Axiomatisation de la droite
(revue de quelques structures possibles)

F. Colmez,
I.R.E.M. Paris.

A. — Quelques généralités.

Pour comprendre les liens et les différences entre les rédactions successives du programme de Quatrième, il est utile de ne pas perdre de vue les faits mathématiques suivants.

I. — Transport de structure.

Soient E et F deux ensembles; supposons qu'il existe une bijection de E sur F, suivant le diagramme :

$$E \xrightarrow{f} F$$

Soit également φ une permutation de F (bijection de F sur lui-même).

$$F \xrightarrow{\varphi} F$$

On peut associer f et φ de deux manières différentes :

(i) En composant f et φ on obtient une nouvelle bijection de E sur F.

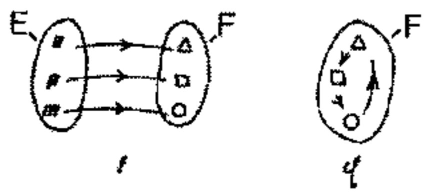
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & F \arrow[r, "\varphi"] & F \end{tikzcd} \qquad g = \varphi \circ f$$

(*ii*) On peut « transporter » φ sur F à l'aide de *f* (le terme exact est : transmuer). On obtient alors une permutation Ψ de E suivant le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Psi"'] & F \arrow[d, "\varphi"] \\ E \arrow[r, "f^{-1}"] & F \end{tikzcd} \qquad \Psi = f^{-1} \circ \varphi \circ f$$

Illustrons ceci par l'exemple très simple suivant :

$E = \{ a, p, m \}$ $\qquad$ $F = \{ \triangle, \square, \bigcirc \}$



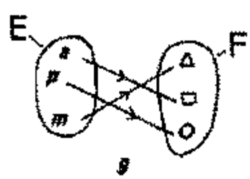
f	
a	△
p	□
m	○

ψ	
△	□
□	○
○	△

• *le procédé* (i) conduit au schéma suivant pour la détermination de l'image de *a* par l'application *g*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g"'] & \triangle \arrow[d, "\psi"] \\ & \square \end{tikzcd}$$

et on a :



g	
a	□
p	○
m	△

• *le procédé* (ii) conduit au schéma suivant pour la détermination de l'image de *a* par l'application Ψ :

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\Psi"'] & \triangle \arrow[d, "\psi"] \\ p & \square \arrow[l, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

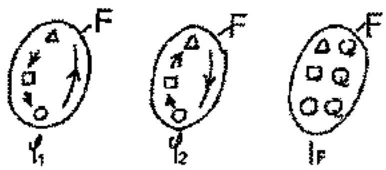
et on a :

Ψ	
a	p
p	m
m	a

Soit maintenant donnée sur F non plus une seule permutation, mais une famille $\mathcal{G}$ de permutations formant un sous-groupe du groupe de toutes les permutations de F.

En appliquant le procédé *(i)* on obtient une famille $\mathcal{F}$ de bijections de E sur F; en appliquant le procédé *(ii)* on obtient un ensemble $\mathcal{H}$ de permutations de E.

Complétons l'exemple précédent en choisissant $\mathcal{G} = \{\varphi_1, \varphi_2, I_F\}$ avec :



φ_1	
△	□
□	○
○	△

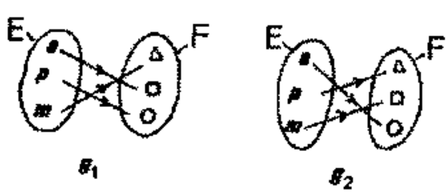
φ_2	
△	○
□	△
○	□

I_F	
△	△
□	□
○	○

$\mathcal{G}$ est bien un groupe; on peut le constater aisément sur la table.

$\circ$	I_F	φ_1	φ_2
I_F	I_F	φ_1	φ_2
φ_1	φ_1	φ_2	I_F
φ_2	φ_2	I_F	φ_1

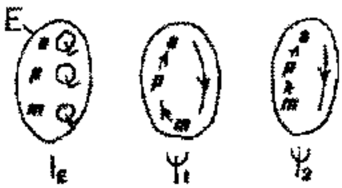
$\mathcal{F} = \{f, g_1, g_2\}$ avec $f = I_E \circ f$; $g_1 = \varphi_1 \circ f$; $g_2 = \varphi_2 \circ f$.



$\xrightarrow{g_1}$	
a	□
p	○
m	△

$\xrightarrow{g_2}$	
a	○
p	△
m	□

$\mathcal{K} = \{I_E, \Psi_1, \Psi_2\}$ avec $I_E = f^{-1} \circ I_E \circ f$; $\Psi_1 = f^{-1} \circ \varphi_1 \circ f$; $\Psi_2 = f^{-1} \circ \varphi_2 \circ f$



$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\xrightarrow{I_E}} \\ a & a \\ p & p \\ m & m \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\xrightarrow{\Psi_1}} \\ a & p \\ p & m \\ m & a \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\xrightarrow{\Psi_2}} \\ a & m \\ p & a \\ m & p \end{array}$$

Étudions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{K}$ (dans le cas général).

1° $\mathcal{K}$ ***est un sous-groupe*** du groupe de toutes les permutations de E. En effet :

a) Si φ_1 et $\varphi_2 \in \mathcal{G}$ en posant $\Psi_1 = f^{-1} \circ \varphi_1 \circ f$ et $\Psi_2 = f^{-1} \circ \varphi_2 \circ f$ on a $\Psi_1 \circ \Psi_2 = f^{-1} \circ \varphi_1 \circ f \circ f^{-1} \circ \varphi_2 \circ f = f^{-1} \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ f$.

$\Psi_1 \circ \Psi_2$ est un élément de $\mathcal{K}$ puisque $\varphi_1 \circ \varphi_2$ est un élément de $\mathcal{G}$.

b) $I_E = f^{-1} \circ I_F \circ f$. I_E est l'élément neutre.

c) $f^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ f$ est l'inverse de $\Psi = f^{-1} \circ \varphi \circ f$.

De plus l'application $\widehat{f} : \mathcal{G} \to \mathcal{K}$ définie par $\widehat{f}(\varphi) = f^{-1} \circ \varphi \circ f$ est un homomorphisme bijectif de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{K}$; autrement dit $\mathcal{K}$ est isomorphe à $\mathcal{G}$.

Le lecteur est invité, s'il le désire, à vérifier cet isomorphisme dans l'exemple précédent en comparant les tables de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{K}$.

2° ***La famille*** $\mathcal{F}$ a été construite par le procédé (*i*) à partir de f et du groupe $\mathcal{G}$.

$$\mathcal{F} = \{\varphi \circ f;\ \varphi \in \mathcal{G}\}$$

Soit g un élément quelconque de $\mathcal{F}$.

l'ensemble $\mathcal{F}' = \{\varphi \circ g;\ \varphi \in \mathcal{G}\}$ obtenu à partir de g et $\mathcal{G}$ par le procédé (*i*) est égal à $\mathcal{F}$.

En effet, puisque $g \in \mathcal{F}$, il existe un élément φ_1 de $\mathcal{G}$ tel que $g = \varphi_1 \circ f$. Soit alors $\varphi \circ g$ un élément quelconque de $\mathcal{F}'$; on peut écrire : $\varphi \circ g = \varphi \circ \varphi_1 \circ f$ et comme $\varphi \circ \varphi_1$ est un élément de $\mathcal{G}$, $\varphi \circ g$ est bien un élément de $\mathcal{F}$. Autrement dit $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. En permutant dans la démonstration précédente les rôles de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, on obtient : $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. On a bien : $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Remarquons aussi que puisque $\mathcal{F} = \{g;\ g = \varphi \circ f,\ \varphi \in \mathcal{G}\}$ on a :

$$\boxed{\mathcal{G} = \{\varphi = g \circ f^{-1};\ g \in \mathcal{F}\}}$$

On peut donc reconstituer l'ensemble des deux familles de bijections $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ si on connaît :

Soit la famille $\mathcal{F}$.

Soit la famille $\mathcal{G}$ et un élément de la famille $\mathcal{F}$.

3° *Le groupe $\mathcal{K}$ ne dépend pas de l'élément f* choisi dans la famille $\mathcal{F}$ pour le construire.

En effet : soit g un autre élément de la famille $\mathcal{F}$; il existe φ_1 dans $\mathcal{G}$ tel que $g = \varphi_1 \circ f$ et $f = \varphi_1^{-1} \circ g$. Si $\Psi = f^{-1} \circ \varphi \circ f$ on peut écrire :

$$\Psi = g^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1} \circ g$$

où $\varphi_1 \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1}$ est un élément de $\mathcal{G}$, de même si $\Psi' = g^{-1} \circ \varphi \circ g$ on a : $\Psi' = f^{-1} \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_1 \circ f$ où $\varphi_1^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_1 \in \mathcal{G}$.

Comme nous l'avons déjà vu les deux applications de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{K}$, $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$, définies respectivement par $\widehat{f}(\varphi) = f^{-1} \circ \varphi \circ f$ et $\widehat{g}(\varphi) = g^{-1} \circ \varphi \circ g$ sont des isomorphismes de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{K}$. Dans le cas où le groupe $\mathcal{G}$ est commutatif, $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ sont égaux (car on a alors $\varphi_1^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_1 = \varphi = \varphi_1 \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1}$) (c'est le cas dans l'exemple donné).

4° *Si on considère également la famille $\mathcal{F}^{-1}$* $= \{f^{-1};\ f \in \mathcal{G}\}$ de bijections de F sur E on rétablit la symétrie entre les deux ensembles E et F si bien que finalement on dispose de :

— un groupe de permutations de E : $\mathcal{K}$,
— un groupe de permutations de F : $\mathcal{G}$,
— une famille de bijections de E sur F : $\mathcal{F}$,
— une famille de bijections de F sur E : $\mathcal{F}^{-1}$.

On peut reconstituer le tout à partir des données suivantes :

Soit *a*) $\mathcal{F}$

b) $\mathcal{F}^{-1}$

c) $\mathcal{G}$ et un élément quelconque de $\mathcal{F}$

d) $\mathcal{G}$ et un élément quelconque de $\mathcal{F}^{-1}$

e) $\mathcal{K}$ et un élément quelconque de $\mathcal{F}$

f) $\mathcal{K}$ et un élément quelconque de $\mathcal{F}^{-1}$

II. — Application à un processus de mathématisation.

1° Ce qu'on peut entendre par mathématiser.

Désignons par S une situation (manipulation, dessin, etc.) que nous avons déjà commencée à étudier; supposons que pour pouvoir parler de cette situation, par exemple communiquer à autrui ou noter pour nous-même des renseignements à propos de cette situation, nous ayons élaboré un schéma de type ensembliste dans lequel certaines manipulations sont traduites par des permutations d'un ensemble E formant un groupe $\mathcal{K}$.

Nous sommes un peu dans la position d'un botaniste qui vient de cueillir une fleur dont il distingue au premier abord certaines caractéristiques, ce qui lui donne des éléments de classement (notre schéma E, $\mathcal{K}$); il va essayer d'identifier la fleur dans une flore en utilisant ces renseignements clairement formulés, mais aussi d'autres renseignements incomplètement formulés.

Abandonnons les fleurs pour revenir à nos moutons, c'est-à-dire à S, E et $\mathcal{K}$. Comme le botaniste, pour des raisons encore incomplètement formulées, nous avons l'intuition que parmi un certain nombre de structures mathématiques que nous connaissons (notre flore) l'ensemble F et le groupe $\mathcal{G}$ doivent convenir comme modèle. Notre intuition peut être guidée par des considérations telles que les suivantes :

a) Dans la situation il y a autre chose que ce que nous avons déjà schématisé.

b) De même F est muni d'une structure plus riche que celle définie par $\mathcal{G}$ (par exemple un sur-groupe de $\mathcal{G}$), et nous soupçonnons un lien entre ces deux faits.

c) Nous espérons bien que la structure de F va nous permettre de compléter le schéma.

Il nous reste à faire la comparaison entre le schéma et le modèle, c'est-à-dire trouver un élément de la famille $\mathcal{F}$ de bijections de E sur F (que nous ne connaissons pas encore) permettant de mettre en évidence l'isomorphisme de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{K}$.

2° Axiomatisation.

a) *Le but de l'axiomatisation,* ici, est une fois le travail exploratoire suffisamment avancé, de dire comment on transporte la structure du modèle au schéma en donnant un petit nombre de propriétés dont les autres pourront se déduire.

Rappelons que la structure du modèle est définie par le groupe $\mathcal{G}$ de permutations de F.

Nous pouvons procéder des *deux manières différentes* suivantes :

(*i*) Distinguer au départ une bijection de E sur F et dire comment se construit la famille $\mathcal{F}$.

(*ii*) Donner d'un seul coup toute la famille $\mathcal{F}$ et dire comment on passe d'un élément de $\mathcal{F}$ à un autre.

Nous obtenons alors deux *types de définition axiomatique :*

α) Première définition correspondant au procédé (*i*) :

On appelle bidule à roulettes un ensemble E (dont les éléments sont appelés roulettes) muni d'une bijection f de E sur F et de toutes celles g qui s'en déduisent de la manière suivante :

φ étant un élément du groupe $\mathcal{G}$ de permutations de F on a :

$$g = \varphi \circ f$$

La famille $\mathcal{F}$ des bijections g s'appelle une structure de carrosserie du bidule à roulettes.

β) Deuxième définition correspondant au procédé (*ii*) :

Un ensemble E dont les éléments sont des roulettes est appelé bidule à roulettes si on a :

Données : Une famille $\mathcal{F}$ de bijections de E sur F.

Axiome : Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{F}$ $g \circ f^{-1}$ est une permutation de F qui est élément de $\mathcal{G}$.

La famille $\mathcal{F}$ s'appelle une structure de carrosserie du bidule à roulettes.

b) *Remarques :*

α) Ces deux axiomatiques sont équivalentes dans ce sens que toutes les deux permettent la construction complète de $\mathcal{H}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$.

β) L'axiomatique (α) fait jouer un rôle privilégié à *une* bijection particulière de E sur F, suivant en cela le procédé de recherche exploratoire; il faut alors montrer que la structure définie de la même façon à partir d'un autre élément de $\mathcal{F}$ est bien la même. Ce souci n'existe pas dans l'axiomatique (β), on dit qu'elle est *intrinsèque*.

γ) Soit E' un deuxième bidule à roulettes muni d'une structure de carrosserie $\mathcal{F}'$; choisissons un élément dans chacun des ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, soient f et f'; posons $h = f'^{-1} \circ f$, h est une bijection de E sur E' et l'application $g' \mapsto g' \circ h$ est une bijection de $\mathcal{F}'$ sur $\mathcal{F}$; h *définit un isomorphisme* pour la structure de carrosserie du bidule à roulettes (E, $\mathcal{F}$) sur le bidule à roulettes (E', F').

La structure de carrosserie est *univalente*, mais on peut définir *a priori* plusieurs isomorphismes puisque f et f' peuvent être choisies arbitrairement. Il n'y a pas d'isomorphisme privilégié (ou canonique).

δ) F lui-même peut être considéré comme un bidule à roulettes muni d'une structure de carrosserie; il suffit dans la définition de prendre E = F et $f = I_F$, on a alors $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

c) Dans le cas d'une *structure univalente*, les mathématiciens utilisent souvent le *procédé d'identification ;* cela consiste à dire que, tant qu'on se borne à utiliser la structure donnée, on n'a pas besoin de s'occuper de l'objet précis qui supporte cette structure, que par suite tous les objets supportant cette structure sont considérés comme indiscernables et portent le même nom. Cette convention a pour avantage une *économie de pensée*, mais pour inconvénient une légère déformation de la réalité mathématique ; en particulier ici si $E = F$ $\mathcal{F}$ est un groupe alors qu'il ne l'est pas si $E \neq F$.

C'est dans cette optique que l'on dit quelquefois que $\mathbb{R}$ est une droite réelle.

Nous allons maintenant montrer comment ce qui précède permet d'expliquer les variations de rédaction d'un projet à l'autre du programme de Quatrième.

B. — La droite.

On peut entendre sous ce nom différentes structures plus ou moins riches et la définition axiomatique qu'on en donnera dépendra évidemment des manipulations faites et par suite du schéma ensembliste construit. D'une manière précise dans le schéma le choix portera essentiellement sur le groupe $\mathcal{H}$; il s'en suit que dans la définition axiomatique le choix portera sur $\mathcal{G}$.

I. — Structure euclidienne.

1° Manipulation.

a) *Les bandes graduées ou échelles :* Ce sont des bandes de papier sur lesquelles sont tracées des traits transversaux. Ces échelles sont *équivalentes :* il est possible de les placer deux à deux le long l'une de l'autre de manière que chaque trait de l'une soit en face d'un trait de l'autre et réciproquement. On peut indifféremment utiliser l'une ou l'autre de ces échelles.

Chaque échelle est régulière physiquement au sens suivant. Plaçons cette échelle le long d'une ligne ; sur cette ligne traçons deux repères α et β en face de deux traits a et b de l'échelle choisis arbitrairement ; si après un glissement arbitraire de la bande de papier le long de la ligne on a placé un trait a_1 de l'échelle en face de α, alors il y a un trait b_1 en face de β, et de plus le nombre de traits entre a et b est le même qu'entre a_1 et b_1.

b) *Une ligne* étant tracée, on transporte sur celle-ci la structure commune des échelles, c'est-à-dire qu'après avoir placé une bande de papier graduée le long de la ligne on trace sur celle-ci un repère en face de chaque trait de l'échelle. On constate en effet que, quelle que soit l'échelle utilisée, si on la place le long de la ligne de manière à mettre un repère de la ligne en face d'un trait de l'échelle, alors chaque trait de l'échelle se trouve en face d'un repère de la ligne et réciproquement (sauf éventuellement près des extrémités). Ceci est vrai en particulier si on s'est contenté de changer la position de la première échelle par glissement le long de la ligne.

c) *Affinement des échelles:* Soit p un entier naturel ($p \geqslant 2$). En partant d'une bande de papier gradué on dessine une échelle p fois plus fine en traçant $p - 1$ traits entre deux traits consécutifs de l'échelle donnée de manière à obtenir une nouvelle échelle régulière.

On peut dire qu'on a obtenu un affinement par p de l'échelle, en partageant en p chaque interstice. Si on réitère l'opération on obtient un affinement par p^2; on dira plutôt un affinement d'ordre 2 par p. Si p n'est pas trop grand (en particulier si $p = 2$) on obtient des affinements d'ordre 4, 5 ou 6. On est limité par l'épaisseur des traits.

d) *Comparaison des affinements:* Deux échelles équivalentes donnent par affinement de même ordre par p deux nouvelles échelles équivalentes. Au contraire, deux affinements par p et q d'ordres quelconques ne donnent pas d'échelles équivalentes, si p et q sont deux naturels premiers entre eux. Plus précisément si on dispose les deux échelles, l'une le long de l'autre en mettant deux à deux face à face les traits initiaux, les nouveaux traits ne sont jamais face à face.

e) *On peut reporter les affinements sur la ligne* en prenant soin de conserver les repères initiaux (correspondant aux échelles non affinées).

2° *Schématisation.*

Nous voulons donner un schéma ensembliste de la ligne qui permette de rendre compte des manipulations précédentes (report de graduations, régularité des graduations, glissement des bandes graduées, affinement des échelles, etc.).

Soit donc E un ensemble représentant la ligne L.

a) Pour pouvoir rendre compte du fait que si on considère trois repères, il y en a *un qui se trouve entre les deux autres*, nous allons munir E d'un ordre total (noté $\prec$) de telle façon que si a, b et c désignant ces trois repères, b se trouve entre a et c nous ayons soit $a \prec b \prec c$ soit $c \prec b \prec a$. En fait l'ordre inverse ferait aussi bien l'affaire et nous n'avons pas à choisir entre les deux pour le moment.

b) Le fait qu'on puisse *reporter toutes les graduations* qu'on veut conduit à supposer qu'entre deux éléments distincts on peut toujours en trouver un troisième; autrement dit :

$$\forall a \forall b \ (a \prec b \text{ et } a \neq b) \Rightarrow \exists c \ (a \prec c \prec b \text{ et } a \neq c \text{ et } b \neq c)$$

c) Le *glissement d'une bande graduée* le long de la ligne permet d'établir une correspondance terme à terme entre les repères, au repère qui se trouve en face d'un certain trait dans la première position on associe le repère qui se trouve en face du même trait dans la seconde position. La traduction ensembliste sera une bijection de E sur lui-même conservant l'un et l'autre des deux ordres; ceci nous oblige en fait à idéaliser notre ligne de façon qu'elle n'ait plus d'extrémités et à supposer que *E n'ait ni premier ni dernier élément* (pour l'un ou l'autre ordre).

d) Les différents glissements de la même bande de papier se traduisent par un *groupe de permutations de E* (chacune conservant l'ordre).

e) Notons $\mathcal{K}_1$ le groupe associé à la graduation initiale et H_p^k le groupe associé à l'affinement d'ordre k par p. $\mathcal{K}_1$ est un sous-groupe de H_p^k quels que soient p et k; plus généralement H_p^k est un sous-groupe de $H_p^{k'}$ si $k < k'$. Par contre si p et q sont premiers entre eux $H_p^k \cap H_p^{k'} = \mathcal{K}_1$.

f) Tous les groupes précédents sont commutatifs et sont évidemment tous des sous-groupes du groupe de toutes les permutations de E (qui lui n'est pas commutatif).

Fixons p et posons $\mathcal{K}_p = \bigcap_{k \geqslant 1} H_p^k$ c'est encore un groupe commutatif (*).

Par contre la réunion de $\mathcal{K}_p$ et $\mathcal{K}_q$ ($p \neq q$) n'est en général pas un groupe et il n'y a pas de raison *a priori* pour que le groupe engendré par cette réunion soit commutatif.

g) En fait pour le moment notre position n'est pas très brillante; rien ne nous garantit que tout ce que nous exigeons de notre schéma soit possible. Nous avons cependant le droit de *tirer les conséquences de ces exigences*. Nous espérons ainsi aboutir *soit à une contradiction*, soit à des résultats nous rappelant quelque chose de connu et qui nous permettront de *trouver un modèle*.

Nous sommes un peu dans la position du botaniste qui ayant une fleur essaie d'imaginer le fruit parce que dans sa flore seuls les fruits sont dessinés. Nous allons chercher notre fruit.

3° *Axiomatisation.*

a) Si sur E *parmi tous les groupes envisagés* nous ne retenons que le groupe $\mathcal{K}_p$ nous pouvons penser comme modèle à l'ensemble V_p des nombres à virgule dans le système de numération à base p. ($\mathbb{D}$, ensemble des décimaux, si $p = 10$) muni du groupe $\mathcal{T}_p$ dont les éléments sont les permutations de la forme $x \mapsto x + a$ ($a \in V_p$).

b) *Soient* p *et* q *deux entiers premiers entre eux*. (E, $\mathcal{K}_p$) a pour modèle (V_p, $\mathcal{T}p$) et (E, $\mathcal{K}_q$) a pour modèle (V_q, $\mathcal{T}_q$). Ces deux modèles rendent chacun compte d'une partie du schéma, mais ils sont incompatibles car $V_p \neq V_q$

(*) $\mathcal{K}_p$ est une partie du groupe de toutes les permutations de F et on a : si $\varphi \in \mathcal{K}_p$ $\exists k \in N$, $\varphi \in H_p^k$; donc $\varphi^{-1} \in H_p^k$ et $\varphi^{-1} \in \mathcal{K}_p$ si φ et ψ sont éléments de $\mathcal{K}_p$ on a $\varphi \in H_p^k$ et $\psi \in H_p^{k'}$ avec par exemple $k < k'$ et alors comme $H_p^k \subset H_p^{k'}$ φ, $\psi \in H_p^{k'}$ donc φ, $\psi \in \mathcal{K}_p$ et de plus $\varphi\psi = \psi\varphi$ puisque $H_p^{k'}$ est commutatif.

(en fait $V_p \cap V_q = \mathbb{Z}$) et sur V_p on ne peut pas construire de groupe isomorphe à $\mathcal{H}_q$ de même que sur V_q on ne peut pas construire de groupe isomorphe à $\mathcal{H}_p$.

Si donc on veut rendre compte de l'existence des deux groupes $\mathcal{H}_p$ et $\mathcal{H}_q$ à la fois, il faut trouver un ensemble plus « riche » que V_p et V_q (*).

c) *Nous connaissons un tel ensemble:* $\mathbb{R}$ (ensemble des réels).

Notons φ_a la permutation de $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x + a$.

L'ensemble $\{\varphi_a ;\ a \in \mathbb{R}\}$ est un groupe commutatif; notons le $\mathcal{G}$. Soit p un entier naturel; particularisons a en ne retenant que les nombres de la forme $a = zp^{-k}$ (où $z \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$); les φ_a correspondants forment un sous-groupe de $\mathcal{G}$; notons le $\mathcal{G}_p$: il a les propriétés que nous exigeons de $\mathcal{H}_p$ (et pourra lui être isomorphe).

L'intersection de tous les sous-groupes $\mathcal{G}_p$ est $\{\varphi_a ;\ a \in \mathbb{Z}\}$; notons ce groupe $\mathcal{G}_1$.

d) *Nous pouvons maintenant axiomatiser;* c'est-à-dire que nous allons remplacer notre brouillon de schéma précédent par un schéma propre construit en nous appuyant sur certaines propriétés de $\mathbb{R}$. Il nous faudra vérifier que ce schéma correspond bien à nos exigences. Remarquons cependant que si la correspondance entre notre modèle et notre schéma est mathématique, il n'en est pas de même entre la situation et le schéma, et la réponse à la question de savoir si tout ce qui est mis dans le schéma correspond à la situation n'est pas du domaine des mathématiques.

e) *Conformément à ce qui a été dit dans A* nous donnerons les deux définitions suivantes.

α) Première définition correspondant au procédé (*i*) :

On appelle droite (**) *un ensemble E, dont les éléments sont appelés points muni d'une bijection* f *de F sur* $\mathbb{R}$ *et de toutes celles* g *qui s'en déduisent de la manière suivante: il existe un réel* a (*dépendant de* g) *tel que pour tout point M de F on ait:* $g(M) = f(M) + a$.

β) Deuxième définition correspondant au procédé (*ii*) :

Un ensemble E dont les éléments sont appelés points est une droite si on a:

Données. *Une famille $\mathcal{F}$ de bijections de E sur* $\mathbb{R}$.

Axiome. *Si* f *et* g *sont deux éléments de $\mathcal{F}$ il existe* $a \in \mathbb{R}$ (*dépendant de* f *et* g) *tel que pour tout point M de E on ait:*

$$g(M) = f(M) + a$$

(*) En fait bien souvent l'ensemble *D* suffit au physicien.

(**) Il faut noter qu'il ne s'agit pas encore de la droite euclidienne, mais d'une structure moins riche ainsi qu'il est expliqué dans ce qui suit.

4° Remarques sur ces définitions.

a) *La première définition fait jouer un rôle particulier à la bijection* f *de E sur* $\mathbb{R}$. Représentons cette bijection (ou plus exactement la bijection réciproque f^{-1}) en utilisant la notation indicielle, c'est-à-dire en notant M_a le point de E dont l'image par f est a ($f(M_a) = a$ ou $f^{-1}(a) = M_a$).

Ceci correspond sur le dessin à une *graduation numérique* obtenue en numérotant les repères tracés sur une ligne L.

Il faut cependant noter que :

α) Généralement on ne dessine d'abord ainsi que les traits correspondant aux entiers relatifs (de petite valeur absolue car la ligne est limitée).

β) Dans les dessins on ne note pas toujours M_a mais a tout simplement, ce qui revient plus ou moins à assimiler :

— la ligne graduée L,

— le schéma ensembliste de cette ligne L,

— $\mathbb{R}$.

Si comme on l'a vu (A, II, 2, *b*) l'assimilation entre $\mathbb{R}$ et E est à la rigueur acceptable, elle est cependant loin de clarifier les choses. Par contre des assimilations entre L qui est une réalité physique et $\mathbb{R}$ ou E qui sont des êtres mathématiques est totalement abusive. En particulier même si la graduation n'est pas régulière physiquement, rien n'empêchera la régularité du modèle décrite à l'aide des groupes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$; simplement l'*adéquation* du modèle mathématique à la situation physique ne sera plus.

Répétons encore une fois avec A. Revuz :

> « Il n'est pas possible de trouver une axiomatique de la droite empêchant un fil de caoutchouc d'être élastique. »

γ) Le dessin est un support à l'intuition et permet de fixer les idées. Mais il ne faudrait pas qu'il devienne un carcan et qu'en particulier le fait d'avoir choisi une bijection particulière de E sur $\mathbb{R}$ (déf. (α)) empêche de penser aux autres éléments de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire de *changer d'origine*. La définition (β) qui ne privilégie aucun élément de $\mathcal{F}$ conduit à les considérer toutes à la fois; elle n'empêche pas, au contraire, pour résoudre un problème donné d'utiliser un élément g de $\mathcal{F}$, puisqu'il est loisible de choisir celui qui simplifiera le plus la question (et qui n'a aucune raison d'être f).

b) *Ordre et distance :*

α) $\mathbb{R}$ est un ensemble totalement ordonné. Si g est une bijection de E sur $\mathbb{R}$, élément de $\mathcal{F}$, on peut à l'aide de g transporter sur E l'ordre de $\mathbb{R}$ en posant $P \prec Q$ si $g(P) \leqslant g(Q)$. L'ordre ainsi défini sur E ne dépend pas de g ; ceci résulte de ce que toutes les permutations φ_a de $\mathbb{R}$ sont croissantes. C'est donc en fait la *donnée de* $\mathcal{F}$ *qui permet de définir un ordre sur E.*

Nous sommes maintenant en présence d'un ordre total sur E; or dans nos exigences sur le schéma nous avions dit ne pas vouloir distinguer entre un ordre et son inverse; *notre schéma n'est pas encore conforme* et nous allons devoir le modifier; pour cela nous serons guidés par les remarques suivantes :

β) Au cours de la description de la régularité physique des échelles (B, I, 1° *a*) nous avons remarqué que le nombre d'interstices entre les traits de l'échelle placés en face de deux repères était le même pour les deux positions de l'échelle. Traduisons cette constatation dans le schéma. Soient P et Q deux points de E; supposons par exemple $P \prec Q$; les deux positions de la graduation numérique se traduisent par deux bijections g_1 et g_2 de E sur $\mathbb{R}$ éléments de $\mathcal{F}$ et les nombres d'interstices sont respectivement $g_1(Q) - g_1(P)$ et $g_2(Q) - g_2(P)$. On a bien égalité puisqu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout M de E on ait $g_2(M) = g_1(M) + a$.

γ) *Sur $\mathbb{R}$ il existe une distance* (*) *canonique* définie par $(x, y) \mapsto |x - y|$. Si $f \in \mathcal{F}$ on peut poser $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$; on obtient ainsi une *distance sur E* et le fait que chaque φ_a soit une isométrie sur $\mathbb{R}$ permet d'affirmer que *les éléments de $\mathcal{H}$ sont des isométries* (**) *sur E*, et encore que $|g(P) - g(Q)| = |f(P) - f(Q)|$ quel que soit l'élément g de $\mathcal{F}$ (en réalité du fait que toutes les applications sont croissantes on a même l'égalité plus précise $g(P) - g(Q) = f(P) - f(Q)$). Ceci revient à dire que la distance définie sur E l'est à partir de n'importe quel élément de $\mathcal{F}$.

δ) Il est facile de vérifier que *toutes les isométries de $\mathbb{R}$* sont de la forme $\varphi_a\ x \mapsto x + a$ ou $\Psi_b\ :\ x \mapsto -x + b$.

Les φ_a sont des applications croissantes (conservant l'ordre).

Les Ψ_b sont des applications décroissantes (renversant l'ordre).

Si bien que le groupe $\mathcal{J}$ des isométries de $\mathbb{R}$ n'est plus associé à l'ordre canonique de $\mathbb{R}$ mais au couple des deux ordres : l'ordre canonique et son inverse.

ε) Nous tenons donc la solution de notre problème : il suffit de remplacer dans ce qui précède le groupe $\mathcal{G}$ de permutations de $\mathbb{R}$ par *le groupe $\mathcal{J}$ des isométries* (***) pour ne plus pouvoir choisir entre les deux ordres inverses l'un de l'autre sur E.

(*) On dit qu'une application δ de $A \times A$ dans $\mathbb{R}^+$ est une distance sur A si on a :

i) $\forall x \forall y \qquad \delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $\forall x \forall y \qquad \delta(x, y) = \delta(y, x)$

iii) $\forall x \forall y \forall z \qquad \delta(x, y) \leqslant \delta(x, z) + \delta(z, y)$ (inégalité triangulaire).

La distance euclidienne dans le plan vérifie ces axiomes et a donné naissance au concept.

(**) Une isométrie sur A est une application de A dans A qui conserve la distance; autrement dit $k : A \to A$ est une isométrie si

$$(\forall x \forall y\ \delta(h(x), h(y)) = \delta(x, y)$$

(***) Il convient de remarquer que le groupe $\mathcal{J}$ n'est pas commutatif.

Au point de vue de la manipulation, si $f : E \to \mathbb{R}$ correspond à une certaine position d'une échelle le long de L, l'application $g = \Psi_b \circ f$ correspond à la position obtenue après un retournement de l'échelle et non un glissement, si bien qu'en parcourant l'échelle toujours dans le même sens on parcourt maintenant la ligne dans l'autre sens.

5° *Structure euclidienne.*

Nous allons maintenant la définir axiomatiquement; elle permet de dégager la notion de *distance* (d'où son nom). Comme plus haut nous aurons deux définitions.

(α) Première définition correspondant au procédé (*i*) :

On appelle droite euclidienne un ensemble E, dont les éléments sont appelés points, muni d'une bijection f *de E sur* $\mathbb{R}$ *et de toutes celles* g *qui s'en déduisent de la manière suivante :*

- *Soit il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout point on ait* $g(M) = f(M) + a$.
- *Soit il existe* $b \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout point on ait* $g(M) = -f(M) + b$.

(β) Deuxième définition correspondant au procédé (*ii*) :

Un ensemble E dont les éléments sont appelés points est une droite euclidienne si on a :

Donnée : *Une famille* $\mathcal{E}$ *de bijection de E sur* $\mathbb{R}$.

Axiome : *Si* f *et* g *sont deux éléments de* $\mathcal{E}$ *on a :*

- *Soit il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout point on ait* $g(M) = f(M) + a$.
- *Soit il existe* $b \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout point on ait* $g(M) = -f(M) + b$.

Remarques :

a) La première définition est celle qui figure dans l'annexe du programme de Quatrième.

b) Comme il a été dit en (A, II, 2°, *b*, δ) on peut canoniquement munir $\mathbb{R}$ d'une structure de droite euclidienne.

II. — Droite affine.

La structure euclidienne nous a permis de rendre compte des manipulations suivantes sur la ligne : *changement d'origine* et *changement de sens*. En affinant les échelles nous avons procédé également à un troisième changement : *le changement d'unité*. C'est la structure affine qui va nous permettre d'en rendre compte.

1° *Manipulation.*

Soient α et β deux repères sur la ligne L; en utilisant l'échelle initiale nous comptons n interstices entre α et β; si nous utilisons un affinement d'ordre 1 par p nous comptons $n.p$ interstices. Ceci veut dire que si a et b sont les nombres correspondant à α et β dans la première graduation numérique et a_1 et b_1 les nombres correspondant dans la deuxième graduation numérique on a :

- Soit $b_1 - a_1 = p(b - a)$ si les graduations sont de même sens.
- Soit $a_1 - b_1 = p(b - a)$ si les graduations sont de sens inverse.

2° Schématisation.

La famille $\mathcal{E}$ de bijections de E sur $\mathbb{R}$ n'est pas suffisante pour rendre compte de la manipulation précédente, ainsi que des autres changements d'unité possibles. En effet, comme nous pouvons choisir arbitrairement les deux premiers traits d'une graduation, nous devons exiger que quels que soient les points distincts P et Q de E, il existe une bijection g de E sur $\mathbb{R}$ telle que $g(Q) - g(P) = 1$. Comme nous voulons conserver les propriétés déjà acquises nous sommes amenés à *remplacer le groupe* $\mathcal{I}$ *des isométries de* $\mathbb{R}$ *par le groupe* $\mathcal{A}$ de toutes les applications $\xi a,b$ de la forme :

ξab : $x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$ et b quelconque.

Ceci conduit aux définitions axiomatiques suivantes.

3° Définitions axiomatiques de la structure de droite affine.

(α) Première définition correspondant au procédé (i) :

On appelle droite affine un ensemble E, dont les éléments sont appelés points, muni d'une bijection f *de E sur* $\mathbb{R}$ *et de toutes celles* g *qui s'en déduisent de la manière suivante : il existe* a $\neq 0$ *et* b *éléments de* $\mathbb{R}$ *tels que pour tout point M de E on ait :*

$$g(M) = a\ f(M) + b$$

(β) Deuxième définition correspondant au procédé (ii) :

Un ensemble E d'éléments appelés points est une droite affine réelle s'il vérifie les axiomes suivants :

A_1 : *A tout couple (A, B) de points distincts de E est associé une bijection* f *de E sur* $\mathbb{R}$ *telle que 0 et 1 soient les images respectives de A et B.*

A_2 : *Si* f *et* g *sont deux bijections de la famille considérée il existe deux réels* a *et* b *tels que pour tout point M de F on ait :*

$$g(M) = a\ f(M) + b \qquad \text{avec} \qquad a \neq 0$$

Remarques. — *a*) La deuxième définition figure sur le projet de programme de novembre 1970.

b) On peut munir $\mathbb{R}$ canoniquement d'une structure de droite affine; c'est souvent à cette structure que fait référence l'expression droite réelle ou droite numérique.

Conclusion. — Nous espérons avoir montré en quoi l'axiomatisation ressemble au menu d'une auberge espagnole : « On n'y trouve que ce qu'on y a apporté. »