La Géométrie

document de travail de l'I.R.E.M. de Lyon,
rédigé par L. DUVERT, R. GAUTHIER,
M. GLAYMANN, A. GOURET et A. MYX.

1. — Introduction.

Ce document a été écrit à l'intention des maîtres; il a pour objet de présenter, dans le cadre des nouveaux programmes, la géométrie en classe de Quatrième; mais il ne peut en aucune façon être considéré comme un cours pouvant être présenté tel quel aux enfants; cependant, nous avons largement tenu compte de la recherche effectuée par l'équipe lyonnaise dans les classes expérimentales et pour certaines partics de ce document — indiquées par un trait en marge — nous avons reproduit des fiches de E. Galion 4, édition 1971.

La géométrie reste pour le moment un domaine privilégié du raisonnement déductif, mais il faut rappeler qu'elle a une origine purement expérimentale, et que dans sa forme définitive, c'est une véritable théorie mathématique; l'enfant aura fait un progrès considérable, lorsqu'il aura saisi ce cheminement.

2. — Propriétés d'incidence.

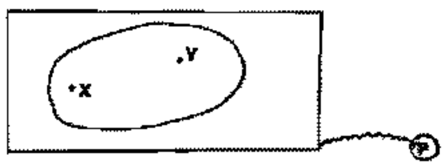
$\mathcal{T}$ est un ensemble.

$\mathcal{D}$ est un ensemble *non vide* de parties propres de $\mathcal{T}$ (1).

On dit que $\mathcal{D}$ est un *ensemble de droites mathématiques* du *plan* $\mathcal{T}$ dont les éléments sont appelés *points* dans le seul cas où les deux axiomes suivants sont vérifiés :

a) Premier axiome d'incidence.

Toute paire (2) de points de $\mathcal{T}$ est incluse dans une droite et une seule de $\mathcal{D}$ (3).



b) Deuxième axiome d'incidence (ou axiome d'Euclide).

Pour toute droite d de $\mathcal{D}$ et pour tout point x de $\mathcal{T}$ n'appartenant pas à d, il existe une droite d' et une seule disjointe de d et dont x est élément.

Vocabulaire : Si le point x appartient à la droite δ, on dit encore que δ passe par x.

Conséquences :

Théorème 1.

Si l'intersection de deux droites contient au moins une paire de points, alors ces deux droites sont égales.

Théorème 2.

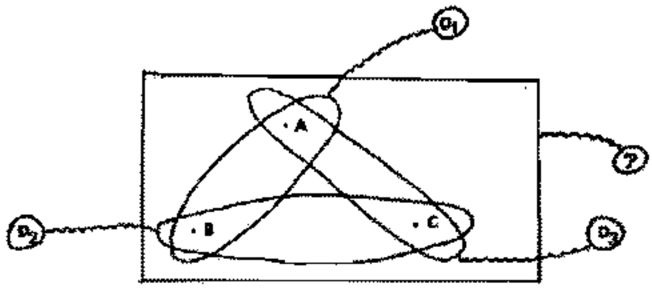
Il existe dans $\mathcal{T}$ au moins trois points n'appartenant pas à une même droite.

En effet, s'il n'y avait que deux points dans $\mathcal{T}$, la droite passant par eux ne serait pas une partie propre de $\mathcal{T}$.

(1) Une partie propre de $\mathcal{T}$ est une partie de $\mathcal{T}$ distincte de $\mathcal{T}$ et non vide.
(2) Le mot *paire* désigne un ensemble de cardinal *deux*.
(3) Cet axiome ne veut pas dire (encore) *que toute droite contient au moins une paire.*

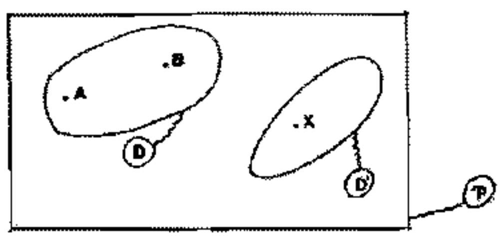
Théorème 3.

Il existe dans $\mathfrak{D}$ au moins trois éléments.



Théorème 4.

Il existe au moins deux droites disjointes dans $\mathfrak{D}$.



Démontrez ce théorème.

c) Définition.

On dit que deux droites D_1 et D_2 sont *sécantes* si leur intersection est un singleton.

X étant le point commun à D_1 et D_2 :

$$D_1 \cap D_2 = \{X\}$$

Autre définition.

Deux droites *parallèles* sont deux droites *non-sécantes.*

Démontrez que si les droites D_1 et D_2 sont parallèles, alors :

$$\text{ou bien } D_1 = D_2$$
$$\text{ou bien } D_1 \cap D_2 = \emptyset.$$

Théorème 5.

La relation dans $\mathfrak{D}$: « ... est parallèle à... » *est une* relation d'équivalence.

Démontrez ce théorème.

(L'axiome d'Euclide n'intervient que dans la démonstration de la transitivité.) Cette relation d'équivalence détermine une *partition* de $\mathfrak{D}$; les classes s'appellent les *directions*.

A titre d'exercice, démontrez que toute droite contient au moins une paire de points.

Notation

La droite contenant la paire $\{X, Y\}$ sera désormais désignée par D(X, Y), et parfois XY.

d) **Étude du modèle à neuf points.**

Voir le rapport du Groupe de Lyon sur l'expérimentation en Quatrième (p. 444).

Remarque

Une feuille de papier, la surface d'une eau tranquille, ne sont pas des plans mathématiques.

La trace d'un crayon bien taillé sur une feuille de papier n'est pas un point mathématique.

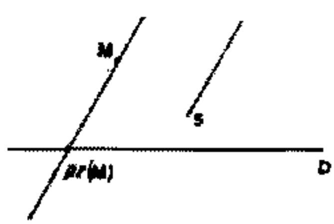
Un trait tracé à la règle n'est pas une droite mathématique.

Cependant, certains dessins, tracés avec une règle et un crayon sur une feuille de papier, permettent d'illustrer (imparfaitement) les propriétés du plan, des droites, des points mathématiques, telles que celles qui sont énoncées dans les axiomes d'incidence 1 et 2.

3. — Projection parallèle de $\mathcal{P}$ sur une droite.

Soit une direction Δ (représentée sur la figure par une droite δ élément de Δ) et une droite D non élément de Δ.

A tout point M de $\mathcal{P}$, on associe le point *pr*(M), intersection de D et de la droite de direction Δ passant par M.



Justifiez l'existence et l'unicité du point *pr*(M).

Nous venons de définir une *application* de $\mathcal{T}$ vers D, notée *pr* :

$$pr : \left| \begin{array}{l} \mathcal{T} \rightarrow D \\ M \mapsto pr(M) \end{array} \right.$$

Cette application s'appelle : *projection de direction* Δ *sur* D ou *projection parallèlement à* δ *sur* D.

pr(M) s'appelle le *projeté* de M sur D parallèlement à δ.

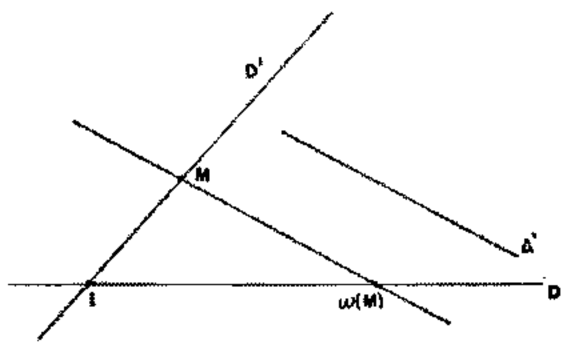
Démontrez que cette application *pr* est *surjective*, mais *non injective*.

En désignant par ω la restriction de *pr* à une droite D' distincte de D et n'appartenant pas à la direction Δ, l'application :

$$\omega : \left| \begin{array}{l} D' \rightarrow D \\ M \mapsto \omega(M) \end{array} \right.$$

définit la projection de la droite D' sur la droite D, parallèlement à Δ.

L'application ω est une bijection.



En déduire que deux droites quelconques sont *équipotentes*.

4. — La droite réelle.

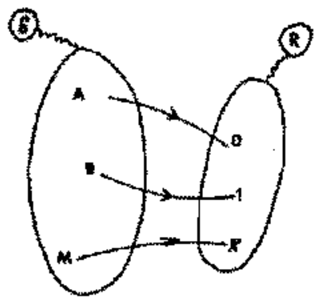
Désormais nous allons nous intéresser uniquement *au cas où les droites sont équipotentes* à $\mathbb{R}$ (ensemble des réels).

a) Définitions et notation.

Une *droite mathématique réelle* est déterminée par un *couple* (δ, f), δ étant une droite mathématique équipotente à $\mathbb{R}$ et f une bijection de δ vers $\mathbb{R}$.

f est une *graduation* de δ.

L'image par f du point M de d s'appelle l'*abscisse* de M pour la graduation f.



Si A est le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1, le couple (A, B) s'appelle *repère* de la graduation. A est l'*origine* de la graduation. M et P étant deux points de d, la notation $\overline{\mathrm{MP}}_f$ (qui se lit « M P barre pour f ») désigne le réel $f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{M})$:

$$\boxed{\overline{\mathrm{MP}}_f = f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{M})}$$

b) **Distance de deux points pour la graduation f.**

M et P étant deux points quelconques de δ d'abscisses respectives $f(\mathrm{M})$ et $f(\mathrm{P})$, on appelle *distance* de M à P le réel

$$|f(\mathrm{M}) - f(\mathrm{P})| \qquad \text{noté} \qquad d_f(\mathrm{M}, \mathrm{P})$$

On définit ainsi une application de $\delta \times \delta$ vers $\mathbb{R}^+$

$$d_f : \left| \begin{array}{l} \delta \times \delta \to \mathbb{R}^+ \\ (\mathrm{M}, \mathrm{P}) \mapsto d_f(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \end{array} \right.$$

Démontrez les propriétés : $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{A} = \mathrm{B}$

$$d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = d(\mathrm{B}, \mathrm{A})$$

$$d(\mathrm{A}, \mathrm{C}) + d(\mathrm{C}, \mathrm{B}) \geqslant d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$$

quels que soient les points A, B et C de la droite δ.

c) **Autres graduations de la droite réelle.**

f est une graduation de la droite δ.

En composant f avec une bijection quelconque de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on obtient une autre bijection de δ vers $\mathbb{R}$:

$$\delta \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{u} \mathbb{R}$$

$$\delta \xrightarrow{\quad u \circ f \quad} \mathbb{R}$$

Prenons comme bijection u une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ du type :

$$u_1 : x \mapsto -x + b$$

ou $$u_2 : x \mapsto x + b \quad (b \text{ est un réel quelconque}).$$

Démontrez que la distance sur δ pour f, pour $u_1 \circ f$, pour $u_2 \circ f$ est la même :

$$\forall_\delta \mathrm{M} \quad \forall_\delta \mathrm{P} \quad d_f(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = d_{u_1 \circ f}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = d_{u_2 \circ f}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$$

Exercice

Que devient la distance de deux points de la droite δ graduée par f si l'on choisit pour nouvelle graduation $s \circ f$ avec

$$s : \left| \begin{array}{l} \mathrm{R} \to \mathrm{R} \\ x \mapsto ax + b \end{array} \right. \qquad a \in \mathbb{R}^* - \{1, -1\}$$

d) **Définition.**

Nous appellerons *graduations de la droite réelle* δ toutes les bijections du type $u_1 \circ f$ ou $u_2 \circ f$. (f est l'une d'elles : pourquoi?)

5. — Milieu d'un couple de points.

A et B étant deux points de la droite δ graduée par f, on appelle *milieu* de (A, B), que l'on note $\mathrm{A} * \mathrm{B}$, le point de δ défini par :

$$f(\mathrm{A} * \mathrm{B}) = \frac{1}{2}(f(\mathrm{A}) + f(\mathrm{B}))$$

Démontrez que le milieu de (A, B) pour $u_1 \circ f$, pour $u_2 \circ f$ est le même que pour f.

Démontrez : $\mathrm{A} * \mathrm{B} = \mathrm{B} * \mathrm{A}$

$\mathrm{A} * \mathrm{A} = \mathrm{A}$

$\mathrm{A} * \mathrm{B} = \mathrm{A} * \mathrm{C} \longmapsto\!\!\dashv \mathrm{B} = \mathrm{C}$

6. — Ordres sur la droite. Segments et demi-droites.

On connait sur $\mathbb{R}$ deux relations d'ordre, notées $\geqslant$ et $\leqslant$; δ étant en bijection avec $\mathbb{R}$, nous pouvons « transférer » ces deux relations sur la droite δ :

a) A et B sont deux points de δ graduée par f.

- Si $f(\mathrm{A}) \leqslant f(\mathrm{B})$ on dit : « A précède B, pour f »

notation $\quad \mathrm{A} \preccurlyeq \mathrm{B}$ (pour f)

ou « B suit A, pour f »

$\mathrm{B} \succcurlyeq \mathrm{A}$ (pour f)

• Démontrez que ces relations dans δ, notées $\prec$ et $\succ$, sont des relations d'ordre total.

Exercice. Soit $u_1 : x \mapsto -x + b$

$u_2 : x \mapsto \quad x + b$

Si $A \prec B$ pour f, *démontrez que $A \prec B$ pour* $u_2 \circ f$ *et $B \prec A$ pour* $u_1 \circ f$.

b) Si $A \prec C \prec B$

ou $B \prec C \prec A$

on dit que le point C est « entre A et B ».

Démontrez que si C est entre A et B pour f, il en est de même pour toute autre graduation $u_1 \circ f$ ou $u_2 \circ f$ de δ.

c) **Segment** : A et B étant deux points de la droite δ, l'ensemble des points de δ entre A et B est un *segment fermé*. A et B sont les *points frontières* ou *extrémités* du segment.

Notations : AB ou BA ou [AB] ou [BA].

Démontrez : $M \in [AB] \longmapsto\!\dashv (f(M) - f(A)).(f(M) - f(B)) \leqslant 0$.

d) **Demi-droites** : A et B sont deux points distincts de δ.

On appelle *demi-droite de frontière* (ou d'*origine*) A, contenant B, l'ensemble des points M de δ, tels que

$$\overline{AM}_f . \overline{AB}_f \geqslant 0$$

c'est-à-dire $(f(M) - f(A)).(f(B) - f(A)) \geqslant 0$.

Démontrez que cette définition ne dépend pas de la graduation choisie sur δ.

e) **Axes** : On appelle *axe* un couple dont le premier terme est une droite δ et le second une graduation de cette droite.

Exemple : axe (δ, f)

axe $(\delta, u_2 \circ f)$ et axe $(\delta, u_1 \circ f)$.

Les axes (δ, f) et $(\delta, u_2 \circ f)$ sont dits de *même sens*.

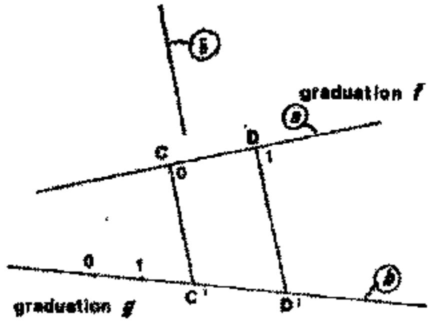
Les axes (δ, f) et $(\delta, u_1 \circ f)$ sont dits de *sens contraires*.

7. — Axiome de Thalès.

a) **Rapport de projection.** On considère :

• une direction quelconque Δ ($\delta \in \Delta$),

• un premier axe (a, f); la droite a n'est pas élément de Δ; le repère de la graduation f est (C, D),

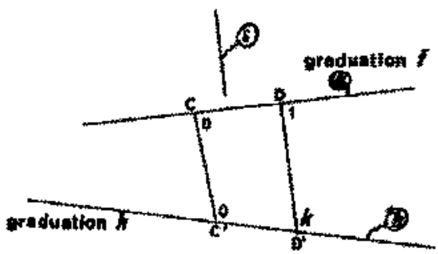


• un second axe (b, g); la droite b n'est pas élément de Δ,

• la projection parallèle de direction Δ, de la droite a, sur la droite b, notée pr,

• les points C' et D' projetés de C et D :

$$C' = pr(C) \qquad D' = pr(D).$$

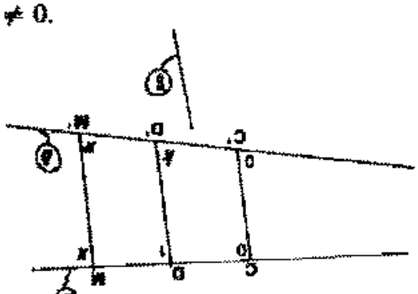


Il existe sur b une graduation h telle que $h(C') = 0$ et que les deux axes (b, g) et (b, h) soient de même sens (démontrez-le). Désignons par k l'abscisse de D' par h :

$$h(D') = k$$

k s'appelle *rapport de projection, pour la direction* Δ, *de l'axe* (a, f) *sur l'axe* (b, g).

Démontrez : $k \neq 0$.



b) **Soit M un point quelconque de *a*, et *x* son abscisse pour *f* :**

$$f(\mathrm{M}) = x$$

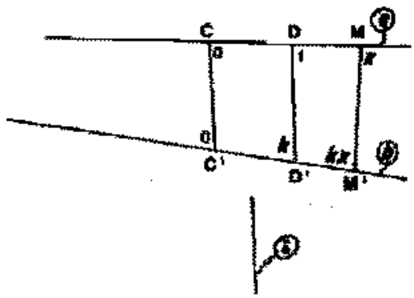
Soit M′ le projeté de M : $pr(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$.

Si on a choisi *f* et *g* n'importe comment, en général x' n'est pas égal à kx.

Désormais, on graduera les droites du plan de façon qye, quelles que soient la direction Δ et les droites *a* et *b* :

$$h(\mathrm{M}') = kx \text{ pour tout M de } a$$

On dit que les droites du plan sont graduées conformément à l'*axiome de Thalès.*



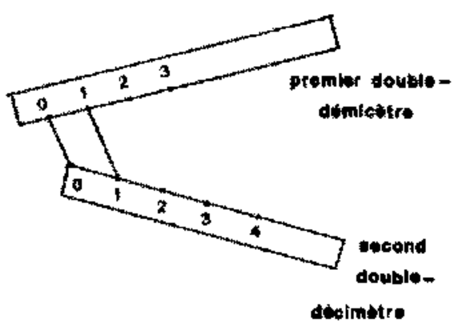
Dans ces conditions, si on connaît Δ, *a*, *b*, le rapport de projection *k*, et une graduation *f* sur *a*, l'axiome de Thalès est un outil pour retrouver une graduation *h* sur *b* (à partir de laquelle on peut retrouver toutes les graduations de *b*).

c) Raison du choix opéré par l'axiome de Thalès : un modèle concret des droites réelles est constitué par les doubles-décimètres.

Voici, extrait de Galion 4, des activités préparatoires proposées aux élèves *avant* l'introduction de l'axiome de Thalès.

① *Activités préparatoires*

Dans ce paragraphe ① tu feras non pas des mathématiques, mais du dessin.

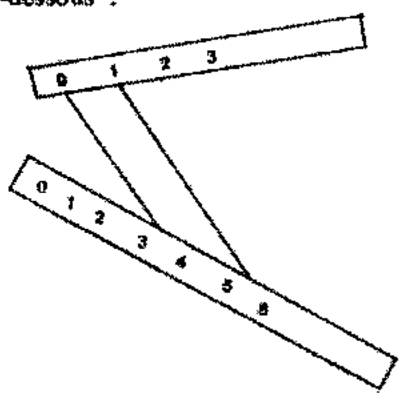


a) Sur une feuille de papier, pose deux doubles-décimètres de façon que les deux droites dessinées en rouge sur la figure ci-avant soient parallèles.

Par les traits marqués 2; 3; 0,5; 2,7 sur le premier double-décimètre, trace les droites parallèles aux deux droites rouges; en quels points coupent-elles le second double-décimètre? Écris tes réponses dans le tableau suivant :

1er double-décimètre. . . .	0	1	2	3	0,5	2,7	x
2e double-décimètre. . . .	0	2	. .	. .	. .	. .	y. .

b) Fais glisser sur lui-même le second double-décimètre de façon à réaliser la figure ci-dessous :



Complète :

1er double-décimètre. . . .	0	1	2	3	0,5	2,7	y
2e double-décimètre. . . .	3	5	. .	. .	. .	. .	. .

c) Dessine la figure et complète le tableau dans le cas suivant :

1er double-décimètre	0	1	2,5	5,2	z
2e double-décimètre	0	1,3	. .	. .	. .

d) Même question dans le cas suivant :

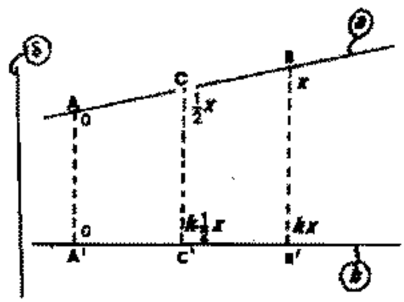
1^{er} double-décimètre	0	1	3	7,8	t
2^{e} double-décimètre	0	1	..	..	..

Est-il obligatoire que les deux doubles-décimètres soient parallèles?

b) **Projection et milieu.**

A et B sont deux points distincts de la droite a. C est le milieu de (A, B). On choisit A comme *origine* de la graduation f sur a.

B a pour abscisse x; le milieu C de (A, B) a pour abscisse $\frac{1}{2}(0+x)$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}x$.



Appelons A', B' et C' les projetés respectifs sur b, parallèlement à δ, des points A, B et C.

Choisissons A' comme *origine* pour une graduation g de b; si k est le *rapport de projection:*

$g(B') = kx$ et $g(C') = k.\left(\frac{1}{2}x\right)$ d'après l'axiome de Thalès.

Calculons l'abscisse du milieu de (A', B') :

$$\frac{1}{2}(g(A') + g(B')) = \frac{1}{2}(O + kx)$$
$$= g(C')$$

Le point C' est donc le milieu de (A', B').

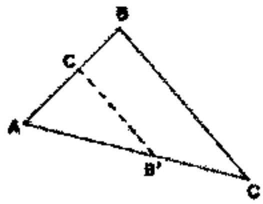
Le projeté du milieu d'un couple de points est le milieu du couple des projetés.

c) **Application au triangle.**

A, B et C sont trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$.
B′ est le milieu de (A, C); C′ est le milieu de (A, B).
Le projeté de C′ sur la droite AC parallèlement à BC est le milieu de (A, C) c'est-à-dire B′.

$$(C' = A * B \wedge B' = A * C) \vdash B'C' // BC$$

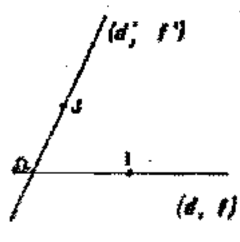
(propriété connue de la « droite des milieux »).



8. — Bijection de $\mathcal{P}$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) **Repère du plan $\mathcal{P}$.**

Soit un couple d'axes sécants en Ω.
Le premier axe (d, f) a pour repère (Ω, I).
Le second axe (d', f') a pour repère (Ω, J).
Les trois points Ω, I et J sont distincts et non alignés.
Le triplet (Ω, I, J) est un repère du plan $\mathcal{P}$.
Inversement, tout triplet de points distincts et non alignés peut être pris comme repère du plan.



b) **Bijection de $\mathcal{P}$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.**

(Ω, I, J) est un repère de $\mathcal{P}$.
M est un point quelconque de $\mathcal{P}$.
pr_1 désigne la projection sur d, parallèlement à d'.
pr_2 désigne la projection sur d′, parallèlement à d.

Le milieu de (A, B) a pour abscisse la demi-somme des abscisses de A et B, pour ordonnée la demi-somme des ordonnées de A et B.

$$A * B : \left(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(a', b')\right)$$

$\boxed{M \in \mathfrak{T}}$

↙ ↘

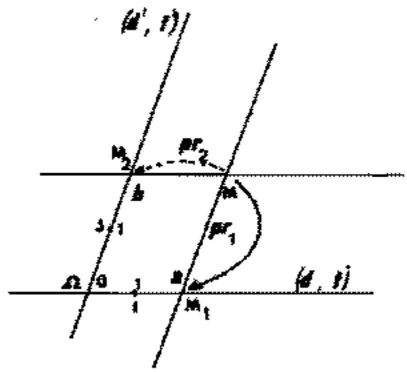
$\boxed{M_1 = pr_1(M)}$ $\boxed{M_2 = pr_2(M)}$

↓ ↓

a est l'abscisse de M_1 pour (d, f) | *b* est l'abscisse de M_2 pour (d', f')

↘ ↙

au point M de $\mathfrak{T}$, on associe le couple (a, b) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



On définit ainsi une application φ de source $\mathfrak{T}$, de but $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ M \mapsto \varphi(M) = (a, b) \end{array} \right.$$

Réciproquement, à tout couple de réels (a, b), on peut associer un point M et un seul du plan P,

l'abscisse de $pr_1(M)$ sur d étant a,
l'abscisse de $pr_2(M)$ sur d' étant b.

La relation réciproque de φ est une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers $\mathfrak{T}$.

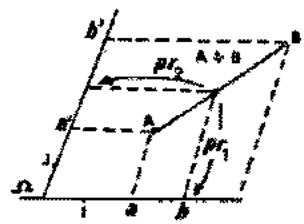
φ est une bijection de $\mathfrak{T}$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Pour le repère (Ω, I, J) :
a est l'*abscisse* du point M; b est son *ordonnée ;*
Le couple (a, b) s'appelle le couple des *coordonnées* du point M.

c) Coordonnées du milieu d'un couple de points.

A a pour coordonnées (a, a'),
B a pour coordonnées (b, b'), dans le repère (Ω, I, J).
$pr_1(A * B)$ est le milieu de $(pr_1(A); pr_1(B))$ (cf. : 7 *d*).
L'abscisse de $pr_1(A * B)$ est donc $\frac{1}{2}(a + b)$.

De même l'abscisse de $pr_2(A * B)$ est $\frac{1}{2}(a' + b')$.

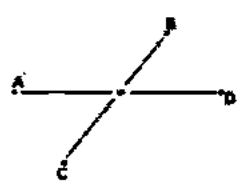


9. — Équipollence et translation.

a) Définition de l'équipollence.

C'est une relation dans $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$, définie de la façon suivante (elle est notée eq).

$$\boxed{(A, B) \text{ eq } (C, D) \text{ signifie } A * D = C * B}$$



b) Équipollence dans $\mathcal{P}$ muni d'un repère (Ω, I, J).

Voici quatre points et leurs couples de coordonnées :

$A(a, a')$, $B(b, b')$, $C(c, c')$ et $D(d, d')$

$$\begin{aligned}(A, B) \text{ eq } (C, D) &\longmapsto\!\!\!\!\dashv\ A * D = C * B\\ &\longmapsto\!\!\!\!\dashv \left(\frac{a+d}{2} = \frac{c+b}{2}\right) \wedge \left(\frac{a'+d'}{2} = \frac{c'+b'}{2}\right)\\ &\longmapsto\!\!\!\!\dashv (b - a = d - c) \wedge (b' - a' = d' - c')\end{aligned}$$

Conséquence : Transitivité de l'équipollence. Supposons :

$$(A, B) \text{ eq } (C, D) \quad \text{et} \quad (C, D) \text{ eq } (E, F)$$

ce qui entraîne, en utilisant les coordonnées des points ($E(e, e')$; $F(f, f')$) :

$$b - a = d - c \quad \text{et} \quad d - c = f - e, \quad \text{donc} \quad b - a = f - e$$

de même $b' - a' = d' - c'$ et $d' - c' = f' - e'$, donc $b' - a' = f' - e'$

il en résulte : (A, B) eq (E, F).

La relation d'équipollence dans $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ est réflexive, symétrique (démontrez-le), transitive; c'est donc une *relation d'équivalence.*

Remarque

$$(A, B) \text{ eq } (C, D) \wedge .(A, B) \text{ eq } (C, D') \vdash D = D'$$

En effet :

$$\begin{cases} A * D = C * B \\ A * D' = C * B \end{cases} \quad \text{donc} \quad A * D = A * D' \quad \text{donc} \quad D = D' \text{ (cf 5).}$$

c) **Translation** : (A, B) est un couple donné de points.

En vertu de la remarque précédente, étant donné un point M, il existe un point M' et un seul tel que

$$(M, M') \text{ eq } (A, B)$$

Définition.

$t_{(A, B)}$ est l'*application* de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ qui au point M associe le point M' tel que (M. M') eq (A. B)

Tout couple de points définit une translation unique.

Démontrez :

- $t_{(A, B)} : A \mapsto B$.
- la relation réciproque de $t_{(A, B)}$ est l'application $t_{(A, B)}$ (échange des moyens et des extrêmes dans l'équipollence, justifié par la définition à partir de la loi du milieu).

$t_{(A, B)}$ est une *bijection* de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$.
- $t_{(A, A)}$ est l'identité dans $\mathcal{P}$.
- (A, B) eq (C. D) $\dashv\vdash$ $t_{(A, B)} = t_{(C, D)}$ (utilisez la transitivité de l'équipollence).

Étude analytique d'une translation : Dans le repère (Ω, I. J). le point M a pour coordonnées (x, y), le point E a pour coordonnées (a, b).

Soit la translation $t_{(\Omega, E)}$

$$t_{(\Omega, E)} : M \mapsto M'$$
$$(x, y) \qquad (x', y')$$

Démontrez : $(x' = x + a) \wedge (y' = y + b)$.

d) **Groupe des translations.**

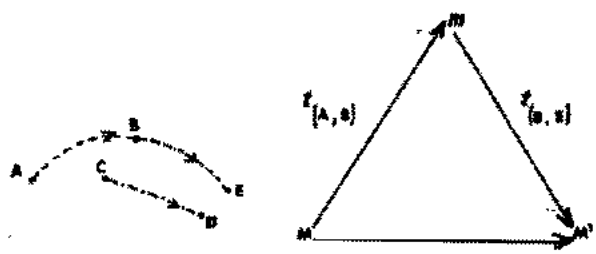
Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations.

α) $t_{(A,B)}$ et $t_{(C,D)}$ sont deux translations. Soit E *le* point tel que

$$(B, E) \text{ eq } (C, D) \ : \ t_{(C,D)} = t_{(B,E)}$$

Soit M un point quelconque du plan.

$t_{(A,B)}$: $M \mapsto m$ donc (M, m) eq (A, B) donc (M, A) eq (m, B).
$t_{(B,E)}$: $m \mapsto M'$ donc (m, M') eq (B, E) donc (m, B) eq (M', E).

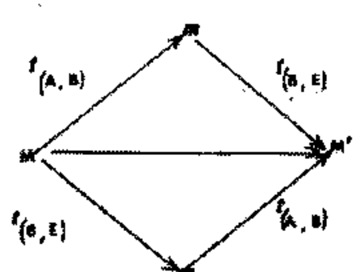


Il en résulte : (M, A) eq (M', E)
ou encore (M, M') eq (A, E).

Nous avons démontré : $t_{(B,E)} \circ t_{(A,B)} = t_{(A,E)}$.
La composée de deux translations est une translation.

e) **($\mathcal{T}$, $\circ$) est un groupe commutatif.**

— Associativité : pensez à la composition des applications.
— Élément neutre : $t_{(A,A)}$.
— Translation réciproque : $t^{-1}_{(A,B)} = t_{(B,A)}$;
$t_{(A,B)}$ et $t_{(B,A)}$ sont symétriques pour la loi de composition notée.
— Commutativité : démontrez-la.



10. — Vecteurs.

a) La relation d'équipollence est une relation d'équivalence dans $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$: chaque classe d'équivalence est appelée ***vecteur géométrique.***

Notation : un vecteur peut être noté $\vec{u}$.

Si (A, B) est élément de la classe $\vec{u}$, le vecteur $\vec{u}$ peut être aussi noté $\overrightarrow{AB}$.

$$(A, B) \text{ eq } (C, D) \longmapsto \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Tout couple, élément de la classe $\vec{u}$, est un *représentant* de ce vecteur. Le vecteur de représentant (A, A) est noté $\vec{0}$, et appelé quelquefois vecteur nul.

b) **Remarque** : $\overrightarrow{AB} = \{(X, Y);\ \mathcal{P} \times \mathcal{P};\ (X, Y) \text{ eq } (A, B)\}$

$$\overrightarrow{AB} = \{(X, Y);\ \mathcal{P} \times \mathcal{P};\ t_{(A, B)}(X) = Y\}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le *graphe* de la translation $t_{(A, B)}$ dans $\mathcal{P}$.

Désormais $t_{(A, B)}$ peut être noté $t_{\overrightarrow{AB}}$, ou $t_{\vec{u}}$ si $(A, B) \in \vec{u}$.

c) **Bijection de l'ensemble $\mathcal{T}$ des translations vers l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs.**

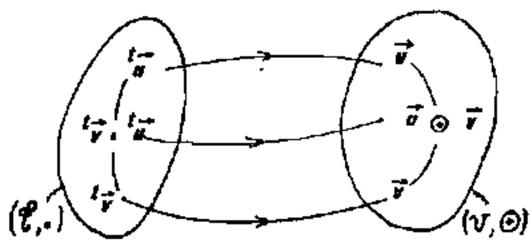
A toute translation $t_{(A, B)}$, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$;

A tout vecteur $\vec{u}$, on associe la translation $t_{\vec{u}}$ de graphe $\vec{u}$.

$(\mathcal{T}, \circ)$ est un ***groupe commutatif.***

f est la bijection de $\mathcal{T}$ vers $\mathcal{V}$ définie ci-dessus; définissons dans $\mathcal{V}$ *la* loi de composition notée $\oplus$, induite de la loi $\circ$ dans $\mathcal{T}$ par f. Cette loi $\oplus$ est l'addition dans $\mathcal{V}$.

L'addition dans $\mathcal{V}$ n'est qu'une autre façon de rendre compte de la composition des translations.

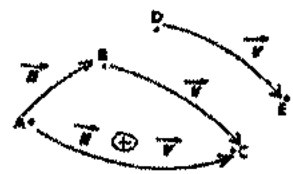


$(\mathcal{V}, \oplus)$ est un ***groupe commutatif.***

Pratiquement, comment trouver un représentant de la somme $\vec{u} \oplus \vec{v}$ si l'on connaît un représentant (A, B) de $\vec{u}$ et un représentant (D, E) de $\vec{v}$?

On construit C tel que (B, C) est équipollent à (D, E).

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}} \quad \text{(égalité de Chasles)}$$



$\overrightarrow{AB}$ est l'*opposé* de $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Différence dans $\mathcal{V}$: c'est une loi de composition dans $\mathcal{V}$, notée $\ominus$ définie par

$$\vec{u} \ominus \vec{v} = \vec{u} \oplus \text{opp}(\vec{v})$$

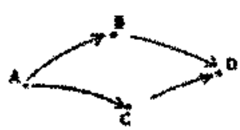
opp($\vec{v}$) désignant l'opposé de $\vec{v}$; on le note aussi $(-\vec{v})$.

11. — Parallélogramme.

a) Les formules suivantes sont logiquement équivalentes :

$$(A, B) \text{ eq } (C, D)$$
$$A * D = C * B$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$
$$t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{CD}}$$

On traduit encore cette situation en disant que le quadruplet (A, B, D, C) est un *parallélogramme*.



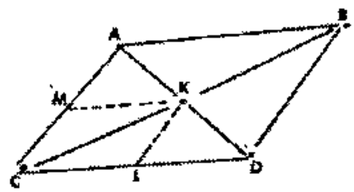
(La seconde figure représente un parallélogramme *aplati*.)
Il peut aussi se désigner par (B, D, C, A); (B, A, C, D), etc.
Il ne peut pas être désigné par (A, B, C, D), ni par (B, C, A, D)...

Dans le cas d'un parallélogramme non aplati, les droites AD et BC sont appelées *diagonales* du parallélogramme; leur intersection, milieu commun des couples (B, C) et (A, D), est le *centre* du parallélogramme.

b) (A, B, D, C) est un parallélogramme non aplati de centre K.
Soit L le milieu de (C, D), M le milieu de (A, C).
Démontrez (voir ⑦ *e*) que :

KL//AC et KL//BD donc AC//BD
de même : AB//CD.

Les côtés d'un parallélogramme sont parallèles deux à deux.



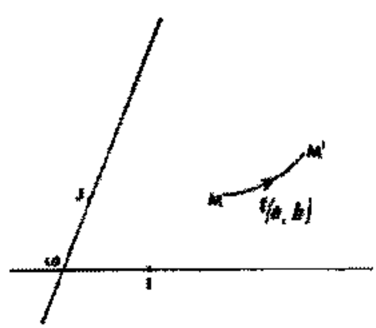
12. — Composantes d'un vecteur.

a) Le plan est muni du repère (ω, I, J).
Les droites ωI et ωJ ne sont pas parallèles.
$t_{(A,B)}$ est la translation définie par

$$M \mapsto M'$$
$$(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$$

On a vu (n° 10) qu'à toute translation est associé un vecteur unique.
Si $\vec{u}$ est le vecteur associé à $t_{(A,B)}$, on dit que (a, b) est le *couple des composantes* du vecteur $\vec{u}$.

Notation : $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



M(x, y) a pour image M$'(x', y')$:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = x' - x \\ b = y' - y \end{cases}$$

$$\boxed{M(x, y);\ M'(x', y').\ \text{Composantes de } \overrightarrow{MM'} : \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}}$$

b) Si $\vec{u}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

et si $\vec{v}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

trouver les composantes de $\vec{u} \oplus \vec{v}$, de $\vec{u} \ominus \vec{v}$, de $\vec{v} \ominus \vec{u}$.

c) Quelles sont les composantes du vecteur 0?

13. — Produit d'un vecteur par un réel.

a) $\alpha \in R$
$\vec{u} \in \mathcal{V}$

$\vec{u}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Au couple $(\alpha, \vec{u})$ on associe le vecteur $\vec{v}$, de composantes $\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$.

On définit ainsi une application de $R \times \mathcal{V}$ vers $\mathcal{V}$.

Notation : $\boxed{\vec{v} = \alpha\vec{u}}$

Cette application définit une loi externe dans $\mathcal{V}$.

b) *Démontrez les propriétés suivantes :*

$\forall_R\alpha,\ \forall_R\beta,\ \forall_{\mathcal{V}}\vec{u},\ \forall_{\mathcal{V}}\vec{v}$: $\quad 1\,\vec{u} = \vec{u}$ (1)

$$(\alpha + \beta)\,\vec{u} = (\alpha\vec{u}) \oplus (\beta\vec{u}) \qquad (2)$$

$$\alpha(\vec{u} \oplus \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \oplus (\alpha\vec{v}) \qquad (3)$$

$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\,\vec{u} \qquad (4)$$

$$0\,\vec{u} = \vec{0} \qquad (5)$$

$$(-1)\,\vec{u} = \text{opp}(\vec{u}) \qquad (6)$$

$$\alpha\vec{0} = \vec{0} \qquad (7)$$

Remarques pédagogiques : Noter les signes $+$ et $\oplus$ dans la propriété : $(\alpha + \beta)\,\vec{u} = (\alpha\vec{u}) \oplus (\beta\vec{u})$.

• $(\alpha\vec{u}) \oplus (\beta\vec{u})$ sera souvent noté $\alpha\vec{u} \oplus \beta\vec{u}$ en accordant priorité à la multiplication par un réel sur l'addition dans $\mathcal{V}$.

• De même $(\alpha\beta)\,\vec{u}$ s'écrira souvent $\alpha\beta\,\vec{u}$.

c) ($\mathcal{V}$, $\oplus$) *est un groupe commutatif.*

La loi externe définie dans $\mathcal{V}$ a les propriétés (1) (2) (3) (4) ci-dessus. On reconnaît ici que $\mathcal{V}$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est *un vectoriel sur le corps* $\mathbb{R}$.

Vous savez d'ailleurs que les propriétés (5) (6) (7) sont des conséquences des axiomes du vectoriel.

d) La définition du produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un réel α donnée en *a*) présente l'inconvénient de ne pas être « intrinsèque », c'est-à-dire de dépendre, en apparence du moins, du choix d'un repère du plan.

1) Voici une définition intrinsèque, à l'usage du maître, mais qui nous semble trop délicate pour un élève du premier cycle :

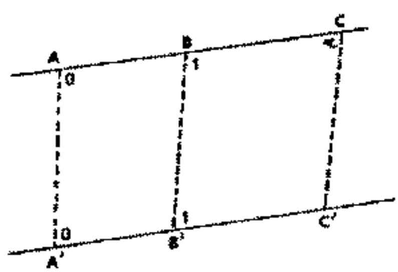
α) Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, soit (A, B) un représentant de $\vec{u}$; A $\neq$ B. Pour la graduation de repère (A, B) sur la droite AB, α est l'abscisse d'un point C.

Soit (A′, B′) un autre représentant de $\vec{u}$, et C′ le point de la droite A′B′ d'abscisse α pour la graduation de repère (A′, B′). Supposons que les droites AB et A′B′ sont distinctes.

$$(A, B) \text{ eq } (A', B')$$

donc $$(A, A') \text{ eq } (B, B')$$

donc $$AA' // BB'.$$



Le projeté de C sur la droite A′B′ parallèlement à AA′ est, d'après l'axiome de Thalès, le point de la droite A′B′ d'abscisse α (le rapport de projection est égal à 1), c'est-à-dire C′.

Donc $$CC' // AA'$$

Et comme AC // A′C′, (A, C, C′, A′) est un parallélogramme, donc

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}.$$

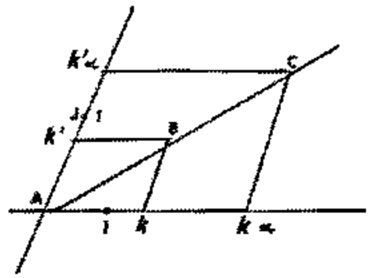
Il en est de même pour toute paire de représentants de $\vec{u}$ (même portés par une même droite : pourquoi ?).

Par définition, $\alpha\vec{u}$ est la classe d'équipollence de (A, C), (A′, C′)...

β) Si $\vec{u} = \vec{0}$, par définition $\alpha\vec{0} = \vec{0}$.

2) On peut alors traduire cette nouvelle définition dans un repère (A, I, J) quelconque du plan :

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les composantes de $\vec{u}$. Les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ sont (x, y). Si k est le rapport de projection de l'axe de repère (A, B) sur l'axe de repère (A, I) parallèlement à AJ, et k' le rapport de projection de l'axe



de repère (A, B) sur l'axe de repère (A, J) parallèlement à AI, les coordonnées de B sont (k, k') et celles du point C de la droite AB d'abscisse α pour le repère (A, B) sont $(k\alpha, k'\alpha)$.

Donc : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} k \\ k' \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} k\alpha \\ k'\alpha \end{pmatrix}$

On retombe sur la définition donnée en *a*).

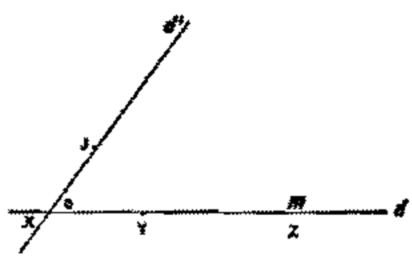
14.

X et Y sont deux points *distincts* de $\mathcal{P}$.

Choisissons (X, Y, J) comme repère du plan $\mathcal{P}$ (XY et XJ sont deux droites sécantes en X).

a) Soit Z le point de la droite XY d'abscisse m.

$$\overrightarrow{XZ} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = m\,\overrightarrow{XY}.$$



Donc :

Si Z est un point de la droite XY, il existe un réel m tel que :

$$\overrightarrow{XZ} = m\,\overrightarrow{XY}$$

Quels sont les points qui correspondent à $m = 1$, à $m = 0$, à $m = \frac{1}{2}$?

b) Soit T un point tel que :

$$\overrightarrow{XT} = \alpha\overrightarrow{XY}$$

α étant un réel.

$\overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{XT} = \begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}$, donc les coordonnées du point T sont : $(\alpha, 0)$. Donc T est un point de la droite XY. Donc : si $\overrightarrow{XT} = \alpha\overrightarrow{XY}$, T est un point de la droite XY et α est l'abscisse de T pour la graduation du repère (X, Y).

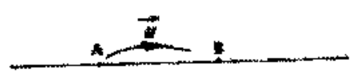
c) Soit $\vec{u}$ un vecteur différent de $\vec{0}$, (A, B) et (C, D) deux représentants de $\vec{u}$:

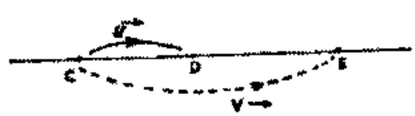
(A, B) eq (C, D), donc les droites AB et CD sont parallèles.

La direction commune aux droites AB et CD s'appelle la *direction de* $\vec{u}$.

Soit deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{v} = m\,\vec{u}$ (m est un réel non nul); soit E le point tel que (C, E) est un représentant de $\vec{v}$;

$$\overrightarrow{CE} = m\,\overrightarrow{CD}$$





Donc E est un point de la droite CD.

Donc AB et CE sont des droites parallèles.

Donc les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $m\,\vec{u}$ ont *même direction.*

d) Soit deux vecteurs non nuls $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$; Ω un point du plan; (Ω, A) est un représentant de $\vec{\imath}$, (Ω, B) un représentant de $\vec{\jmath}$.

Si les droites ΩA et ΩB sont sécantes en Ω, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ n'ont pas même direction; (Ω, A, B) peut être pris pour repère du plan $\mathcal{P}$.

Soit un vecteur $\vec{w}$ quelconque.

Pour le repère (Ω, A, B), le couple des composantes de $\vec{w}$ est (x, y).
le couple des composantes de $\vec{\imath}$ est $(1, 0)$.
le couple des composantes de $\vec{\jmath}$ est $(0, 1)$.

Donc :

$$\boxed{\vec{w} = x\,\vec{\imath} \oplus y\,\vec{\jmath}}$$

15. — Barycentre.

Soit n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$
et n réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Cherchons s'il existe un point G du plan tel que :

$$(1) \qquad \alpha_1 \overrightarrow{GA_1} \oplus \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} \oplus \ldots \oplus \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = 0$$

$$\overrightarrow{GA_2} = \overrightarrow{GA_1} \oplus \overrightarrow{A_1A_2} \ldots \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{GA_1} \oplus \overrightarrow{A_1A_n}$$

Donc (1) s'écrit :

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \overrightarrow{GA_1} \oplus \alpha_2\overrightarrow{A_1A_2} \oplus \ldots \oplus \alpha_n\overrightarrow{A_1A_n} = 0$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$:

$$\overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} (\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2} \oplus \ldots \oplus \alpha_n\overrightarrow{A_1A_n})$$

Donc il existe un point et un seul répondant à la question. Il s'appelle *barycentre* des couples (A_1, α_1), (A_2, α_2), ... (A_n, α_n).

Le programme ne comporte que des exercices sur le barycentre. Voici une fiche extraite de Galion 4e :

① A et B sont deux points distincts de $\mathcal{T}$.

a) Quel est le point M de $\mathcal{T}$ tel que :

$$1 \overrightarrow{MA} \oplus 1 \overrightarrow{MB} = \vec{\theta} ?$$

On dit aussi que M est le barycentre de (A, 1) et (B, 1).

b) Démontrer qu'il existe un point N de $\mathcal{T}$ tel que :

$$1 \overrightarrow{NA} \oplus 2 \overrightarrow{NB} = \vec{\theta}$$

Pour cela, remplace $\overrightarrow{NB}$ par $\overrightarrow{NA} \oplus \overrightarrow{AB}$, puis trouve le réel r tel que :

$$\overrightarrow{NA} = r \overrightarrow{AB}$$

On dit que N est le barycentre de (A, 1) et (B, 2). N est un point de la droite AB.

Construis-le sachant que (A, B) est le repère de la droite AB.

c) Démontre qu'il n'existe pas de point P de $\mathcal{T}$ tel que :

$$1 \overrightarrow{PA} \oplus (-1) \overrightarrow{PB} = \vec{\theta}$$

Le barycentre de (A, 1) et (B, —1) n'existe pas.

d) Détermine le point Q tel que :

$$4\,\overrightarrow{QA} \oplus (-5)\,\overrightarrow{QB} = \vec{0}$$

Utilise une méthode analogue à celle du paragraphe *b*).

Q est le barycentre de (A, 4) et (B, —5). C'est un point de la droite AB ; construis-le.

e) Démontre qu'il n'existe pas de point S de $\mathcal{T}$ tel que :

$$\frac{1}{3}\,\overrightarrow{SA} \oplus \left(-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{SB} = \vec{0}$$

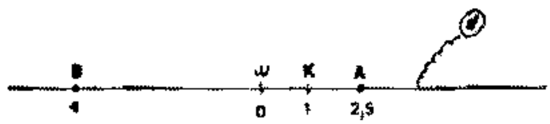
f) *d* est graduée par *f* ; le repère est (ω, K).

L'abscisse de A est 2,5 ;

L'abscisse de B est (—4).

Trouve l'abscisse du point N de la droite *d* tel que :

$$2\,\overrightarrow{NA} \oplus 3\,\overrightarrow{NB} = \vec{0}$$



② A, B et C sont trois points distincts de $\mathcal{T}$.

Tu vas chercher s'il existe un point G de $\mathcal{T}$ tel que :

$$\overrightarrow{GA} \oplus \overrightarrow{GB} \oplus \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

a) M est un point quelconque de $\mathcal{T}$.

Tu peux écrire :

$$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GM} \oplus \overrightarrow{MA}$$
$$\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GM} \oplus \overrightarrow{MB}$$
$$\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GM} \oplus \overrightarrow{MC}$$

Justifie :

$$\boxed{\overrightarrow{GA} \oplus \overrightarrow{GB} \oplus \overrightarrow{GC} = \vec{0}} \rightleftarrows \boxed{(\overrightarrow{GM} \oplus \overrightarrow{MA}) \oplus (\overrightarrow{GM} \oplus \overrightarrow{MB}) \oplus (\overrightarrow{GM} \oplus \overrightarrow{MC}) = \vec{0}}$$

$$\upharpoonleft\!\downharpoonright$$

$$\boxed{3.\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} \oplus \overrightarrow{MB} \oplus \overrightarrow{MC}} \rightleftarrows \boxed{3.\overrightarrow{GM} \oplus (\overrightarrow{MA} \oplus \overrightarrow{MB} \oplus \overrightarrow{MC}) = \vec{0}}$$

Cette dernière égalité prouve qu'il existe un point G et un seul. Pourquoi ?

Quels que soient les points A, B et C de $\mathcal{P}$, il existe un point G et un seul de $\mathcal{P}$ tel que :

$$\overrightarrow{GA} \oplus \overrightarrow{GB} \oplus \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

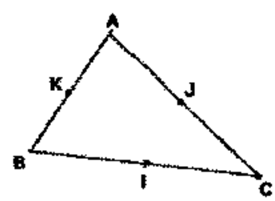
b) Puisque M est quelconque, remplaçons-le par I, milieu de (B, C).

$$3.\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA} \oplus \overrightarrow{IB} \oplus \overrightarrow{IC}$$

Puisque $\overrightarrow{IB} \oplus \overrightarrow{IC} = \vec{0}$,

tu obtiens : $$3.\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA}$$

Le point G est donc *un point de la droite AI.*



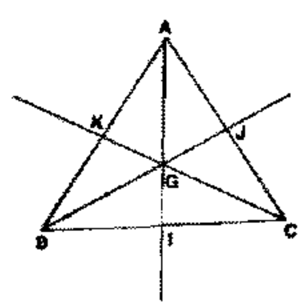
c) J étant le milieu de (A, C) et K le milieu de (A, B) démontre que G est aussi un point de la droite BJ et un point de la droite CK.

• Si les points A, B et C ne sont pas alignés la droite qui joint l'un des points au milieu du couple formé par les deux autres est une médiane de (A, B, C).

Les trois médianes de (A, B, C) ont en commun ce point G.

Ce point est appelé centre de gravité de (A, B, C).

On dit aussi : G est le barycentre de (A, 1), (B, 1) et (C, 1).

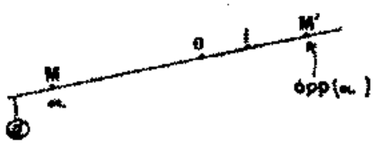


16. — Symétrie centrale.

a) Choisissons un point O du plan $\mathcal{P}$.
Nous allons définir une application de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$.
Soit un point M quelconque de $\mathcal{P}$.

α) Si $M = O$
quel est le point M′ de $\mathcal{P}$ tel que O soit le milieu de (M, M′)?

β) Si $M \neq O$
appelons *d* la droite OM.



Si α est l'abscisse de M pour une graduation de repère (O, I), il existe sur *d* un seul point M′ d'abscisse opp(α) : O est le milieu de (M, M′).

Donc, quel que soit le point M de $\mathcal{P}$, *il existe un point* M′ de $\mathcal{P}$, *et un seul*, tel que O soit milieu de (M, M′).

b) **Définition.**

> O est un point du plan $\mathcal{P}$.
> L'application de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ qui, à M, associe M′ tel que O soit le milieu de (M, M′) est appelée symétrie-centrale autour de O et est notée S^O.
>
> $S_O : \left| \begin{array}{l} \mathcal{P} \to \mathcal{P} \\ M \mapsto M' \end{array} \right.$ ce qui signifie :
>
> O *est le milieu de* (M, M′)
>
> $S_O(M) = M'$

Le point M′ est le *symétrique de M autour de O*.

c) **Propriétés élémentaires.**

Démontrez les propriétés suivantes :
• Le point O est invariant par S_O.
• Le point commun aux diagonales d'un parallélogramme est centre de symétrie pour ce parallélogramme.

• Tout point d'une droite d a pour image un point d'une droite d', parallèle à d, et réciproquement tout point de d' est image d'un point de d.

(Examinez deux cas : $O \in d$, $O \notin d$).

On dit que l'image d'une droite d *par une symétrie centrale est une droite parallèle à* d.

• La symétrie centrale S_0 est égale à la relation réciproque : on dit que S_0 est involutive.

Les expérimentateurs de Boulogne-sur-Mer nous proposent un plan d'étude original de la géométrie. Ils étudient directement les translations dans le plan sans faire la géométrie sur la droite, et l'introduction préalable des réels n'est plus nécessaire. Pour rendre ce plan plus conforme aux programmes de Quatrième, il suffit de remplacer dans la cinquième partie les rationnels par les décimaux.