I. — Géométrie sur un quadrillage.

PAUWELS,
Boulogne-sur-Mer.

Translation associée à un élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(Emploiera-t-on également le mot « vecteur » pour désigner une translation?)

La translation qui fait passer de A à B est notée $\overrightarrow{AB}$

(On met ainsi l'accent sur l'aspect dynamique de la notion de vecteur).

Groupe des translations.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des translations, la translation « $\vec{u}$ suivie de $\vec{v}$ » sera notée $\vec{u} \oplus \vec{v}$.

D'où la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

(Cette façon d'introduire l'addition vectorielle est peut-être plus naturelle que la manière traditionnelle).

Exercices utilisant la relation de Chasles.

Mise en évidence de propriétés invariantes par le groupe des translations (constatations expérimentales mais aussi quelques démonstrations).

Symétries point. Produit de deux symétries.

(Tenter la démonstration utilisant la relation de Chasles.)

Décomposition d'un vecteur suivant une base. Repérage de points.

Remarques (sur l'intérêt du chapitre précédent).

Dès le début de la géométrie, l'élève est familiarisé avec la technique vectorielle. Si l'aspect « manipulations », « dessins » est toujours présent l'élève commence à faire de véritables démonstrations.

Étude (très sommaire) d'un groupe de transformations.

Mise en place d'un groupe opérant fidèlement et transitivement sur un ensemble : ce qui prépare la définition générale d'un espace affine.

II. — Géométrie plane.

On dégagera le modèle mathématique et les « axiomes » à partir du dessin géométrique; dessin géométrique utilisant la fausse équerre et la règle non graduée. Il importera, à l'issue de toute démonstration, de revenir à une vérification graphique (l'enfant part du réel pour revenir au réel mais enrichi).

Dessin géométrique.	**Modèle mathématique.**
① *Point-droite.* • Tracé d'une droite passant par deux points. • Utilisation de la fausse équerre pour tracer des parallèles. → • Parallèle à une droite donnée passant par un point donné.	① *a*) Le plan est un ensemble (infini?) dont les éléments sont appelés points. *b*) Les droites sont des sous-ensembles du plan tels que : — une droite est une partie propre du plan; — une droite contient au moins deux points; — par deux points distincts passe une droite et une seule. *c*) Postulat d'Euclide.
	Exploitation de 1. — Position relative de deux droites.
• Exercices de tracé.	— Parallélisme.
• Vérification graphique des résultats démontrés. ←	— Directions de droites. — projection de direction donnée.

② *Définition de la translation $\overrightarrow{AB}$.*

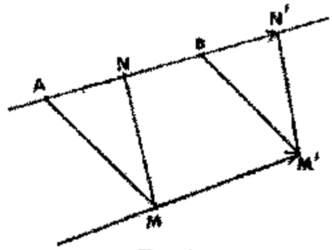

Fig. 1.

$\overrightarrow{AB} : C \mapsto D$

Comparaison des translations

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des translations « $\vec{u}$ suivie de $\vec{v}$ » ($\vec{u} \oplus \vec{v}$) est une translation.

Comparaison de $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{v} + \vec{u}$.

Vérification par le dessin.

Interprétation graphique (construction).

Vérification par le dessin.

② On admettra que :

La donnée d'un bi-point (A, B) détermine une bijection du plan sur lui-même qu'on appelle translation $\overrightarrow{AB}$ (ou vecteur $\overrightarrow{AB}$?).

On admettra que :

a) Si la translation $\vec{u}$ transforme C en D alors : $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$.

b) La composée de deux translation.

(Ceci entraine Chasles :

$$\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}).$$

c) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des translations alors $\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{v} \oplus \vec{u}$.

Exploitation de 2.

Le groupe ($\mathcal{T}$, $\oplus$) des translations

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

Différence de deux translations.

Résolution de $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$.

Équipollence de bi-points (A, B) équipollent à C, D) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, c'est une relation d'équivalence.

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, les droites AB et CD sont parallèles. La direction de ces droites est alors dite direction de la translation $\overrightarrow{AB}$.

Une translation transforme un bi-point en un bi-point équipollent.

Une translation transforme une droite en une droite parallèle.

③ ***Construction d'une règle telle que :***

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} \ldots$

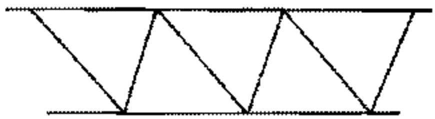

FIG. 2.

$\vec{u}$ étant une translation, construction du transformé d'un point par : $\underbrace{\vec{u} \oplus \vec{u} \ldots \oplus \vec{u}}_{n \text{ termes}}$.

Vérification par le dessin.

Vérification par le dessin.

1^re construction du milieu dun bi-point.

2^e construction du milieu d'un bi-point.

③

Définition de $n\,\vec{u}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $\vec{u} \in \mathcal{T}$).

Le $\mathbb{Z}$-module des translations

(Les translations forment un « espace vectoriel » sur $\mathbb{Z}$.)

Par définition même du transformé d'un point par la translation u, les translations u et $n.u$ ont même direction.

Si $\overrightarrow{AA_1} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AA_2} = 2.\vec{u}$

$\overrightarrow{AB_1} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AB_2} = 2.\vec{v}$

Alors $\overrightarrow{A_2B_2} = 2.\overrightarrow{A_1B_1} = 2(\vec{v} - \vec{u})$.

Soient 4 points A, B, B_1, A_2 tels que

- $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{B_1B_2}$.
- les droites B_2A, B_2A_2 ne sont pas parallèles.

Alors la parallèle à A_2B_2 menée par B_1 coupe la droite AA_2 en un point A_1 tel que : $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1A_2}$.

Définition du milieu d'un bi-point

Le milieu du bi-point (A, B) est le point I tel que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

a) La proposition précédente montre que I existe et en permet la construction.

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ (A, D) et (B, C) ont même milieu.

Remarque. — On admettra que si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $n > \vec{0}$ alors $n.\vec{u} \neq 0$ (l'unicité du milieu d'un bi-point en résulte).

④

④ **Symétries point.**

I étant un point donné la symétrie par rapport à I est la transformation

Construction de transformés de points par symétrie. ←

$$S_I : M \mapsto M'$$

telle que

$$\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM'} = 0$$

Propriétés des symétries.

Vérification par le dessin. ← Composée de deux symétries.

Groupe des translations-symétries point.

⑤

⑤ On admet que :

$$\left.\begin{array}{r} n.\vec{u} = \vec{0} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow n = 0.$$

Conséquence :

$$\left.\begin{array}{c} n\,\vec{u} = m.\vec{u} \\ (m \text{ et } n \in \mathbb{Z}) \\ \vec{u} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m = n$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $\vec{u}$ est une translation I existe $\vec{v}$ unique tel que $\vec{u} = n.\vec{v}$

Construction de $\vec{v} = \frac{1}{n}\vec{u}$. ← on note $\vec{v} = \frac{1}{n}.\vec{u}$.

(La démonstration est analogue à celle du § 3 où l'on démontre l'existence du milieu.)

Définition de $r.\vec{u}$ où $r \in \mathbb{Q}$.

Les translations forment un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

Construction de $r.\vec{u}$. — Barycentre d'un bi-point.

Construction. — Théorème de Thalès.

Après introduction des réels.

Nous admettrons que :

Il existe une application : $\mathbb{R} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$

$$(\lambda, \vec{u}) \mapsto \lambda.\vec{u}.$$

qui prolonge celle que l'on connaît déjà pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ et telle que :

— Les translations forment un espace vectoriel réel.

— L'application $\lambda \mapsto M$ telle que $\overrightarrow{AM} = \lambda . \overrightarrow{AB}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur la droite AB.

Pour terminer on traitera : bases, repères.