Mathématiser les translations techniques

G. H. CLOPEAU,
Lycée Lakanal (Sceaux).

Dans l'article qui suit, notre Collègue, aborde l'enseignement de la géométrie en classe de Quatrième d'un point de vue qui lui est cher, à savoir : assurer la liaison de cet enseignement avec celui de la technologie. Alors que l'on parle beaucoup de pluridisciplinarité, voire d'interdisciplinarité, il paraît en effet souhaitable que la technologie n'apparaisse pas, en Quatrième, comme une discipline s'ajoutant à une liste déjà longue. De même, l'enseignement mathématique ne doit pas être « coupé » du monde des applications.

Le nouveau programme officiel pour les classes de « Quatrième » rappelle un lieu commun de la pédagogie : « Il faut aller du concret à l'abstrait ». Il le fait dans les termes suivants, qui évitent la traditionnelle, mais très obscure, opposition entre concret et abstrait :

« A la fin de l'année scolaire, la géométrie, née de l'expérience, devra apparaître aux élèves comme une véritable théorie mathématique. C'est-à-dire que des faits ayant été admis (axiomes), d'autres en sont déduits (théorèmes)... » Sans doute ce texte n'est-il pas encore parfaitement clair. Dire que des faits peuvent être déduits est une expression dangereuse, suggérant que la réalité est identique au modèle (à moins de préciser ce qu'il convient d'entendre par « faits »); or cette confusion est justement l'un des principaux écueils à éviter. Cependant, ce texte a le mérite de nous rappeler que nous, professeurs de mathématique au niveau élémentaire, nous sommes fortement confrontés à ces problèmes de relations entre réalités et modèles.

La tendance « naturelle » du « mathématicien pur », qui ne trouve, et pour cause, pas de rigueur dans les réalités matérielles, c'est de traiter ces réalités avec désinvolture. Par exemple, on évite de préciser ce qu'est le « pas » d'une graduation, ou bien ce qu'est une « graduation régulière ». Cependant, les axiomes sont présentés comme exprimant des propriétés objectives d'objets tout à fait matériels : les règles graduées. Le « mathématicien pur » est convaincu qu'il ne sait pas exactement comment se comportent ces objets grossiers, dilatables, déformables, etc.; il sait bien qu'on ne peut rien dire de sérieux sur cette réalité, et que la connaissance commence avec l'énoncé du modèle; cela lui semble si évident qu'il néglige d'y insister. Le danger est qu'un grand nombre d'élèves continuent à penser « règles graduées » quand on leur parlera « droites réelles »; ils ne comprendront pas alors que certaines propriétés des règles graduées soient appelées axiomes, alors que d'autres tout aussi « constatables » sont soumises aux rites de la démonstration.

Encore un exemple : les translations du plan ayant été définies (comme bijections du plan P vers le plan P) on a figuré au tableau noir trois points A, B, C, et on propose de figurer le point D, image de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Bien sûr, le dessin que l'on fait, où les « points » sont de grosses taches informes, ne saurait être défini par une translation. Le « mathématicien pur » aura tendance à conclure que la tache figurant le point D, « ce n'est pas la peine de se fatiguer à la construire, on peut la mettre à peu près n'importe où... et parler ensuite de choses sérieuses ». Point n'est besoin d'avoir pratiqué longtemps les élèves de 14 ans pour savoir que ce vague ne peut les satisfaire (à moins qu'il ne les satisfasse trop). Il est troublant pour eux que, simultanément, un dogme (que le professeur appelle définition) impose de croire que D est unique, et que le dessin autorise de placer la tache D « à peu près n'importe où »; ils admettent qu'une construction soit imprécise, mais ils n'admettent pas qu'elle soit superflue.

Gardons-nous donc de mépriser l'initiation expérimentale, et reconnaissons toute l'importance de la démarche de « mathématisation », je veux dire de cette invention qui, à partir de l'observation, crée un modèle. Ce dernier mot prête d'ailleurs lui-même à confusion, et je dois préciser dans quel sens je l'emploie ici. J'appelle modèle une construction strictement intellectuelle, qui obéit à sa logique propre, et jouit par conséquent d'une parfaite autonomie, d'une totale liberté par rapport aux réalités qui l'ont peut-être suggérée.

Les conséquences d'une mauvaise assimilation de cette démarche de mathématisation sont très graves. L'élève est alors dans l'impossibilité de reconnaître un même modèle à plusieurs réalités distinctes. *A fortiori* il ne pourra pas admettre qu'une même réalité puisse correspondre à plusieurs modèles (cf. J.-M. Souriau, *Bulletin* n° 275-76, p. 370). L'élève ressentira la démonstration comme un rite artificiel, conforme certes à une certaine règle du jeu... mais pourquoi jouer à ce jeu-là? Pourquoi admettre certains « faits » et en démontrer d' « autres »? Non seulement l'élève sera handicapé en mathématiques, mais il le sera aussi en sciences : la pratique de la méthode expérimentale et le progrès dialectique dans la compréhension des phénomènes lui seront interdits.

Or, il me semble que le point de vue technique peut nous apporter une aide remarquable pour introduire dans l'esprit des élèves une distinction très claire entre réalités et modèles.

Il y a d'abord des raisons « technologiques » pour donner aux translations toute leur importance. C'est en effet sur les glissements, et sur la technique du rodage, que reposent les définitions techniques du plan et de la droite. Faut-il rappeler que la recherche de la précision serait impossible (puisque l'objet fabriqué par une machine est toujours « moins précis » que la machine elle-même) sans cette technique du rodage qui permet d'obtenir des guidages dont la précision n'a d'autre limite que celle des instruments de mesure? Pour ceux de nos élèves qui suivent un cours de technologie (on pourrait souhaiter qu'ils le suivent tous) les translations techniques sont des phénomènes familiers, qui sont présentés au cours de technologie *avant* d'être repris au cours de mathématique. Pour les élèves qui ne suivent pas de cours de technologie, les translations techniques sont cependant des phénomènes intéressants (motivants) et faciles à appréhender.

Mais, quand on parle d'observer d'abord des « glissements », une objection vient à l'esprit. La translation mathématique est une bijection et non un mouvement (avec ses trajectoires décrites au cours du temps). Observons donc le pied à coulisse. On constate que deux plans A et B, liés à la règle, « glissent » sur deux plans A' et B', liés au curseur. Ainsi la droite technique, intersection des plans A et B, « glisse » sur la droite technique, intersection des plans A' et B'. Mais on constate que ce contact n'est pas constant. En fait il est assuré, seulement lorsque le curseur est au repos, par des ressorts. Une maquette simplifiée peut alors être introduite. Elle se compose d'une règle, et d'une plaque rigide dont un bord rectiligne peut « glisser » le long de la règle, le tout étant posé à plat sur une table. Ainsi est mis en évidence que le *mouvement* amenant la plaque d'une position n° 1 à une position n°2, la règle restant fixe, est sans importance. On mathématise le passage de la position n° 1 à la position n° 2, sans souci des positions intermédiaires. Le modèle utile est donc la vraie translation mathématique, et non le « glissement par mouvement de translation rectiligne » notion plus complexe qui ne peut être étudiée qu'après la définition de la translation.

Examinons maintenant, avec un peu plus de détails, ce que l'on peut faire avec une telle maquette. Le couple de points dessinés (A, B) étant donné, on pose la règle « sur » la droite (AB), puis la plaque « sur » la règle; on marque sur la plaque (ce sera plus facile si elle est transparente) le point A' au contact de A et le point M' au contact d'un point M (les points A, B, M, sont figurés sur le plan de la table, les points A' et M' sont portés par la plaque). On peut alors déplacer la plaque (de façon tout à fait fantaisiste, pourvu qu'on ne la retourne pas), puis la ramener au contact de la règle mais de façon cette fois que A' soit au contact de B. Alors M' est au contact d'un point Q, bien déterminé du plan P. Ce point Q est l'image de M dans la « translation » dont le bipoint (A, B) est « l'ordonnateur ».

Ainsi, à tout point M du plan, on sait faire correspondre un point Q bien déterminé lorsque le couple (A, B) est donné; on a défini une bijection de P vers P. Une manipulation suggère alors que si Q est l'image de M dans la « translation » dont l'ordonnateur est (A, B), alors B est l'image de A dans la « translation » dont l'ordonnateur est (M, Q). Ainsi tous les bipoints tels que (M, Q) sont ordonnateurs de *la même* translation. Le mot « ordonnateur » n'a donc de sens que par rapport à l'utilisation de la maquette. Si un ensemble existe, qui possède exactement la propriété que l'on vient de vérifier approximativement, tous les bipoints : (élément de départ, élément d'arrivée) sont équivalents; on les appelle « bipoints équipollents » et leur ensemble constitue le *vecteur* de la translation, vecteur que l'on pourra désigner par les notations $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{MQ}$, indifféremment. D'autres manipulations suggéreront d'autres propriétés posées en axiomes dans le modèle : « plan affine réel ». Renvoyons au *Bulletin* n° 275-76, page 442, pour les étapes successives du cours de géométrie qui suit. Le modèle, surtout dans les classes qui bénéficient d'un cours de technologie, devrait s'élaborer assez rapidement.

Lorsque ce modèle est posé, il convient d'une part d'en déduire des prévisions, qui ne seront vraies avec exactitude que pour le modèle lui-même, et non pour la réalité technique, mais qui pourront donner lieu à des comparaisons avec cette réalité. D'autre part, pour éviter les bloquages dénoncés plus haut, on pourra étudier en exercices des « maquettes » variées pour chacune des structures rencontrées : comme les translations opèrent dans l'ensemble des points du plan P, on peut trouver plusieurs exemples de « groupe opérant dans un ensemble », de même on peut trouver plusieurs exemples d' « espaces vectoriels », de nature géométrique ou non. Les élèves, que nous évoquions tout à l'heure, n'auront alors plus d'inquiétude pour situer la tache D figurant l'image du point C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$; ils comprendront que le dessin est une maquette, laquelle n'est « conforme » au modèle que si les constructions sont définies (à l'aide, par exemple, de la plaque qui glisse le long de la règle). Mais ils comprendront aussi que ce dessin *n*'est *qu*'une maquette, et que le même modèle pourrait s'illustrer autrement; par exemple, le « plan » pourrait être figuré par une patate, comme tout ensemble; l'ensemble $P \times P$ par une autre patate dans laquelle des tranches figureraient des classes d'équivalence : les vecteurs. La maquette technique, dont l'importance pratique est considérable, et qui a le mérite d'être une bonne motivation pédagogique, ne sera cependant pas identifiée au modèle, et les progrès ultérieurs seront possibles.

En procédant ainsi, les outils mathématiques utiles pour l'avenir, le calcul vectoriel en particulier, sont utilisés très vite, sans complications préalables artificielles, et surtout sans laisser croire à l'élève qu'on lui dévoile la nature des choses matérielles, mais au contraire en l'habituant à inventer, à agir, à confronter les expériences. « Mathématiser les translations techniques » me semble être une bonne manière d'adapter aux élèves de Quatrième l'enseignement de la géométrie, conçue comme « véritable théorie mathématique ».
