il semble que le bilan soit positif, les élèves s'intéressent à la question, ne se lassent pas des calculs, qui, dans certaines classes, sont facilités par l'emploi de petites machines à calculer Curta, et paraissent avoir de l'ensemble des nombres réels, une intuition plus correcte que celle qu'en avaient leurs aînés; cette partie du programme semble donc bien à sa place dans la classe de Quatrième.

Méthodes de travail.

C'est toujours un travail d'équipe dont l'élément de base reste la fiche rédigée en commun par les professeurs de cette équipe; fiche rédigée de manière à pouvoir être utilisée de façon très souple par chacun suivant son tempérament et son public, soit pour introduire une notion nouvelle, soit pour faire des exercices d'application, soit comme moyen unique d'étude d'une notion.

Les élèves peuvent travailler individuellement sur leur fiche (ou par petits groupes), la synthèse étant ensuite faite en classe où la fiche peut être étudiée d'abord en commun sous la direction du professeur.

Dans certains cas, un cours de forme assez classique peut être fait dans le but d'apprendre aux élèves à comprendre une démonstration et à l'exprimer correctement, c'est en Quatrième, en effet, que ce but doit être atteint.

Les séances de travaux dirigés permettent diverses activités, calcul numérique, préparation de problèmes, rédaction d'un travail élaboré en commun;

malheureusement un groupe de 24 élèves est trop lourd pour réaliser un travail fructueux.

Des tests de contrôle ont lieu fréquemment en classe et des exercices et problèmes sont donnés à préparer à la maison.

A Marseille

M^me^ BÉNIAMINO, M^lle^ PISSAVIN,
M^me^ ROSENBAUM,
Lycée Montgrand.

Conditions de travail.

— 2 classes de 38 élèves,
— 1 classe de 21 élèves.

Méthodes.

L'utilisation des fiches donne lieu, en général, à une recherche individuelle ou en groupe très appréciée des élèves. Cependant, ce travail dans les classes de 38 élèves ne peut être exploité à fond, car le contrôle et l'encadrement sont plus difficiles.

Après un certain temps consacré à cette recherche, un exposé fait le plus souvent par un élève, apporte une solution claire et nette à l'ensemble de la classe et permet de mettre au point les notions nouvelles.

Programme.

Le programme suivi est celui de la Commission Lichnerowicz (avant-dernière rédaction, paru dans le n° 275-276 du *Bulletin de l'A.P.M.*). Ce programme est la suite logique de ceux de Sixième et Cinquième. Il est très cohérent et permet l'utilisation de toutes les notions antérieures pour l'étude de la géométrie.

L'étude des réels telle qu'elle est indiquée a suscité un grand intérêt parmi les élèves. Elle a permis de nombreuses applications de type numérique. (Ce « nouveau programme » n'empêchera pas nos élèves de savoir calculer!) Nous avons insisté chaque fois sur les propriétés intervenant dans les différents mécanismes de calcul. Nos élèves ont commencé la Quatrième en ayant conservé les notations 2^- (pour -2) et 2^+ (pour $+2$). Nous pensons qu'il ne faut pas modifier cette notation (ou une notation équivalente) pendant la classe de Cinquième. Le passage de 2^+ à $+2$ et 2 a été fait sans difficultés dès le début de l'année; le passage de 2^- à -2 a été fait pendant l'étude des suites décimales illimitées. A la suite de l'étude des propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$, les élèves ont posé les calculs de la manière classique. Ceci a permis de bien insister sur les divers sens attribués au signe moins et évitera peut-être, le mauvais réflexe faisant de $-x$ (x élément de $\mathbb{R}$) un nombre négatif.

Ce n'est pas en géométrie, que les élèves ont fait leurs premières démonstrations. L'an dernier déjà, ils en ont eu l'occasion à propos des entiers relatifs. Ici la difficulté provient de ce qu'il leur semble qu'un dessin peut remplacer un raisonnement; mais ce n'est pas là un fait nouveau. Ces premières démonstrations ont pu leur être rendues nécessaires par l'utilisation des diagrammes de Venn.

Difficultés.

Les réels devant être connus pour étudier la géométrie, nous n'avons pu l'aborder qu'en cours de deuxième trimestre. Ceci laisse assez peu de temps pour traiter un programme long, qui comprend une partie nouvelle et importante.

D'autre part, ce programme ne laisse pas assez de libertés pour l'exposé de certains points (les axiomes de géométrie, par exemple, qui amènent par la suite les élèves à démontrer des propositions évidentes pour eux : quel que soit le repère sur la droite affine réelle les notions de « milieu », « entre », sont conservées).

(Tout ceci n'a-t-il pas été modifié dans le nouveau projet?)

La notion de groupe devant être dégagée qu'avec des exemples du programme, risque de ne laisser qu'une trace bien faible dans l'esprit des élèves. Pourquoi ne pas traiter des exemples de groupes finis, permettant de « mathématiser » une situation et d'étudier une même structure sous des aspects divers?

Nous devons déplorer les effectifs de deux classes (38 élèves), où les difficultés rencontrées sont plus grandes.

Conclusion.

Le programme, bien que long, possède un très grand intérêt et est très abordable par les élèves.

A Clermont-Ferrand

Nos collègues Mlles DERAMONDT, COGNET, BÉCAMEL, M. BRACQUEMOND, *font le « point » de la situation dans laquelle ils se trouvent,* en avril, *en classe de Quatrième.*

Depuis le début de l'année scolaire, la parution des nouveaux programmes ayant été annoncée à plusieurs reprises comme imminente, nous avons préféré retarder l'étude de l'introduction des réels et de la géométrie. Si nous sommes en retard probablement pour la géométrie, l'étude détaillée de l'ensemble $\mathbb{Z}$, de l'ensemble des décimaux et des groupes, doit nous permettre d'aller assez vite pour le calcul dans $\mathbb{R}$.

Comme en Sixième et Cinquième nous avons travaillé avec des fiches avec cependant une part plus importante de travail collectif. En particulier, la rédaction des fiches se prête mal à l'enchaînement d'une démonstration.

Programme suivi :

Logique. Révisions et compléments. Introduction des connecteurs, $\wedge$, $\vee$, W (ou e), « entraîne », « logiquement équivalent » et contraposition jugés utiles dans de nombreuses démonstrations.

Relations. Révisions et compléments. Les élèves sont toujours aussi intéressés que dans les classes précédentes, pas de difficultés majeures.

Groupes. Étude plus systématique que ne le demande le programme. Notion bien acquise : nous avons pu le vérifier dernièrement en demandant de démontrer — en exercice de contrôle — que l'ensemble des puissances de dix muni de la multiplication est un groupe.

Révision de $\mathbb{Z}$. Nous y avons passé beaucoup de temps! (environ 5 semaines), les élèves éprouvant de nombreuses difficultés (indépendantes de tout programme) tant pour la factorisation que pour les calculs faisant intervenir simultanément l'addition et la multiplication.

Ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux. Nous avons fait de nombreux exercices, certaines difficultés rencontrées dans $\mathbb{Z}$, réapparaissant dans $\mathbb{D}$.

Début de la géométrie. Présentation des axiomes d'incidence. Étude d'un ensemble à quatre éléments. Les élèves, un peu saturés de calcul, semblent, dès l'abord, très intéressés.

Difficultés générales.

En dehors des problèmes posés par le calcul, les élèves ont beaucoup de peine à faire par eux-mêmes des démonstrations. Exemples : la transitivité, l'antisymétrie de certaines relations dans un ensemble. Ils avaient jusqu'à présent, l'habitude de raisonner surtout sur des ensembles finis se prêtant à des représentations concrètes. Il nous semble que nous aurions pu et dû approfondir beaucoup plus l'étude de $\mathbb{Z}$ en Cinquième, de façon que les élèves aient la maîtrise des calculs sur les entiers.

En ce qui concerne la partie du programme non encore étudiée, l'introduction de la droite, à partir d'une famille de bijections, nous paraît assez délicate.

A Lorient

Équipe des expérimentateurs du Lycée Dupuy de Lôme et C.E.S. de Kerentrech.

I. — Conditions de l'expérience.

L'expérience porte à Lorient sur 7 classes de Quatrième, soit 186 élèves.

• ***Le programme*** suivi a été le programme officiel (paru le 1er février 1971).

• ***Méthodes pédagogiques.*** Les élèves disposent de fiches. La distribution de ces fiches est en général précédée par une présentation orale.

Nous faisons travailler les élèves pratiquement au même rythme car certaines démonstrations sont étudiées en commun et les interventions orales sont nombreuses.

• ***Difficultés et succès.***

La principale difficulté est la longueur du programme, ce qui ne permet pas d'approfondir les points délicats. Nous craignons que faute de temps, on en arrive à sacrifier le raisonnement au profit des « recettes ».

II. — Programme traité.

Voici point par point ce que nous avons traité avec les élèves jusqu'à ce jour (deux trimestres).

1° Relations ; groupe.

Pas de difficultés particulières. La notion de groupe est très bien admise par les élèves.

2° Décimaux.

Nous avons choisi la méthode suivante pour construire $\mathbb{D}$:

1) $A = \{(x, y) / x \in \mathbb{Z} \text{ et } y = 10^k, k \in \mathbb{N}\}$

On considère dans A la relation $\mathcal{R}$ définie de la façon suivante :

$(a, 10^p)$ et $(b, 10^q)$ étant des éléments quelconques de A, on dit que $(a, 10^p)$ et $(b, 10^q)$ sont en relation pour exprimer que : $a \times 10^q = b \times 10^p$.

Nous avons démontré avec les élèves que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

L'ensemble des décimaux relatifs $\mathbb{D}$ est donc l'ensemble des classes d'équivalence, notées $\overset{\bullet}{\widehat{(a, 10^p)}}$.

2) Dans A on considère l'opération notée $*$ telle que

$$(a, 10^p) * (b, 10^q) = (ab, 10^{p+q})$$

Nous avons admis que la relation $\mathcal{R}$ et l'opération notée $*$ étaient compatibles. (Constatation sur quelques exemples seulement.)

3) Dans $\mathbb{D}$, on définit une opération appelée multiplication et notée $\otimes$, telle que :

$$\overset{\bullet}{\widehat{(a, 10^p)}} \otimes \overset{\bullet}{\widehat{(b, 10^q)}} = \overset{\bullet}{\widehat{(ab, 10^{p+q})}}$$

Étude des propriétés de la multiplication dans $\mathbb{D}$.

4) Conventions d'écriture :

— $\mathbb{D}_1$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{D}$ du type $\overset{\bullet}{\widehat{(a, 10^0)}}$ avec $a \in \mathbb{Z}$.

On identifie $(\mathbb{D}_1, \otimes)$ et $(\mathbb{Z}, \times)$ et on écrit : $\overset{\bullet}{\widehat{(a, 10^0)}} = a$.

— $\mathbb{D}_2$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{D}$ du type $\overset{\bullet}{\widehat{(10^p, 10^q)}}$.

On identifie $(\mathbb{D}_2, \otimes)$ et $(E, \times)$, E étant le groupe des puissances de 10, et on écrit : $\overset{\bullet}{\widehat{(10^0, 10^k)}} = 10^{-k}$.

— Tout élément de $\mathbb{D}$ s'écrit alors $a \times 10^p$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

Remarques sur cette méthode :

Ayant introduit précédemment $\mathbb{Z}$ comme ensemble de classes d'équivalence de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il nous a semblé intéressant de construire $\mathbb{D}$ de façon analogue. Nous nous sommes refusés à donner l'écriture « $a \times 10^p$ » sans expliquer le sens du signe « $\times$ ».

L'étude de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est un bon exemple de démonstration. Les élèves ont été intéressés.

Le problème de l'identification reste cependant délicat. Ce dernier point n'a pas été compris par tous les élèves.

Cette introduction de $\mathbb{D}$, très formatrice au point de vue du raisonnement est cependant très longue.

Ensuite les calculs dans $\mathbb{D}$ n'ont pas posé de problèmes particuliers, quelle que soit l'écriture des nombres.

3° Calculs approchés.

Nous avons suivi le programme point par point. Il n'y a pas de difficultés particulières, mais « il faudrait » étudier de nombreux exemples afin de familiariser les enfants avec les suites décimales illimitées.

4° Tout au long de l'année, nous avons entraîné les élèves au calcul algébrique : factorisation, développement, puissance.

5° Géométrie.

Nous n'avons pas encore traité cette partie du programme avec les élèves, car nous avons besoin de $\mathbb{R}$ pour traiter la géométrie de la droite que nous comptons faire avant la géométrie du plan. Nous nous sommes inspirés pour préparer cette première partie des indications données dans l'annexe accompagnant le projet de programme du 1er février 1971.

De toutes façons, il est hors de question que nous ayons le temps de finir le programme.

P. S. — Nous n'avons pas cherché à rédiger un article, mais simplement donner quelques indications sur les options que nous avons prises et les difficultés rencontrées.

A Boulogne-sur-mer

Mathématique. Expérimentation en classe de Quatrième.

Expériences du C.E.S. Cazin de Boulogne-sur-Mer
et du C.E.S. Langevin de Boulogne-sur-Mer.

Mme Boulloch; MM. Lecomte, Jeannin, Honvault,
Montador, Muselet, Pauwels, Vache.

I. — Conditions de l'expérience.

Au C.E.S. Cazin. — A Boulogne-sur-Mer, la réforme de l'enseignement étant appliquée intégralement, tous les élèves sortant de l'école primaire entrent dans un C.E.S. L'expérience a démarré dans toutes les Sixièmes du

C.E.S. Cazin en septembre 1968. C'est dire qu'il n'y a pas eu sélection au départ. L'expérience touche actuellement tous les élèves de Quatrième (250 environ). Les classes sont homogènes et un emploi du temps aménagé permet aux élèves de changer de niveau et d'aller dans une classe où le rythme est plus adapté à leurs possibilités.

L'équipe qui mène l'expérience est composée de trois professeurs certifiés et de trois P.E.G.C. Cete équipe travaille en collaboration avec M. Jeannin, assistant à la Faculté des Sciences de Lille et membre de l'I.R.E.M. de Lille.

Une réunion hebdomadaire de deux heures est prévue à cet effet.

Au C.E.S. Langevin. — L'expérience est menée dans une seule classe de Quatrième par M. Pauwels (professeur détaché à l'I.R.E.M. de Lille).

II. — Programme suivi.

Nous avons travaillé à partir du projet de programme de la Commission ministérielle pour l'enseignement des mathématiques paru avant la rentrée 1970-71.

En algèbre, nous avons choisi de traiter les rationnels avant les réels.

— D'une part sollicités par les élèves : lors de la résolution d'équations dans $\mathbb{Z}$ ils nous ont fréquemment demandé s'il n'était pas possible de construire un ensemble plus grand que $\mathbb{Z}$ et où les équations du type $ax = b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) ont toujours une solution.

— D'autre part, pour la partie géométrie, le plan adopté nécessite l'étude de $\mathbb{Q}$ avant celle de $\mathbb{R}$.

Une étude sommaire des réels est prévue en fin de Quatrième.

Du point de vue pratique, les calculs sur les décimaux, les calculs dans $\mathbb{Q}$, les approximations de rationnels par des décimaux, donneront aux enfants les techniques indispensables dans le domaine du numérique.

D'un point de vue plus théorique, la progression : calcul dans un groupe, dans un anneau ($\mathbb{Z}$ et entiers modulo n) puis dans un corps ($\mathbb{Q}$ et entiers modulo un nombre premier), permet à l'élève de mieux « penser » ses calculs et d'échapper à une mécanisation précoce.

En géométrie, nous sommes d'accord sur la répartition adoptée par la commission, à savoir : géométrie affine en classe de Quatrième et géométrie métrique en classe de Troisième. Quant aux méthodes à adopter pour traiter ce programme, nous pensons qu'il faut que l'enfant aille à la découverte des axiomes plutôt que de les lui imposer *a priori*. Ceci nous a amené à faire dégager le modèle mathématique à partir du dessin géométrique. Il importe qu'à l'issue de toute démonstration l'enfant revienne à une vérification graphique, il part du réel, pour revenir au réel, mais enrichi.

Programme suivi, ce qui a été traité.

a) *Révisions : Relations (notions acquises en Sixième et Cinquième) ; Calculs dans $\mathbb{Z}$; valeur absolue et ordre dans $\mathbb{Z}$.*

b) *Nombres à virgule. Addition, multiplication, ordre.*

Nombres décimaux positifs. Construction de l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux relatifs. Écriture d'un décimal relatif sous la forme a 10^p ($a, p \in \mathbb{Z}$).

c) *Dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$, nombreux calculs sur les expressions algébriques, factorisation, « identités » remarquables, etc.*

d) *Approche de la structure de groupe.*

Étude de nombreuses opérations : $\cap$, $\cup$, Δ, composition d'applications, etc.

Congruences dans $\mathbb{N}$. Addition et multiplication dans $\mathbb{N}/k$.

Tables de Pythagore.

Groupe. Équations dans un groupe (nombreux exercices).

Propriétés des groupes.

e) *Géométrie sur un quadrillage. Groupe des translations.*

f) *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels (traité au C.E.S. Langevin).*

Définition. Addition. Multiplication. Ordre. Résolution d'équations du type ($ax = b$) *et d'inéquations du type* $ax \leqslant b$.

g) *Géométrie plane.*

Axiomes d'incidence dégagés à partir du dessin géométrique. (Une étude du plan affine à 4 points a été faite auparavant).

Positions relatives de deux droites. Parallélisme.

h) *Calcul numérique (utilisation des machines Curta).*

i) *Logique et cartes perforées.*

Ce qui reste à faire :

a) L'ensemble $\mathbb{Q}$ (au C.E.S. Cazin).

b) En géométrie : translations planes, etc. (voir Annexe Géométrie).

c) Notions sur les réels.

III. — Méthodes pédagogiques.

Travail par groupes.

Les élèves de chaque classe sont répartis en groupes de 3 ou 4 (selon leurs affinités). Ces équipes peuvent d'ailleurs se modifier selon les désirs de ses membres.

L'intérêt du travail en groupe n'est plus à faire. Nous signalerons seulement à nos collègues l'article de M. Kerjan (*Bulletin de l'A.P.M.*, n° 269-270, *Travail sur fiches.*

Dès le début de la classe de Sixième, les élèves ont été accoutumés à travailler sur fiches. En Quatrième nous continuons d'utiliser cette méthode qui présente de nombreux avantages.

— Chaque élève travaille à son rythme.
— Il a constamment sous les yeux les renseignements dont il a besoin.
— Tous les élèves sont actifs.
— La fiche ne présente qu'un seul concept à la fois.
— Les fiches constituent un dossier personnel pour l'enfant.
— Un élève absent peut facilement combler son retard.
— Une fiche n'ayant pas donné satisfaction à l'usage peut être remplacée.
— Des fiches plus difficiles sont proposées aux meilleurs élèves.

Cette méthode de travail n'est pas une fin en soi. Elle est complétée par d'autres procédés pédagogiques.

— Certaines notions sont abordées par une discussion collective (ce procédé est plus fréquemment utilisé en Quatrième que dans les classes précédentes).

— A l'issue du travail sur fiches, une synthèse collective peut être élaborée par les élèves et le professeur.

— La structuration de la classe en équipes de 3 ou 4 peut être modifiée à l'occasion de problèmes ouverts.

Ces problèmes ouverts ont eu, par exemple, pour objet des questions de logique, d'algèbre (recherche d'exemples, de contre-exemples, recherche des tables de groupe parmi les carrés latins, etc.).

Outre le travail en classe, l'élève est amené, par moments, à chercher et à rédiger des exercices à la maison ; cela afin de perfectionner son expression écrite.

De tout ceci, il faut retenir qu'il n'y a pas « une » méthode mais des procédés très souples permettant le plein épanouissement de l'élève sans qu'il y ait de contrainte imposée par tel ou tel dogmatisme.

IV. — Difficultés, succès, échecs.

Il est certain que les nouveaux programmes de Quatrième présentent un écueil pour certains élèves. Alors qu'en Sixième et Cinquième on se limite à une approche naïve et intuitive de notions mathématiques, la classe de Quatrième marque une tendance très nette à l'axiomatique et dans certains cas, exige une démonstration de l'élève (notamment en géométrie). Cela est d'ailleurs normal. On constate qu'un nombre d'élèves, de plus en plus important, ressent la nécessité de « La » démonstration (par exemple, pour les propriétés des lois $+$ et $\times$ dans $\mathbb{Q}$ les enfants ne se contentent plus d'exemples numériques mais raisonnent à partir de l'expression générale d'un rationnel).

En géométrie des propriétés ont été établies à partir du théorème de

Chasles, de façon rigoureuse pour certains, de manière encore « intuitive » par d'autres.

On voit de nouveau surgir ce décalage entre les élèves à propos de la résolution d'équations dans un groupe. Beaucoup ont compris, une fois pour toutes, que le processus était le même et sont capables d'adapter à chaque cas particulier la méthode générale. Pour d'autres, au contraire, les conditions du problème sont contingentes et ils n'arrivent pas à dégager le modèle mathématique.

Il faut cependant signaler que, malgré les difficultés rencontrées, difficultés qui existaient par ailleurs dans l'enseignement des anciens programmes, il se dégage des expériences présentes certains faits qui nous laissent penser que nous sommes dans la bonne voie. Il suffit, pour cela, de constater que les enfants sont toujours parfaitement conscients des structures dans lesquelles ils opèrent. Il n'y a plus formation de stéréotypes provoquant par la suite les blocages intellectuels que nous déplorons tous. En algèbre, l'élève reste parfaitement maître de ses calculs; il n'y a pas mécanisation, mais réflexion à partir des propriétés de telle ou telle structure. En géométrie, notre expérience est trop récente et trop partielle pour tirer des conclusions définitives. Il s'agit, pour l'instant, d'établir un compromis entre, d'une part, l'accession aux structures importantes de la géométrie affine puis métrique, et d'autre part, l'aspect utilitaire dont ne peut se dégager cette partie de la mathématique. C'est une des raisons qui nous a amené à conduire ce programme en essayant de satisfaire ces deux points de vue.

A Limoges

Expérimentation en 4e.

Dans l'Académie de Limoges, depuis trois ans, de la Sixième à la Quatrième, des expérimentations existent dans deux Lycées de filles (5 classes), un C.E.S. (3 classes) et deux C.E.G. L'équipe comprend, sous la direction de M. Couty, professeur à l'Université de Limoges, un inspecteur-professeur, quatre certifiés, quatre P.E.G.C., un maître-auxiliaire. L'expérimentation est conduite dans six classes dites I et sept classes dites II.

Travail de préparation. L'équipe se réunit régulièrement le vendredi de 20 h 30 à 23 heures (ou plus) tous les quinze jours, avec la participation parfois de l'Inspecteur Pédagogique Régional. Ces réunions ont deux buts essentiels :

— faire le point sur les succès ou les échecs de la quinzaine passée; pour les causes d'échecs, la participation aux réunions d'un psychologue scolaire aurait peut-être rendu service;

— concevoir les fiches pour la quinzaine à venir.

La progression pour assurer l'étude complète du programme pendant l'année scolaire est sans cesse revue et aménagée selon les intérêts et les possibilités des enfants.

Après chaque réunion, les fiches étudiées, mises au point sont confiées au Centre Régional de Documentation Pédagogique qui assume la lourde tâche matérielle de diffuser les fiches pour les élèves des classes d'expérimentation.

Quelques constatations.

1° Élèves. — Si les fiches pour la classe de Sixième permettaient au professeur d'être un animateur de travail individuel, le progrès vers l'abstraction l'oblige au niveau de la Quatrième à agir plus souvent pour organiser des synthèses collectives pour obtenir un travail de pensée de plus en plus rapide.

A ce propos, nous déplorons en Quatrième que les élèves des classes II aient le même horaire que les classes I. Si nous pouvions disposer d'une heure de travail dirigé ou de soutien pour ces élèves, ils auraient moins de difficultés pour comprendre, puis utiliser les modèles mathématiques. Nous avons constaté que la méthode inductive, avec une approche plus lente des concepts, avait d'heureux effets sur les élèves moyens.

Les fiches sont collationnées dans un cahier sur lequel de temps en temps des lois générales sont inscrites. L'utilisation du cahier d'essai réservé à la mathématique, a très souvent rendu d'importants services pour consolider les connaissances des élèves moyens.

Le contrôle des connaissances est assuré par quelques fiches-tests, données dans toutes les classes d'expérimentation à des dates variables, car l'expérience nous a montré que pour certains concepts quelques classes allaient plus vite que d'autres, alors que parfois l'inverse se produisait. La remarque ci-dessus pour les classes II entraîne le professeur à limiter, pour celles-ci, les applications à des exercices numériques surtout.

2° Professeurs. — Le travail de conception en commun a permis d'éviter des hésitations dans les classes, de promouvoir un enseignement cohérent avec ses qualités et aussi ses défauts. Parfois, en ce qui concerne les démonstrations, nous avons été un peu ambitieux, en vue de la continuité avec les classes du second cycle. Certaines classes I ou II d'ailleurs ont joué le jeu, mais on a été obligé de revenir à la simple description du modèle mathématique dans d'autres classes. Nous restons persuadés qu'il faut obliger les enfants dès la Sixième, à user de la démonstration dans des cas très simples sur les ensembles $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Par exemple dans $\mathbb{Z}$:

$$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$$

alors que cette propriété est admise dans $\mathbb{N}$.

Notre travail nous paraît être une réussite en ce qui concerne le début du programme de Quatrième sur les groupes, nous avons obtenu la créativité des enfants et une recherche convenable de cette structure. En calcul numérique, nous avons l'impression d'une efficacité certaine, mais il faut attendre la classe de Seconde pour se prononcer définitivement. L'approche des réels par les encadrements, les intervalles a donné lieu à l'étude de lois de composition, interne ou externe dans l'ensemble de ces objets. Nous ne pensons pas avoir pleinement réussi. Pour les résolutions d'équations et la géométrie les enfants ont retrouvé un meilleur rythme de travail.

3° Aspect matériel. — A la joie du travail en commun succède toujours la rédaction des fiches, l'impression, la correction des épreuves. Après trois années, nous constatons que malgré beaucoup de précautions, sans ménager notre temps, nous avons laissé quelques imprécisions dans nos fiches. Certaines imprécisions sont issues de nos réunions, mais le plus souvent ce sont les élèves de quelques classes qui nous les ont révélées pendant leurs travaux.

Notre expérience montre qu'il est nécessaire que les établissements scolaires assurent une partie de la duplication pour que le travail par fiches soit efficace afin que les professeurs ne soient pas astreints à un travail matériel trop lourd.

Mise en œuvre du programme.

Les hypothèses de travail de l'équipe pour l'application du programme défini par la Commission Ministérielle ont été les suivantes :

— Continuité de l'enseignement mathématique de l'école élémentaire au second cycle;

— Construction des ensembles de nombres, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{R}$, par chaque enfant selon son propre rythme;

— Approche des notions par des manipulations physiques ou intellectuelles;

— Exercices d'application pour consolider les connaissances.

Ce qui revient à ce qu'a fort bien expliqué Gilbert Walusinski dans un *Bulletin de l'A.P.M.* il y a quelques années. L'enfant construira ses propres mathématiques selon le schéma suivant :

- de l'observation à la notion,
- de la notion à la théorie,
- de la théorie à l'application,
- de l'application à de nouvelles observations, et le cycle d'étude recommence.

L'enseignement donné s'est orienté dans deux directions complémentaires : affiner l'outil mathématique et vérifier dans les applications le bien fondé de cet affinage (applications dans les domaines des diverses sciences physiques et humaines). Nous avons essayé de discerner ces deux voies à chaque instant.

La continuité avec l'enseignement élémentaire se situe au niveau du numérique, et l'on peut regretter que la classe de Quatrième n'use pas plus des « opérateurs numériques » liés à $\mathbb{Q}$ pour présenter $\mathbb{R}$. En effet, les enfants de l'école élémentaire jouent avec plaisir avec cette notion de fonction dans des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$.

Les démonstrations, qu'elles soient algébriques ou géométriques, assurent une approche très intéressante des programmes du second cycle.

En ce qui concerne les ensembles de nombres, si la construction de $\mathbb{Z}$ en Sixième et Cinquième à partir de $\mathbb{N}$ a été aisée (réserves à faire au sujet de la multiplication dans $\mathbb{Z}$), la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{D}$ ne nous a pas satisfait complètement, c'est-à-dire que les enfants se sont sentis plus mal à l'aise. Les remarques ci-dessous ont entraîné un redoublement d'attention de notre part afin de faire coïncider nos hypothèses de travail et la lettre du programme.

Pour l'étude des ensembles de nombres, nous voulions respecter les programmes et aussi nos hypothèses de travail qui peuvent se résumer dans le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & Z \arrow[dr] & & \\ N \arrow[ur] \arrow[dr] & & Q \arrow[r] & R \\ & Q_+ \arrow[ur] & & \end{tikzcd} \qquad \text{avec } D \subset Q$$

Les programmes ne parlent pas de $\mathbb{Q}$, nous n'avons pas fait une étude mathématique de cet ensemble; nous avons construit $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{D}$. Nous nous sommes heurtés à un certain nombre de difficultés, mais en même temps nous avons fait découvrir l'unité de la mathématique à nos élèves.

a) Nos élèves ont appris à poser à l'école élémentaire une division et à effectuer des divisions avec des nombres décimaux. La division leur apparaît toujours possible. Implicitement ils raisonnent dans un corps et non dans un anneau. Nous avions avantage à considérer pour eux, afin d'être plus précis sur les structures mathématiques, l'inclusion $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

b) Les décimaux sont plus faciles à manipuler que les rationnels à cause de leur écriture. Les calculs numériques sont faciles à présenter. Mais nous sommes amenés dans l'approche de $\mathbb{R}$ à résoudre des équations telles que :

$\frac{a}{b} = x \Leftrightarrow a = bx$ vraies uniquement dans $\mathbb{R}$, or, le calcul pratique pour les enfants se fait apparemment dans $\mathbb{D}$.

c) Mathématiquement, $\mathbb{R}$ est un corps commutatif parce que $\mathbb{Q}$ en est un. Nous avons dû affirmer dans le passage $\mathbb{D}$ à $\mathbb{R}$ un certain nombre de résultats, qui peuvent être démontrés dans $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\left.\begin{matrix}a \geqslant b\\ c > 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow ac \geqslant bc$	$\left.\begin{matrix}a \geqslant b\\ c > 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}ac \geqslant bc\\ c > 0\end{matrix}\right.$	$\left.\begin{matrix}a \geqslant b\\ c > 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}ac \geqslant bc\\ c > 0\end{matrix}\right.$
$a = bx \Rightarrow \dfrac{a}{b} = x$	$a = bx \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = x$	$a = bx \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = x$
$\left.\begin{matrix}a = b\\ c \neq 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow ac = bc$	$\left.\begin{matrix}a = b\\ c \neq 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}ac = bc\\ c \neq 0\end{matrix}\right.$	$\left.\begin{matrix}a = b\\ a \neq 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}ac = bc\\ c \neq 0\end{matrix}\right.$

Admettre ... $\Leftrightarrow$ ... pour les enfants, alors que nous ne pouvons étudier dans $\mathbb{D}$ ... $\Rightarrow$ ... n'a pas été facile.

d) Les enfants ont très bien compris, malgré quelques lourdeurs dans les calculs, les constructions selon les processus suivants.

En Sixième, puis Cinquième, nous avons fait apercevoir la construction de $\mathbb{D}$ considéré comme sous-ensemble de $\mathbb{Q}$. Actuellement, la construction de $\mathbb{Q}^+$ est amorcée à l'école élémentaire par l'intermédiaire des « opérateurs ». Ainsi, en Sixième et Cinquième, nous avons fait comprendre les constructions de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ (avec $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$) par le passage aux ensembles quotients. Cette méthode de travail a plu aux enfants.

En Quatrième, le respect du programme et le manque de temps nous ont obligés à abandonner en partie cette attitude, et nos élèves n'ont pas toujours compris.

e) La construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{D}$ a permis de consolider les techniques de calcul pour la division. Sur des exemples numériques, nous avons essayé de suggérer que le corps $\mathbb{R}$ devait sa structure plus à $\mathbb{Q}$ qu'à $\mathbb{D}$. Ainsi, nous avons montré les liens qui existent entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, non seulement dans le sens du programme où $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, mais dans le sens du schéma ci-dessus :

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}.$$

f) Sur le plan pratique, on montre que les ensembles construits à partir des classes d'équivalence forment une « collection » distincte de $\mathbb{R}$. Pour le physicien, c'est la différence entre le dénombrable et le « continu physique ». Sans aucun doute, la construction de $\mathbb{R}$ par les encadrements est bénéfique pour les applications physiques.

A titre d'exemples, nous présentons trois fiches :

1° en Cinquième, Ordre dans $\mathbb{Z}$;

2° en Quatrième, Ordre dans $\mathbb{D}$;

3° en Quatrième, une approche de la géométrie.

Notre jeu de fiches est disponible au C.R.D.P. de Limoges, 44, cours Gay-Lussac.

***

Ordre dans $\mathbb{Z}$ (classe de 5^e).

I

On considère la relation R définie dans $\mathbb{Z}$ par :

$$\boxed{\begin{array}{c} a \mathrel{R} b \Leftrightarrow (\text{il existe un entier naturel } x, (x \in \mathbb{Z}^+) \\ \text{tel que : } a = b + x.) \end{array}}$$

1° Vérifier que : $12 \mathrel{R} 5$; $\overline{13} \mathrel{R} \overline{17}$; $4 \mathrel{R} 0$;
$0 \mathrel{R} \overline{5}$; $9 \mathrel{R} \overline{14}$; $\overline{7} \mathrel{R} \overline{7}$.

2° La relation R est-elle réflexive? Symétrique? Antisymétrique? Transitive? Comment appelle-t-on une telle relation?

Notation: $a \mathrel{R} b$ se notera $a \geqslant b$ et on lira : « a supérieur ou égal à b »
ou aussi $b \leqslant b$ et on lira : « b inférieur ou égal à a ».

II

Choisir cinq éléments de $\mathbb{Z}^-$, puis cinq éléments de $\mathbb{Z}^+$ et les comparer à 0 à l'aide de la relation R; que remarquez-vous?

1° Montrer que si $a \in \mathbb{Z}^+$, alors : $a \geqslant 0$.

2° Compléter : $0 = a + \ldots$
en déduire que si $a \in \mathbb{Z}^-$, alors : $a \leqslant 0$.

III

1° Pour deux éléments a et b, de $\mathbb{Z}$, on a nécessairement :

$$a \geqslant b \quad \text{ou} \quad a \leqslant b$$

Compléter par l'un des symboles : $\geqslant$ ou $\leqslant$ en justifiant chaque fois :

$17 \ldots 15$; $11 \ldots 18$; $12 \ldots 12$; $22 \ldots 48$
$\overline{14} \ldots 29$; $13 \ldots \overline{51}$; $17 \ldots \overline{10}$; $\overline{3} \ldots 20$
$\overline{16} \ldots \overline{4}$; $\overline{22} \ldots \overline{6}$; $\overline{43} \ldots \overline{80}$; $\overline{7} \ldots \overline{2}$

Que remarquez-vous?

2° Comparer a et b lorsque :

$a \in \mathbb{Z}^+$ et $b \in \mathbb{Z}^-$ (on utilisera II).

3° Montrer que :

$$a \geqslant b \Leftrightarrow \text{opp}\,(a) \leqslant \text{opp}\,(b)$$

en déduire une méthode pratique pour comparer a et b lorsque $a \in \mathbb{Z}^-$ et $b \in \mathbb{Z}^-$.

Exemple : $a = \overline{35} \Rightarrow \text{opp}\,(a) = \ldots \Big\}$ opp (a) ... opp (b)
$b = \overline{52} \Rightarrow \text{opp}\,(b) = \ldots \Big\}$ donc $a \ldots b$

écrire d'autres exemples.

Montrer les propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} a \geqslant b \Rightarrow a + c \geqslant b + c \\ a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \geqslant d \Rightarrow a + c \geqslant b + d \end{array}}$$

Attention

Si $a \geqslant b$ et $c \geqslant d$, on peut avoir soit $a + c \geqslant b + d$
soit $a + c \leqslant b + d$

trouver un exemple dans chacun de ces cas.

IV

Compléter le tableau suivant :

a	opp (a)	plus grand des 2 nombres : a et opp (a) (justifier)
8		
$\overline{19}$		
$\overline{43}$		
0		
162		

Définition: le plus grand des deux nombres a et opp (a) s'appelle *valeur absolue* de a : on le note $|a|$.

Comparer $|a|$ et 0.

Compléter : si $a \in \mathbb{Z}^+$ alors $|a| = \ldots$
si $a \in \mathbb{Z}$ alors $|a| = \ldots$

***

Exercices d'application.

I

Classer dans l'ordre croissant les nombres :

$7, \quad \overline{18}, \quad \overline{24}, \quad 0, \quad 2, \quad 24, \quad \overline{45}, \quad 3, \quad \overline{2}$

II

Écrire l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}$ vérifiant :

1) $3 \geqslant x$

2) $\overline{7} \leqslant x$

3) $3 \geqslant x$ et $\overline{7} \leqslant x$

III

On considère la relation S de source $\mathbb{Z}$, de but $\mathbb{Z}^+$ et de lien verbal : « a pour valeur absolue ».

1) S est-elle une application? Une bijection?

2) Déduire de S une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$; préciser son lien verbal et donner des exemples de classes d'équivalence.

Ordre dans $\mathbb{D}$ (classe de 4e).

I. — Définition.

• Soit la relation R définie dans $\mathbb{D}$ par $a \mathrel{R} b \Leftrightarrow$ (il existe un élément x de $\mathbb{D}^+$ tel que $a = b + x$).

$$\mathbb{D}^+ = \{a \times 10^n / a \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

• Montrer que R est une relation d'ordre dans $\mathbb{D}$.

• Notation :

$a \mathrel{R} b$ se note $a \geqslant b$. On lit « a est supérieur ou égal à b » quels que soient a et b de $\mathbb{D}$: $a \geqslant b \Leftrightarrow b \leqslant a$ « $b \leqslant a$ » se lit « b est inférieur ou égal à a ».

• Montrer que, quels que soient a et b de $\mathbb{D}$:

$$a \geqslant b \Leftrightarrow a - b \geqslant 0$$

II. — Compléter le tableau suivant :

a	b	c	$a-b$	$a \geqslant b$ ou $a \leqslant b$	$a+c$	$b+c$	$(a+c) - (b+c)$	$a+c \geqslant b+c$ ou $a+c \leqslant b+c$	$a-c$	$b-c$	$(a-c) - (b-c)$	$a-c \geqslant b-c$ ou $a-c \leqslant b-c$
16,54	4,2	41,134										
$7{,}\overline{1}23$	3,7	$0\overline{.08}$										
$12{,}\overline{0}08$	$5\overline{,42}$	23										
93,2991	104	$1\overline{4},12$										
$\overline{1}7$	$\overline{21}$	32										

• Comparer les résultats des colonnes 5, 9 et 13.

• **Démonstrations.**

— Calculer :

$$(a + c) - (b + c)$$
$$(a - c) - (b - c)$$

— Compléter :

$$a \geqslant b \Leftrightarrow a - b \ldots \Leftrightarrow (a + c) - (b + c) \ldots \Leftrightarrow a + c \ldots b + c$$

même travail pour $a - c$ et $b - c$.

• Conclusion :

Quels que soient a, b et c de $\mathbb{D}$:

$$a \geqslant b \Leftrightarrow a + c \ldots \Leftrightarrow a - c \ldots$$

• En déduire que, quels que soient a, b, c, d de $\mathbb{D}$:

$$(a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \geqslant d) \Rightarrow (a + c \geqslant b + d)$$

III. — Compléter le tableau suivant :

a	b	c	$a - b$	$a \geqslant b$ ou $a \leqslant b$	ac	bc	$ac - bc$	$ac \geqslant bc$ $ac \leqslant bc$
98	43	11						
$\overline{44}$	$\overline{88}$	2,5						
$\overline{51}$	18	$\overline{9}$						
72	168	125						
$\overline{19}$	$\overline{28}$	0,001						
37,1	$\overline{43},03$	$\overline{4}$						
$\overline{17}$	19,14	1 000						
49,273	$7,\overline{12}88$	0						

• Comparer les colonnes 5 et 9.

• Démonstrations :

— $(a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \geqslant 0) \Rightarrow (a - b \ldots \quad \text{et} \quad c \geqslant 0)$

$(a - b \quad \text{et} \quad c \geqslant 0) \Rightarrow (a - b)c \ldots$ car ...

$(a - b)c \ldots \Rightarrow ac - bc \ldots$ car ...

$ac - bc \ldots \Rightarrow ac \ldots bc$ car ...

Démontrer :

— $(a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant 0) \Rightarrow \ldots$

• **Conclusion.**

Quels que soient a, b, et c de $\mathbb{D}$:

$$(a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \geqslant 0) \Rightarrow$$
$$(a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant 0) \Rightarrow$$

IV. — Valeur absolue.

• Définition :

On appelle valeur absolue de a ($a \in \mathbb{D}$) le plus grand de deux nombres a et $\boxed{a}$ (opposé de a).

Notation $|a|$.

Quel que soit a de $\mathbb{D}$:

$$a \in \mathbb{D}^+ \Rightarrow |a| = a$$
$$a \in \mathbb{D}^- \Rightarrow |a| = \boxed{a}.$$

• Compléter :

x	y	$x-y$	$\|x\|$	$\|y\|$	$\dfrac{\|x\|}{\|y\|}$	$\dfrac{\|x\|}{\|y\|}$	$\dfrac{\|\|x\|}{\|y\|\|}$	$\|x\| + \|y\|$	$x+y$	$\|x+y\|$	α	β

α Classer dans l'ordre croissant les nombres des colonnes 6, 8, 9.

β Classer dans l'ordre croissant les nombres des colonnes 9 et 11.

Une approche de la géométrie (classe de 4e).

I

1° Rappel : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples de nombres réels.

2° a) E est une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\mathrm{E} = \left\{ (a\,;\, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, \begin{matrix} a = 2\,x \\ b = 3\,x \end{matrix} \right\}$$

x pouvant prendre n'importe quelle valeur, compléter à l'aide l'un des signes : $\in$; $\notin$;

$(6;\ 9)\ldots E \qquad (18;\ 27)\ldots E \qquad (32;\ 45)\ldots E$

$(168;\ 252)\ldots E \qquad \left(\frac{2}{3};\ 1\right)\ldots E \qquad \left(\frac{1}{5};\frac{2}{7}\right)\ldots E$

Donner cinq éléments de E (autres que ceux déjà trouvés).

b) F est une partie de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dont les éléments sont des couples du type $(ax\,;\,bx)$ où a et b sont *fixés* et où x est variable (x peut prendre n'importe quelle valeur).

Compléter, en justifiant chaque réponse, à l'aide de $\in$ ou $\notin$.

a) $(0;\ 0)\ldots$ F; *b*) $(a\,;\,b)\ldots$ F; *c*) $(2a\,;\,b)\ldots$ F.

c) Trouver les deux valeurs entières les plus petites possibles de a et b sachant que : $(12;\ 15)\in$ F.

d) G est l'ensemble des couples du type : $(8y\,;\,12y)$, y *variable ;* comparer G et E.

II

A. — *a*) D_1, partie de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est l'ensemble des couples du type $(x\,;\,2x-3)$ x *variable :*

— Donner cinq éléments de D_1.

— Compléter : $(\ldots;\ 5)\ \in D_1$

$(\ldots;\ \bar{1})\ \in D_1$

$(3;\ \ldots)\in D_1$ $(\ldots;\ 19)\in D_1$

$(\bar{17};\ \ldots)\in D_1$ $\left(\frac{7}{5};\ \ldots\right)\in D_1$

$\left(\frac{\bar{1}}{2};\ \ldots\right)\in D_1$.

b) D_2 est l'ensemble des couples du type $(u\,;\,u+1)$ u *variable :*

— Donner cinq éléments de D_2.

— Compléter : $(0;\ \ldots)\in D_2$

$(147;\ \ldots)\in D_2$

$(\ldots;\ 0{,}7)\in D_2$

$(4;\ \ldots)\in D_2$

Existe-t-il au moins un couple commun à D_1 et D_2?

B. — Déterminer cinq éléments de chacune des parties de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ définies ci-dessous :

D_3 : ensemble des couples du type $\left(x,\ \frac{x}{2}\right)$, x variable.

D_4 : ensemble des couples du type $(u,\ u-1)$, u variable.

c) On veut déterminer l'intersection des parties D_5 et D_6 définies par :

D_5 : ensemble des couples $(x,\ x - 1)$.

D_6 : ensemble des couples $(y,\ 5 - y)$.

Si l'intersection n'est pas vide, alors tout couple commun à D_5 et D_6 vérifie obligatoirement $x = y$; et $x - 1 = 5 - y$.

Ce qui amène a : $x - 1 = 5 - x$.

Résoudre l'équation $x - 1 = 5 - x$ et trouver le *seul* couple appartenant à l'intersection de D_5 et D_6.

Exercices :

Déterminer l'intersection des parties de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivantes :

1° D_1 : ensemble des couples $(x, x + 1)$ et D_2 ensemble des couples $(y, 2y - 4)$.

2° D_3 : $\left(x, \frac{x}{2}\right)$ et D_4 : $(x, 6 - x)$.

3° D_5 : $\left(x, \frac{x}{2} + 1\right)$ et D^6 : $\left(x, \frac{x}{2} + 5\right)$. Remarque sur $D_5 \cap D^6$?

4° D_7 : $(x, 1 - x)$ et D^8 : $\left(\frac{x}{3}, x - 7\right)$.

5° D^9 : $(x, 6x + 8)$ et D_{10} : $(x, 5x - 19)$.

6° D_{11} : $(x, 3x - 7)$ et D_{12} : $\left((x, 3x + \frac{5}{3}\right)$.

7° D_{13} : $(x, x - 7)$ et D_{14} : $(x, x - 7)$.

On cherche à répondre aux mêmes questions que dans les exercices précédents pour les parties.

$$D : (x, ax + 1) \qquad D' : (x, a'x + 4)\ a,\ a' \text{ sont fixés.}$$

— Quelle condition a et a' doivent-ils vérifier pour que $D \cap D' = \varnothing$ (retrouver ce cas dans les exemples précédents)?

— Quelle condition a et a' doivent-ils vérifier pour que $D \cap D' \neq \varnothing$ (même remarque)?

On considère les 2 parties de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$D : (x, ax + b) \qquad D' : (x, a'x + b')$$

En choisissant les valeurs de a, b, a', b', inventer :

a) Trois exemples où l'intersection de D et D′ contient un seul point.

b) Trois exemples où l'intersection est vide.

c) On choisit : $b = b'$. Donner trois exemples à votre choix. Les trois intersections trouvées ont-elles un caractère commun? Lequel?

Justifier le résultat en cherchant l'intersection de :

$$D : (x, ax + b) \qquad \text{et} \qquad D' : (x, a'x + b)$$

Compléter : $a \neq a'$ $\quad$ $D \cap D' =$

$a = a'$ $\quad$ $D \cap D' = \ldots$

$D = \ldots$

Compléter alors ce tableau résumé des résultats précédents :

$$D \rightarrow (x, ax + b)$$
$$D' \rightarrow (x, a'x + b')$$

$a \neq a'$	$a = a'$ et $b \neq b'$	$a = a'$ et $b = b'$
intersection contient.......	$D \cap D' = \ldots$	$D \cap D' = \ldots$

Une partie $D \rightarrow (x, ax + b)$ contient les points $(3; 4)$ et $(5; 8)$: On veut calculer a et b.

Indication : *a*) $x = 3 \Rightarrow a \times 3 + b = 4$

b) $x = \ldots \Rightarrow a \times \ldots + b = \ldots$

Existe-t-il plusieurs valeurs possibles pour a et b?
Même question pour D' $(x, ax + b)$ contenant les points $(0; 1)$ et $(2; 2)$.

D'' $(x, ax + b)$ contenant les points $(0; 3)$ et $(6; 0)$.

Exercices: Déterminer $D : (x, ax + b)$ dans les cas suivants :

1° $\quad (0; 1) \in D$ $\quad$ et $\quad (3; 2) \in D$

2° $\quad (\bar{1}; 0) \in D$ $\quad$ et $\quad (3; 1) \in D$

3° $\quad (1; 1) \in (D)$ $\quad$ et $\quad (2; 2) \in D$

4° $\quad (3; 3) \in (D)$ $\quad$ et $\quad (5; \bar{5}) \in D$

— Existe-t-il plusieurs possibilités dans chacun de ces quatre cas?
— Imaginer d'autres exemples (au moins 4).
— Combien trouvez-vous de possibilités à chaque fois?

Conclusion : Une partie $D \rightarrow (x, ax + b)$ est parfaitement connue si on connaît *deux* de ses éléments.

Autre énoncé : Il existe une seule partie D $(x, ax + b)$ contenant deux « points » donnés.

A Montpellier

L'équipe de Montpellier trouve les programmes trop longs. Elle développe son argumentation dans un premier rapport. Elle complète celui-ci par des remarques sur le programme de géométrie.

L'incertitude sur les programmes est à l'origine des tâtonnements qui caractérisèrent le début de l'expérience dans nos classes de Quatrième.

Après avoir travaillé trois semaines sur le projet de programme datant de juin 1970, nous avons poursuivi l'expérience d'après le projet mis au point en octobre de la même année et finalement, l'esprit du dernier projet (février 1971) en ce qui concerne la géométrie n'est plus tout à fait celui de l'avant-dernier projet qui a guidé notre expérience.

Toutes ces hésitations font que nous ne sommes pas certains de pouvoir, d'ici la fin de l'année scolaire, tester dans sa totalité le programme de Quatrième. Mais, par contre, nous avons abordé dans nos classes certains points qui ont disparu du dit programme.

Contenu de l'expérience et progression.

A) Arithmétique. Algèbre.

1° Arithmétique dans $\mathbb{Z}$: quatre semaines, horaire complet (4 h par semaine).

2° Les décimaux : trois semaines, horaire complet.

3° Les réels : depuis la mi-novembre, nous travaillons à raison de 2 heures par semaine sur les réels.

Au cours du troisième trimestre, il nous restera à étudier :

— puissances d'un réel non nul,
— notion de groupe,
— fonctions polynômes.

B) Géométrie.

Nous avons commencé à étudier la géométrie à la mi-novembre à raison de deux heures par semaine.

Au cours du troisième trimestre, il restera encore à étudier, pour le groupe le plus avancé :

— symétrie centrale,
— parallélogrammes,
— équipollence de bipoints; vecteurs;
— translations et addition des vecteurs;
— multiplication d'un vecteur par un réel;
— repères du plan; coordonnées cartésiennes.

Réussites et difficultés.

A) Arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

Manque d'enthousiasme et d'intérêt des élèves pour des questions déjà abordées dans $\mathbb{N}$, en Cinquième.

B) Décimaux et réels.

D'une façon générale, les décimaux et les réels ont beaucoup plu aux élèves, si ce n'est que parfois les calculs sont un peu longs donc fastidieux et l'usage des machines de bureaux dans cette étude se trouve alors pleinement justifié.

Dans l'ensemble, les décimaux peuvent figurer au palmarès des réussites et les réels ont été assez facilement assimilés.

Notons cependant les difficultés pour certains élèves :

— à reconnaître dans $0,\underbrace{000\ldots01}_{n\ \text{chiffres}}$ l'inverse de 10^n;

— à admettre, au cours de l'introduction des réels, que l'intersection des segments emboîtés se réduit à un singleton;

— à comprendre la double représentation de certains réels tels que $1,499\ldots9\ldots$, alias $1,500\ldots0\ldots$;

— à surmonter les nombreux obstacles auxquels ils se sont heurtés dans l'étude de l'inverse d'un réel non nul. [Il est vrai que les deux derniers projets de programme demandent d'admettre que tout réel non nul a un inverse. Si en règle générale, nous n'aimons pas beaucoup admettre des résultats ce qui choque souvent les jeunes élèves, nous pensons que dans ce cas particulier, la prise de position du programme est justifiée];

— à ne pas s'affoler en voyant réapparaître avec les quotients le fantôme des fractions mal digérées à l'école primaire.

C) Géométrie.

L'introduction de la géométrie au niveau de Quatrième pose plus de problèmes que celle des réels. Les difficultés sont de deux ordres :

1° Faire sentir aux élèves les distinctions entre constatations, axiomes et démonstrations.

2° Faire comprendre les débuts de la géométrie affine, programme ambitieux avec des élèves de cet âge.

Signalons les points qui nous ont paru les plus délicats :

— le plan à quatre éléments, qui heureusement disparaît dans le dernier projet de programme;

— les premières démonstrations de théorèmes relatifs au parallélisme, faisant appel au raisonnement par l'absurde;

— les projections qui, sans être très difficiles, nécessitent de nombreuses manipulations ;

— la définition indigeste de la droite affine réelle;

— la mesure algébrique d'un bipoint par rapport à une projection du repère de son support sur une parallèle à ce support;

— la traduction d'une formule lorsque sont modifiés les noms des lettres qui y figurent, quelle que soit la signification de ces lettres (points, constantes...). Notons à ce sujet une erreur pédagogique qui est à l'origine de quelques-unes de nos difficultés. Très souvent, nous avons désigné le repère choisi sur une droite affine réelle par (O, I) c'est-à-dire qu'au point O nous avons associé le réel 0. Les élèves ont alors été un peu perdus lorsqu'il a fallu faire intervenir des repères tels que (A, B), (B, C)...

Parmi les réussites, signalons :

— la relation de Chasles que nous avons volontairement abordée sans aucune représentation matérielle;

— la notion de barycentre de deux points. [Par contre, les justifications de la construction de barycentres sont assez délicates];

— l'axiome de Thalès (énoncé proposé dans l'avant-dernier projet de programme) et la définition du plan affine.

Remarque

Il nous a semblé artificiel d'introduire la droite affine sans parler des applications affines donc en premier lieu des applications linéaires.

Ces applications linéaires ont révélé la nécessité de donner des contre-exemples variés. Pour les élèves, il semble tout à fait naturel que :

$$f(x + x') = f(x) + f(x')$$
$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Méthodes de travail.

Comme en Sixième et Cinquième, les élèves travaillent sur les fiches mises au point par les différents groupes des expérimentateurs. Ces fiches sont conçues et utilisées de façon différentes par les maîtres mais également à l'intérieur d'une même classe suivant la leçon proposée.

— Distribution avec ou sans commentaires de la fiche aux élèves travaillant individuellement ou en groupes.

— Lecture commentée de la fiche remplie en commun.

— Explication préalable de la leçon puis distribution des fiches qui reprennent les points les plus importants de cette leçon, fiches que les élèves doivent alors compléter soit en classe, soit à la maison.

— Dans la même optique, distribution après le cours d'un résumé rappelant démonstration et résultats essentiels, les élèves n'ayant rien à compléter.

Conclusion.

En conclusion, arithmétique et algèbre dans leur ensemble, sont assez facilement assimilables. Bien que plus ardue, la géométrie aussi peut être comprise par des élèves de Quatrième et constituer une bonne base de travail, moyennant certaines conditions.

— Exiger des élèves la connaissance parfaite des axiomes, définitions et principaux théorèmes rencontrés.

— Alléger le contenu du programme.

* Le professeur doit disposer du temps nécessaire :

— pour faire faire de nombreuses manipulations préparant au choix des axiomes,

— pour revenir souvent sur des notions délicates,

— pour enseigner aux élèves comment on déduit,

— pour leur apprendre à rédiger correctement,

— pour les entraîner au calcul algébrique et au calcul mental.

* Les élèves doivent disposer du temps nécessaire :

— pour étudier leurs leçons,

— pour avoir le temps d'assimiler une notion avant d'en aborder une autre,

— pour ne pas perdre l'habitude de réfléchir et se contenter d'emmagasiner.

Les programmes officiels veulent ignorer que :

— dans de nombreux établissements, le mois de juin est sérieusement amputé par différents examens,

— les Conseillers pédagogiques doivent confier leurs classes à de jeunes professeurs stagiaires, ce qui ralentit le rythme de la classe,

— les effectifs trop importants de la plupart des classes sont une cause de ralentissement.

Il nous paraît également très important de rappeler que le travail exigé d'un élève de Quatrième est sans commune mesure avec ce qui lui a été demandé en Sixième et Cinquième. C'est à ce niveau que les élèves optent pour une deuxième langue vivante et qu'un certain nombre étudie en plus le latin.

A un âge où souvent les enfants sont fatigués par la croissance et la formation, le professeur de mathématiques va, lui aussi, exiger plus de devoirs à la maison, un effort d'abstraction considérable en classe, des leçons plus substantielles.

Allègements proposés

Pour ne pas détruire l'homogénéité du programme, en plus de la suppression de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$, nous proposons :

— de reporter en Troisième les exemples de fonctions polynômes et le calcul sur les polynômes,

— de supprimer les exercices sur les barycentres de deux points, projections de barycentres, construction de barycentres.

Quelques remarques sur la géométrie en 4e.

G. Aguado,
Professeur au Lycée du Mas-de-Tesse,
Montpellier.

Introduction.

Il a semblé à l'équipe des expérimentateurs de Montpellier que le point essentiel de la classe de Quatrième en géométrie est de bien faire sentir qu'il n'y a aucun point commun entre des constatations faites sur des « figures » et des déductions.

Nous avons donc cherché à montrer aux élèves que les constatations faites sur des figures permettent de choisir un certain nombre de règles du jeu, appelées en mathématiques axiomes, à partir desquelles ils pourront faire des déductions. Autrement dit, nous avons fait valoir que, le choix des axiomes étant arrêté, ils ne peuvent plus constater.

Bien entendu, il nous semble qu'en Quatrième, il ne peut être question d'interdire de faire des dessins. Cependant, ces dessins permettent de choisir un itinéraire parmi plusieurs possibilités, pour déduire à partir des axiomes.

Nous pensons que si, au départ de l'apprentissage de la géométrie, les distinctions entre :

— constatations,
— choix des axiomes,
— déductions,

sont nettement dégagées, alors il n'y aura plus de confusion dans l'esprit des élèves.

Ces considérations ont fait que nous nous sommes interdit de mettre dans une même fiche des parties « constatations » et des parties « déductions ». Pour chaque question, nous nous sommes efforcé d'établir trois types de fiches.

1° Une fiche de constatations, comportant éventuellement des constructions géométriques, c'est-à-dire tout ce qui se rapproche du dessin, de ce que nous avons appelé peut-être improprement des objets matériels.

2° Une fiche d'axiomes, montrant le choix des règles adoptées dans la théorie mathématique du cours.

3° Des fiches de déductions, c'est-à-dire de démonstrations faites à partir de ces axiomes, ou à partir d'axiomes, définitions et théorèmes acquis antérieurement.

Voici par exemple, et de façon schématique, comment nous avons abordé l'axiome de Thalès dans nos classes expérimentales.

Fiche n —1

Projection d'une droite sur une droite.

1° Rappels.

Dans ce paragraphe, nous avons extrait d'une fiche précédemment étudiée, quelques rappels relatifs à la projection.

2° Tracés de parallèles.

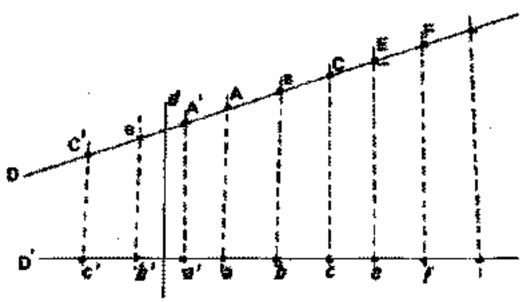
a) Construction classique à partir de la *règle* et de l'*équerre*.

Ce sont de simples manipulations à partir d'une « recette », le bagage mathématique des élèves ne leur permettant pas d'en comprendre le déroulement.

b) Construction de parallèles « équidistantes » avec intervention d'un nouvel outil le *compas* pour graduer une droite.

3° Abscisse de la projection d'un point.

On fait tracer aux élèves deux droites quelconques D et D′, parallèles ou non, du plan matériel et une troisième droite d, non parallèle à D et non parallèle à D′.



A l'aide d'un compas, D est alors munie d'une graduation que l'on projette ensuite sur D′ parallèlement à d. (Nous entendons, bien sûr, par graduation une graduation « équidistante ».)

On fait deux constatations :

a) A l'aide d'un compas, on vérifie qur : $\{a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots\}$ est une graduation de D′.

b) Si sur D on choisit un repère et si sur D′ on choisit comme repère la projection du précédent, un point de D et sa projection sur D′ ont même abscisse. (A l'aide du schéma, nous avons considéré de nombreux exemples dans différents repères.)

Fiche n

Axiome de Thalès.

Cela s'avérant nécessaire, nous décidons d'ajouter une nouvelle règle du jeu aux deux règles qui ont été précédemment admises (axiomes d'incidence) et cette nouvelle règle du jeu porte le nom d'axiome de Thalès que nous avons énoncé ainsi :

d étant une droite non parallèle à deux droites quelconques D et D′, si l'on projette parallèlement à d, la droite D munie d'un repère (A, B) sur la droite D′ munie du repère (A′, B′) projection de (A, B), alors tout point M de D et sa projection M′ sur D′ ont même abscisse.

On peut en déduire ensuite la définition du plan mathématique donné en annexe du dernier projet de programme.

Remarque.

Nous avons fait cette leçon conformément au $p^{\text{ième}}$ projet de programme qui suggérait la présentation de l'axiome de Thalès sous cette forme d'ailleurs aisément assimilable par les élèves. Depuis, le $(p+1)^{\text{ième}}$ projet propose de présenter cet axiome sous une nouvelle forme.

On peut d'ailleurs passer facilement de la première forme à la seconde.

Les élèves savent que sur une droite D′ :

$\overline{mn}_{(a', b')} = k.\overline{mn}_{(a, b)}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.

De la première forme de l'axiome de Thalès, on déduit :

$\overline{mn}_{(a, b)} = \overline{\mathrm{MN}}_{(A, B)}$ (M, N, A, B appartenant à une droite D).

En définitive :

$\overline{mn}_{(a', b')} = k.\overline{\mathrm{MN}}_{(A, B)}$ qui est la seconde traduction de l'axiome de Thalès et qui deviendrait ainsi un théorème.

Fiche $n+1$

Applications de l'axiome de Thalès.

(Nous ne développerons ici que la première application).

1° Projection de barycentres.

(La notion de barycentre est déjà connue des élèves).

p désigne la projection d'une droite D sur une droite D′ parallèlement à une droite d (d non parallèle à D et non parallèle à D′).

D est munie d'un repère (a, b) et on choisit comme repère de D' la projection (a', b') de (a, b). A, B, M sont trois points de D se projetant sur D' respectivement en A', B', M'.

On suppose que M est le barycentre des deux points A et B affectés respectivement des coefficients α et β. Les élèves savent alors traduire cette hypothèse par la relation $\alpha.\overline{MA}_{(a,\,b)} + \beta.\overline{MB}_{(a,\,b)} = 0$.

On se propose de démontrer que M' est le barycentre des points A' et B' affectés des coefficients α et β. Grâce à l'axiome de Thalès, les élèves, guidés par la fiche, établissent que :

$$\alpha.\overline{MA}_{(a,\,b)} + \beta.\overline{MB}_{(a,\,b)} = \alpha.\overline{M'A'}_{(a',\,b')} + \beta.\overline{M'B'}_{(a',\,b')}$$

et par conséquent que :

$$\alpha.\overline{M'A'}_{(a',b')} + \beta.\overline{M'B'}_{(a',\,b')} = 0$$

puisque

$$\alpha.\overline{MA}_{(a,\,b)} + \beta.\overline{MB}_{(a,\,b)} = 0$$

On fait ensuite remarquer aux élèves que seul le souci d'une démonstration simple utilisant l'axiome de Thalès sous sa première forme a présidé au choix du repère de D' mais qu'en fait, la conclusion serait la même quel que soit le repère de D' puisqu'ils savent qu'un changement de repère ne modifie pas le barycentre de deux points affectés de coefficients donnés.

Bien entendu, avant de poursuivre, on passe à la mise en forme du théorème résultant de la démonstration précédente.

La projection du milieu d'un bipoint apparaît comme un cas particulier de la projection de barycentre.

2° Application de l'axiome de Thalès au triangle et sa réciproque.

3° Construction de barycentres de deux points.

L'axiome de Thalès permet de faire découvrir aux élèves une construction du barycentre de deux points affectés de coefficients donnés, construction qui n'est pas une simple recette de la construction des parallèles « équidistantes»

Information :

Dates de parution et « Thèmes » des prochains bulletins :

- Septembre 1971 : Après les journées de Toulouse.
- Décembre 1971 : Sur l'enseignement élémentaire.
- Février 1972 : « Interdiscipline ».
- Avril 1972 : Les journées de l'A.P.M. (Caen, 11-12-13 mai).
- Juin 1972 : Bulletin spécial sur les classes de Troisième.

A Lyon

Trois équipes lyonnaises nous ont fait parvenir un rapport.

L'un d'eux insiste sur la modification pédagogique (groupes de niveaux) ayant accompagné l'expérimentation ; le troisième complète l'article sur la géométrie (cf. p. 350) rédigé par l'I.R.E.M. de Lyon.

Expérimentation en 4e.

Mme MOREL,
Lycée Saint-Just, Lyon-5e.

Depuis deux ans, nous poursuivons, en Quatrième, une expérience d'enseignement des mathématiques modernes. L'an dernier, le programme de la Commission Lichnerowicz ayant été connu trop tard, nous avons expérimenté le programme d'algèbre. Le programme de géométrie a été vu au début de cette année, les élèves étant alors en Troisième. Cette année, nous avons pris comme base les nouveaux programmes; nous utilisons les fiches Galion.

Depuis la rentrée 1969, plusieurs changements sont intervenus par rapport à l'enseignement traditionnel de notre lycée :

— Il s'agit de nouveaux programmes faisant suite à un enseignement reçu en Sixième et en Cinquième.

— Nous avons utilisé de nouvelles méthodes en introduisant en Quatrième l'enseignement par fiches.

— Conjointement, nous avons mis en place une nouvelle répartition des élèves en expérimentant un enseignement par niveaux.

Voici donc quelques remarques concernant nos activités, nos réussites, nos échecs, nos espoirs.

Nous nous réjouissons d'avoir obtenu, en Quatrième, des programmes modernes très formateurs et correspondant à l'orientation de notre enseignement scientifique à partir du second cycle. Cependant, ce programme est trop vaste. Notre système d'enseignement par niveaux nous permet d'en avoir nettement conscience. Nos élèves sont réparties en dix niveaux de 24 élèves; les trois niveaux les plus faibles disposent d'une heure supplémentaire, c'est-à-dire de cinq heures hebdomadaires au lieu de quatre. Dans les niveaux faibles, nous nous heurtons aux limites d'assimilation de certains élèves, à la lenteur de beaucoup d'autres; nous pouvons affirmer avec force que nous leur demandons trop. Au 1er avril, ils sont « essoufflés » alors que nous commençons l'étude des réels et que la géométrie n'a pas été abordée; or, compte-tenu du calendrier des examens et des vacances, il reste deux mois de travail. Il est facile à un professeur d'une classe hétérogène de se déclarer satisfait lorsque quelques bons éléments réagissent très bien et donnent l'illusion que le programme « passe bien ». Dans l'enseignement traditionnel, beaucoup trop d'élèves restaient fermés aux mathématiques. Nous avons certainement obtenu une plus large audience. Cependant, en gardant des programmes trop ambitieux, compte tenu du temps dont nous disposons, nous abandonnons ou décourageons encore au moins 20 p. 100 des élèves. Faut-il considérer que ce « déchet » est normal dans le premier cycle ou bien devons-nous exiger des programmes minimums qui pourraient être assimilés par les élèves moins favorisés et qui laisseraient aux autres toutes possibilités de dépassement?

La méthode d'enseignement par fiches, permettant à chaque élève de progresser à son rythme, est utilisée avec une certaine souplesse. En général, nos élèves travaillent par groupes de deux ou trois, rarement individuellement.

Il nous semble indispensable que le professeur prenne toute sa classe en main régulièrement et ceci surtout dans les niveaux faibles, d'une part pour insister sur les résultats essentiels, d'autre part pour introduire des notions difficiles enfin pour corriger des exercices mal compris. La démonstration constitue une grosse difficulté pour la classe de Quatrième; la plupart des élèves ne la surmontent pas seuls. Étant donné qu'il est matériellement impossible au professeur de donner suffisamment de conseils à chaque élève en particulier, il faut revenir, à ce moment, au cours magistral. Mais, dès lors, les élèves, habituées à la réflexion et au travail personnel, participent plus activement qu'autrefois au travail réalisé en commun.

Parfois, nous prenons la parole au début d'une fiche, par exemple, pour définir un vecteur, ensuite, nous donnons aux élèves les exercices proposés. Quelquefois il est utile de faire une synthèse à la fin d'un chapitre, par exemple, après les encadrements de réels, pour mettre en évidence les méthodes utilisées et le vocabulaire à retenir.

Afin de rendre possible le travail collectif, nous évitons les grands décalages entre les élèves; ceci est relativement facile dans des groupes homogènes; il est tout de même nécessaire de fournir aux élèves plus rapides quelques exercices supplémentaires ou bien de donner aux plus lents des fiches à terminer chez eux.

Il faut demander de temps en temps un effort de mémoire et donner quelques résultats à apprendre. Nous estimons, par exemple, qu'après avoir manipulé des relations, des groupes, en Sixième et Cinquième, les élèves doivent connaître, en Quatrième, la définition d'une relation d'équivalence ou d'un groupe; ceci les oblige à formuler clairement ce qu'ils sentent de façon plus ou moins implicite. Nous donnons quelques devoirs à la maison mais, surtout, des fiches à terminer.

Le contrôle des résultats s'exerce, de façon permanente, en dialoguant avec chaque élève ou avec la classe et, de façon plus nette, au cours des interrogations écrites données, environ, chaque quinzaine. Ce travail personnel régulier est pour nous le meilleur moyen de tester les progrès réalisés.

Malgré quelques difficultés, nous avons obtenu des résultats très encourageants.

Il faut, bien sûr, considérer comme un échec le fait de ne pas terminer le programme; ceci laisse les élèves insatisfaits et, parfois, découragés. Il est certain que nous sacrifierons encore une partie de la géométrie.

Il faut constater aussi que nos élèves utilisent mal la déduction logique; cette difficulté est, semble-t-il, assez normale à leur âge.

Lors du travail sur fiches, il arrive que quelques élèves passent rapidement sur les commentaires pour ne faire que les exercices, ou bien s'intéressent peu à des exercices dont la marche n'est pas entièrement tracée. Ces inconvénients peuvent être partiellement évités par l'intervention du professeur.

Nos élèves font régulièrement des exercices de calcul avec ou sans machines; peut-être sont-ils un peu moins rapides qu'autrefois, mais ils sont, sans aucun doute, plus conscients. On rencontre *moins les grosses erreurs* faites par les élèves qui appliquaient simplement un mécanisme.

Les élèves de Quatrième ont, dans l'ensemble, assimilé les notions d'application, de loi de composition, les calculs dans l'ensemble des décimaux. Ils résolvent *correctement* les équations du premier degré.

Parmi les points essentiels très positifs, nous signalons le changement d'attitude de l'élève face au cours de mathématique; ceci était déjà constaté en Sixième et Cinquième. Le cours est plus agréable, passionnant pour certains.

Les élèves n'acceptent que ce qu'ils comprennent; ils sont plus exigeants dans leurs demandes d'explication. Les contacts élèves-professeurs sont plus profonds; des découragements sont évités. Le travail sur fiches semble être un facteur favorisant le travail en équipes dans une ambiance de liberté.

Le professeur doit accepter les discussions, les déplacements et aussi un niveau sonore un peu élevé. Il en résulte pour lui une plus grande fatigue qu'autrefois particulièrement s'il enseigne dans un niveau faible.

La méthode d'enseignement par niveaux comporte « quelques » inconvénients surtout au point de vue psychologique (difficulté des changements de groupes, hantise de « descendre » pour certains) mais, pour nous, elle présente surtout des avantages : les faibles ne sont plus écrasés par les forts, ils peuvent s'exprimer sans complexes; ils disposent d'une heure supplémentaire; les forts avancent sans s'ennuyer. Le maître peut davantage individualiser son enseignement, maintenir l'émulation qui n'existait que pour les têtes de classe.

L'expérimentation des nouveaux programmes a donc servi de prétexte à une profonde rénovation pédagogique, établissant des rapports psychologiques fructueux entre élèves et maîtres — et même, ce dernier aspect n'étant pas le moins important, au sein de l'équipe d'enseignants.

Expérience de mathématique au niveau des 4e.

Mme BUCHWALTER, M. LAUVERGNAT,
Lycée Jean-Perrin, Lyon-9e.

Cette année 1970-1971, 175 élèves de Quatrième, répartis en 6 classes, participent à l'expérience de Mathématique. Les élèves ont quatre heures de mathématique par semaine.

Ces quelques notes risquent de n'être pas très intéressantes dans la mesure où le programme expérimenté cette année comporte d'assez grandes différences avec celui officiellement adopté pour la prochaine rentrée.

La répartition cette année a été à peu près la suivante :

— Premier trimestre : ensemble et logique, lois de composition.
— Deuxième trimestre : groupes, ensemble des décimaux.
— Troisième trimestre : l'ensemble des réels, débuts de la géométrie.

Les élèves utilisent les fiches *Galion (4e)*; ils sont habitués au travail sur fiches depuis la classe de Sixième. ***Les avantages de la méthode.*** se sont confirmés tout au long de ces trois années, principalement sur les deux points suivants :

① *Travail individualisé* permettant à un élève lent de ne pas se sentir perdu, de pouvoir travailler à son rythme et dans bien des cas d'éviter le découragement.

② *Travail par équipes.* Les élèves travaillent souvent, sans que ce soit obligatoire, par groupe de 2 ou 3. Ils s'apportent mutuellement une aide qui s'est révélée être très efficace. Ils apprennent à expliquer aux autres, donc à préciser leur propre pensée.

Une difficulté toutefois : il est malaisé de faire des synthèses pour l'ensemble de la classe, les élèves ayant des écarts de fiches importants les uns par rapport aux autres; l'utilisation de fiches supplémentaires ne permet pas toujours de combler ce retard.

Nous pouvons toutefois affirmer, après trois ans d'expériences, que la *méthode utilisée est un succès:*

— élèves heureux de travailler et prenant leur travail au sérieux;
— pourcentage très faible, parmi les six classes, d'élèves en difficulté.

A remarquer que *le programme de Quatrième que nous avons expérimenté* nous paraît beaucoup trop lourd : la géométrie pratiquement ne pourra guère être abordée cette année. Par contre, nous regrettons bien vivement qu'aient disparu totalement du programme définitif les notions de logique. Les fiches correspondantes que nous avons expérimentées ont intéressé les élèves et elles ont été assez bien assimilées. Elles complétaient utilement les fiches relatives au langage des ensembles et préparaient utilement l'avenir...

Expérimentation d'un nouveau programme de 4^e.

Équipe du Lycée Ampère (Lyon).

Le nouveau programme de Quatrième-Troisième est connu depuis peu. Notre propos n'est pas ici de critiquer tel ou tel aspect de ce programme qui peut être considérablement amélioré. D'ailleurs, tout programme est mauvais !

Nous voulons simplement apporter le témoignage de ce qui a été fait, dans les classes expérimentales de Lyon, ou plutôt parler plus précisément de quelques points particuliers éclairés par le travail de plus d'une année.

Lorsque nous avons dû, en Quatrième, poursuivre notre expérimentation commencée en octobre 1967 en Sixième, *il n'y avait pas de programme de Quatrième à expérimenter.* Tout juste un texte sur lequel l'accord était très loin d'être réalisé; quelques bonnes idées pour l'étude des nombres, appelée couramment algèbre; une proposition pour la géométrie. En gros, la partie dite « algébrique » est celle qui est devenue officielle dans le nouveau programme de Quatrième : c'est ce qui fut expérimenté.

La partie « géométrique » a subi de nombreuses fluctuations. Nous avons tenté, en Quatrième, d'introduire ces notions géométriques à partir d' « axiomes » du milieu. Puis, nous avons abandonné cette voie pour essayer de bâtir autre chose à partir des idées contenues dans le programme actuel.

En fait, nous avons passé beaucoup de temps sur l'approche des réels, si bien que c'est en début de Troisième expérimentale que nous avons vraiment traité la partie géométrique, en tentant d'arriver le plus économiquement possible au plan vectoriel.

Il faut dire que, si les programmes rénovés de Sixième et Cinquième ne posent plus beaucoup de problèmes dans notre enseignement, il n'en va pas de même pour celui de Quatrième.

D'abord sa longueur, ensuite sa densité.

Si l'on veut tirer le bénéfice d'une notion telle que celle de « groupe », il faut bien d'abord parler des lois de composition sur des exemples simples, de leurs propriétés, ce qui est assez long.

Il faut ensuite « approcher les réels ».

La question, du seul point de vue intuitif, ne présente pas trop de difficultés contrairement à ce que l'on aurait pu croire. Mais la recherche d'encadrements par des décimaux est très longue, car elle doit être faite sur des exemples nombreux et variés.

Il reste ensuite à mettre en forme certaines règles opératoires dans $\mathbb{R}$, et étudier les applications-polynômes.

Si l'on a le souci de ne pas trop escamoter les problèmes, si l'on veut éviter trop de dogmatisme, tout cela prend beaucoup de temps.

Quant à la géométrie (dont la plus grande partie ne peut être abordée avant l'étude de $\mathbb{R}$), en dépit d'une « étude économique », on ne peut tout de même pas la traiter en quelques semaines. *Nous devons donc mettre les* *collègues en garde davantage contre cette longueur, que contre les difficultés rencontrées.*

Un travail assez lent, individualisé, avec fiches de travail ou autres documents, est très bien adapté aux classes de Sixième et Cinquième, Indiscutablement, on devra essayer d'aller plus vite en Quatrième.

Les documents de travail doivent être utilisés en général de façon nouvelle dans cette classe. Sans abandonner l'individualisation, la recherche personnelle, le travail en groupe, il faudra sans doute faire plus souvent un travail collectif plus rapide.

On pourra faire préparer certaines fiches à la maison, ou en devoirs.

Voici maintenant quelques points de détail.

④ Les lois de composition.

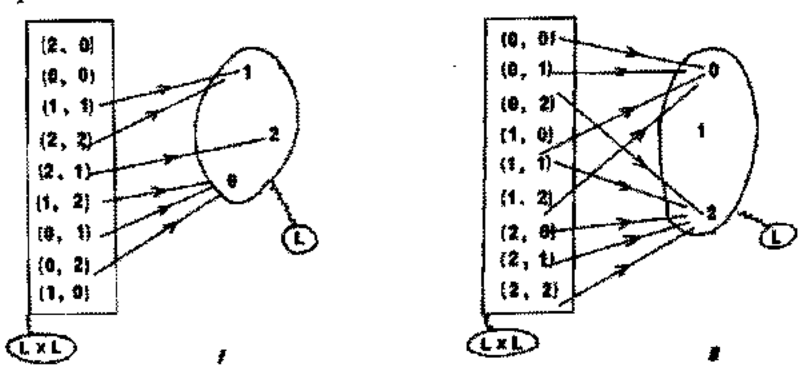
Les élèves de Sixième et Cinquième, habitués aux concepts de « *relations* », « *applications* », « *graphes* » n'ont pas de difficulté pour aborder les *lois de composition sur des ensembles finis*.

Une loi de composition dans E sera une application de E × E vers E.

Le qualificatif « *interne* » semble inutile si l'on utilise cette définition :

$$(x, y) \mapsto x * y$$

Exemples :



g est une loi de composition dans L; *f* n'est pas une loi de composition(c'est une *opération* dans L).

Autres exemples de lois de composition :

L'addition dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{D}$.

La multiplication dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{D}$.

$\cap$, $\cup$, Δ dans $\mathcal{P}$ (E).

Composition des bijections dans E (ensemble fini).

Contre-exemple :

Soustraction dans $\mathbb{N}$.

On insiste beaucoup sur la *table de Pythagore*, instrument précieux pour l'étude des lois de composition sur un ensemble fini.

Exercice :

Voici trois tables :

2ᵉ composant (colonnes) ; 1ᵉʳ composant (lignes)

*	a	b	c
a	b	b	c
b	a	a	a
c	b	c	b

2ᵉ composant (colonnes) ; 1ᵉʳ composant (lignes)

$\perp$	a	b	c
a	b	c	d
b	a	c	a
c	c	b	a

2ᵉ composant (colonnes) ; 1ᵉʳ composant (lignes)

∇	a	b	c
a	a	c	b
b	b	a	
c	c	a	a

Lesquelles sont tables de Pythagore d'une loi de composition dans $\{a, b, c\}$? Il est intéressant de parler assez tôt de *carré latin*, table pour laquelle chaque élément de E figure une fois et une seule sur chaque ligne et chaque colonne.

Il est absolument indispensable de présenter de multiples exemples, avec des notations diverses, de faire exécuter des calculs nombreux sur ces exemples, en insistant sur le rôle des parenthèses, qui est loin d'être évident pour un enfant qui quitte la Cinquième.

L'étude des propriétés sera grandement facilitée par ces nombreux calculs; par exemple ceux dans lesquels on effectue $(a \mathrm{T} b) \mathrm{T} c$ et $a \mathrm{T} (b \mathrm{T} c)$ en trouvant des résultats différents.

La *commutativité* et l'existence du *neutre* ne posent pas de grands problèmes. Il n'en est pas de même pour l'*associativité* et la *distributivité* d'une loi de composition sur une autre; en effet, pour ces propriétés, la table n'est plus guère utilisable!

Il faut « tout vérifier » ou « faire une démonstration ».

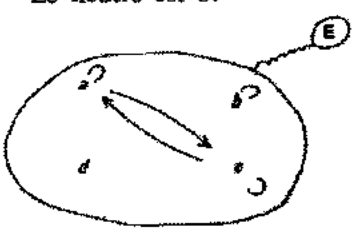
Alors, pour éviter des calculs longs et fastidieux, on « admettra » souvent l'associativité, si le professeur sait, lui, que la loi de composition est associative. Et puis, on présentera des contre-exemples.

La notion d'*éléments symétriques* ne pose pas trop de problèmes. On pourra faire étudier, dans E, la relation.

« ... *est élément symétrique de...* » pour une loi de composition donnée. et constater que cette relation est « symétrique » (!). et que dans certains cas c'est une bijection!

Exemple. Loi * sur $\{a, b, c, d\}$.

Le neutre est b.



Relation "... est symétrique ..."

second composant (colonnes) ; premier composant (lignes)

*	a	b	c	d
a	b	a	b	b
b	a	b	c	d
c	b	c	b	a
d	a	d	a	a

Nous avons eu quelques mésaventures de vocabulaire :
« *symétrie* » de la table pour la commutativité.
« *symétrie* » en tant que propriété d'une relation.
« *éléments symétriques* ».

C'est la raison pour laquelle certains proposent « élément *neutralisant* de x » pour « élément symétrique de x »... A l'usage, ce vocabulaire est bien accepté par les enfants.

Nous avons aussi insisté sur « *absorbant* » pour une loi de composition.

Exemple :

0 est absorbant pour la multiplication dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$.
E est absorbant pour la loi de composition $\cup$ dans $\mathcal{P}^{(E)}$ etc.
Ce terme imagé est simple, commode et bien compris.

On arrive ainsi tout doucement aux *groupes*. Il n'est pas question d'en faire une théorie, mais on y vient tout naturellement; loin d'être une complication inutile, cette synthèse est très bien comprise, et bien utilisée par la suite. Il faudra bien sûr illustrer ce concept d'exemples et contre-exemples nombreux. Et surtout s'en servir *systématiquement* pour résoudre des équations.

Exemples :

$ax = b$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.
$\vec{u} \oplus \vec{x} = \vec{v}$ dans $(\mathcal{V}, \oplus)$, groupe additif des vecteurs géométriques.
$t_{\vec{x}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}}$ dans le groupe des translations $(\mathcal{T}, \circ)$.

② Un peu de logique.

Cette rubrique ne figure pas au programme. Il est pourtant difficile de se passer de quelques notions très simples pour bien comprendre certaines questions : propriétés de lois de composition, équations, raisonnement déductif, etc.

Nous avons traité, timidement et sans doute trop vite (car il faut traiter le reste!...) les questions suivantes :

— *Moule à énoncés* (en évitant « prédicat »).
— *Connecteurs* $\vee$, $\wedge$, $\neg$.
— *Partie de E associée à un moule.* Usage de cartes perforées.
— Relation « ... *entraîne*... » entre... moules. (Notation $\vdash$).
— *Équivalence logique.*

Après bien (!) des discussions, nous n'avons pas voulu, pas pu, pas osé, (comme vous voudrez) parler de quantificateurs, ni du connecteur $\Rightarrow$. D'aucuns le regrettent, d'autres le déplorent; quelques-uns pensent que l'on aurait pu faire l'économie de cette « logique ». En fait l'expérience montre que c'est bénéfique. Peut-être même n'en avons-nous pas fait suffisamment; en particulier, on se passe difficilement de la quantification dans de nombreux cas simples.

Le moule à énoncés

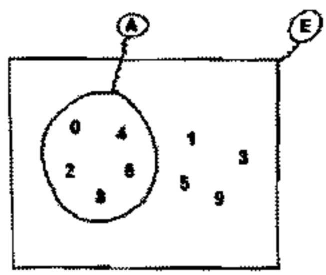
L'expression n'est pas belle! Surtout lorsqu'on parlera de « relation dans un ensemble de moules »! Mais au diable le purisme! Nos élèves en ont retiré un bénéfice certain; nous nous en rendons compte chaque semaine :

$(\square + \Delta)^2 = \square^2 + \Delta^2 + 2\square\Delta$.
Équation dans $\mathbb{R}$: $2\,\square - 5 = 0{,}6$.
Équation de droite : $2u - 4v = 6$.
Inéquations : $a\,\square + b > 0$. Etc.
E est un ensemble de naturels.

P : « $\square$ est pair » n'est pas un énoncé : cette écriture sert à fabriquer des énoncés en mettant à la place de $\square$ des éléments de E.

« 8 est pair » est vrai : 8 *vérifie* le moule P.

« 1 est pair » est faux : 1 ne vérifie pas P.



Le sous-ensemble de E dont les éléments vérifient P est la partie associée à P : c'est A.

Il est important, au début, de ne pas désigner la « lettre muette » (ou la case vide...) par ... une lettre, mais par un signe cabalistique quelconque. Outre le pittoresque de l'écriture, on évitera des questions du genre : « Mais, Monsieur, quand vous écrivez $x \in \mathbb{Z}$, $2x = 5$, cela ne veut rien dire! Je sais bien que x n'est pas élément de $\mathbb{Z}$! »

Les connecteurs seront introduits très simplement, en liaison avec les lois connues de $\mathfrak{P}_{(E)}$.

p associé à la partie A de E
q associé à la partie B de E
$p \wedge q$ associé à la partie $A \cap B$
$p \vee q$ associé à la partie $A \cup B$
$\neg p$ associé à la partie $\overline{A}$

Bien sûr, dans les débuts, il y a eu des confusions... naturelles.

Deux moules p et q sont *logiquement équivalents* si, dans E, leurs parties associées sont égales.

Notation : $p \vdash\!\dashv q$.

La relation « entraîne » $p \vdash q$ signifie « tout élément qui vérifie p vérifie aussi q ».

L'étude de cette relation est relativement simple si, d'une part, E est fini et si d'autre part on considère un ensemble fini de moules très simples.

Exemple :

r : « x *est impair* ».

s : « x *est plus grand que* 8 ».

a) $G = \{11, 4, 12, 17, 6, 2, 20\}$.

Dans G, r entraîne-t-il s?

Dans G, s entraîne-t-il r?

b) Mêmes questions en remplaçant G par H :

$$H = \{3, 7, 6, 15, 2, 4, 23\}$$

c) Mêmes questions en remplaçant G par K :

$$K = \{2, 13, 6, 27, 0\}$$

d) Inventer une partie L de $\mathbb{N}$ telle que, dans L, aucun des deux moules r, s n'entraîne l'autre.

Tout cela se complique — au point d'être inexploitable ou presque — si E est un ensemble infini. Il faut alors un raisonnement avec la quantification sous-jacente. Mais peut-on espérer tout faire à la fois? N'est-ce pas déjà préparer le terrain que présenter une notion importante assez tôt, sur des situations simples?... « tôt et progressivement », comme dit « qui-vous-savez »!

③ Des décimaux aux réels.

Il pouvait sembler téméraire de donner, aux élèves de Quatrième, une idée du corps ($\mathbb{R}$, +, ×), en court-circuitant les fameux rationnels, qu'une habitude déjà séculaire place « logiquement » entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$.

Les expérimentateurs sont à peu près unanimes à reconnaître que cette innovation très importante est excellente. Cette initiation aux réels est plus facile à donner qu'on aurait pu le supposer, cela à plusieurs conditions :

— D'abord bannir absolument toute espèce de théorie de $\mathbb{R}$ plus ou moins déguisée. Après une mise en ordre sur les décimaux, on fait prendre conscience de la nécessité de nombres non décimaux sur des exemples, puis $\mathbb{R}$ est introduit par les propriétés de ($\mathbb{R}$, +, ×, ≤), qui prolongent et complètent celles de ($\mathbb{D}$, +, ×, ≤).

— Ensuite, utiliser au maximum les structures simples (ordres, groupes...) dégagées peu à peu depuis deux ans sur des ensembles finis.

— Disposer de temps et de moyens (machines à calculer) pour effectuer de nombreux calculs d'encadrements par des décimaux.

Avantages de cette présentation

— Réhabilitation des décimaux, outil de calcul par excellence pour le physicien.

— Réhabilitation de la notion d'encadrement et d'approximation, totalement négligée dans les « anciens » programmes.

— On redonne à $\mathbb{Q}$ sa juste place, non historique peut-être, mais bien normale en mathématique.

— Motivations de calculs numériques nombreux.

— Présentation claire, rapide et efficace des règles opératoires avec des réels écrits sous forme fractionnaire, du type $\frac{5}{7}$ ou $\frac{2}{0{,}3}$, en utilisant systématiquement les propriétés admises de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

— Possibilité d'utiliser $\mathbb{R}$ dès le deuxième semestre de Quatrième, notamment en géométrie.

Problèmes qui se posent

— On ne soulèvera pas de questions théoriques. Cependant, elles sont bien présentes, et il n'est pas toujours facile d'en donner une idée même simple et concrète.

Exemples : addition, multiplication de réels et encadrements,
suite illimitée, décimaux non inversibles.

— Il faut beaucoup de temps pour trouver des encadrements, sur des exemples variés. Et, pourtant, l'élève doit faire ces calculs lui-même! Il n'est pas question de les parachuter.

— On ne peut pas vraiment dire « ce qu'est un nombre réel ».

Mais peut-on le dire beaucoup mieux en classe terminale?

Il n'est pas question ici d'entrer dans le détail, mais seulement d'évoquer quelques points particuliers.

Sur les notations et le langage

Jusqu'en début de la classe de Quatrième, nous avons conservé, pour les entiers, les notations 3^+, ou 3, et 3^-. L'avantage de cette notation, ou d'une notation voisine, est incontestable, et sur ce point je ne suis pas d'accord avec les remarques de notre collègue Loi (pour la tradition : *Bulletin*, 277, p. 92). Pour avoir enseigné les *deux* notations (3^- et (-3)), nous pouvons affirmer que la première permet d'éviter de très nombreuses erreurs.

Mais il faut bien reconnaître que cette notation est gênante pour certaines écritures et que, par ailleurs, nous devons faire en sorte que nos élèves puissent lire les ouvrages de mathématique, où l'on écrit (-3) et non 3^-.

Écritures gênantes : $2^{(a^-)}$ qui risque de devenir $(2^a)^- \ldots (3^-) . a$, qui n'est pas plus simple que $-3a$, et risque de devenir $3-a$ (en passant par 3^-a).

Pour cette raison, tout en autorisant encore 3^- pour opp(3), nous sommes progressivement venus à (-3). Cela n'a pas été très simple dans les débuts.

Après des flottements, les choses semblent maintenant claires et les deux notations sont employées, selon les circonstances.

Nous tenons beaucoup à opp(a); à inv(a) pour l'inverse. Le « parallélisme » des propriétés de ces opérateurs est très précieux dans le calcul.

La notation a^{-1} pour $\frac{1}{a}$ ou inv(a) est facilement admise ; il semble cependant que son utilité soit assez réduite.

Le réel 0,2 peut s'écrire $\frac{2}{10}$ ou $\frac{1}{5}$, $\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}$, qui sont des *écritures fractionnaires* différentes du même réel. Le mot *fraction* est pratiquement inutile. Sont totalement inutiles des mots comme « rapport », « proportion »; « quotient de réels » suffit dans toutes les circonstances rencontrées.

$\sqrt{2}$ est lu « radical deux » plutôt que « racine de deux ».

Son opposé est noté opp($\sqrt{2}$) ou ($-\sqrt{2}$).

« $\mathbb{R}$ privé de 0 » est noté sans problème $\mathbb{R}^*$.

Les moules tels que $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ sont notés dans un premier temps $(\square + \bigcirc)^2 = \square^2 + \bigcirc^2 + 2\square\bigcirc$

L'avantage de cette notation est évident, nous l'avons constaté, par exemple dans le passage de $(a+b)^2$ à $\left(3a + \frac{b}{5}\right)^2$.

Les polynômes sont d'abord présentés comme des *applications* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$f : x \mapsto 2x^2 - 4x + 5$$

Par la même occasion, signalons quelques notations en géométrie.

Le vecteur $\vec{u}$, classe de (A, B) est noté aussi $\overrightarrow{AB}$.

Son opposé est noté opp($\vec{u}$), puis accessoirement ($-\vec{u}$) (qui n'est pas très bon).

Certains élèves proposent d'écrire $\overleftarrow{u}$ pour opp($\vec{u}$). Les maîtres devraient bien méditer cette proposition.

Le vecteur neutre pour l'addition est noté $\vec{\theta}$ et non $\vec{0}$.

Certes, on a déjà beaucoup parlé de notations; nous apportons ici un témoignage. Il ne s'agit pas de changer pour le plaisir de changer. Mais incontestablement, certaines notations sont dangereuses. Il faut essayer d'éviter ces dangers, donc essayer des notations nouvelles, mais cela avec des élèves qui n'en ont jamais vu d'*autres* : à cette condition seulement l'expérience est probante. Il faut aussi que le maître joue honnêtement le jeu et se déconditionne lui-même.

Enfin, signalons à l'A.P.M.E.P., dans les colonnes du *Bulletin*, que de très nombreux collègues souhaitent que nous nous mettions d'accord au moins sur les notations les plus courantes, sur le vocabulaire. Le travail de Chevallier et de la Commission du Dictionnaire est considérable. Il faut absolument que chacun fasse l'effort de donner son avis sur telle ou telle notation, puis accepte ensuite une décision unificatrice.

④ Et la géométrie...

La géométrie à elle seule mériterait *deux* bulletins. Il y a tellement à dire! Idées, critiques, suggestions, axiomatiques, vectoriel, suppression... Nous n'allons pas nous engager dans cette voie, déjà très fréquentée.

Après bientôt deux ans de tâtonnements, d'essais, de discussion, nous sommes arrivés sensiblement aux conclusions suivantes :

— Le nouveau programmme de géométrie de Quatrième n'est pas enthousiasmant.

— Il constitue cependant un progrès sur l'ancien.

— La « liberté du choix des axiomes » est une très bonne chose, mais compte tenu des notions présentées, la liberté de manœuvre est-elle bien grande?

— La partie « axiomes d'incidence » ne présente qu'un intérêt limité. Elle peut être traitée très simplement et très rapidement.

— Après avoir présenté « l'énoncé de Thalès », avec la bijection du plan sur $\mathbb{R}^2$, on peut très vite arriver au plan vectoriel, aux translations, et utiliser ce vectoriel comme outil mathématique.

Lorsqu'on en est là, tout devient simple. La présentation initiale présente seule, ou presque, quelques difficultés. Les élèves sont relativement à l'aise en algèbre linéaire.

On objectera que certaines questions ne sont pas traitées de manière intrinsèque... Mais que signifie « intrinsèque »? Le physicien, qui utilise la géométrie euclidienne, fait-il des choses intrinsèques?

N.D.L.R. — Le plan suivi par nos Collègues, pour la présentation de la géométrie, est présenté et développé pages 350 à 378.