La géométrie en quatrième

P. Buisson,
I.R.E.M. Strasbourg.

Les débuts de l'enseignement traditionnel de la géométrie étaient empoisonnés par des considérations métaphysiques sur ce qu'est un point, une droite, un plan, et la suite par la difficulté de distinguer ce qui est observation de l'espace physique de ce qui fait partie d'une théorie mathématique, en particulier de ce qu'il faut démontrer à partir de prémisses clairement posées. Le langage ensembliste acquis dans les classes précédentes va permettre de dépasser ce problème en distinguant nettement ce qui est expérimental de ce qui est théorie mathématique.

Le but de cet article est de montrer comment la géométrie peut être enseignée dans l'esprit des nouveaux programmes dans une classe de Quatrième, l'influence des discussions avec les expérimentateurs de l'Académie de Strasbourg a été déterminante pour la rédaction de cet article et le plan suivi. Il est naturellement impossible de répondre objectivement à la question : « Un tel enseignement est-il adapté à l'enfant de 13-14 ans? » Dans deux ou trois ans les maîtres pourront donner un début de réponse, mais actuellement les réponses ne peuvent être qu'affectives.

De nombreuses personnes estiment que l'enseignement de la Mathématique doit être posée en fonction des futurs utilisateurs (souvent traditionnels : physiciens, mécaniciens, ingénieurs, mathématiciens...); cela est peut-être vrai dans l'enseignement supérieur (département de Mathématiques, Classes Préparatoires, Grandes Écoles...) mais pas dans le premier cycle de l'enseignement secondaire où il doit surtout contribuer à la formation générale de l'enfant par l'apprentissage d'un langage précis, d'une méthode d'analyse des problèmes et d'un mode de raisonnement.

Nous allons donc montrer comment la méthode axiomatique permet de mathématiser une situation concrète. Au départ il y a des objets physiques (feuilles de papier, tableau noir, traits tracés à la règle...) et des manipulations d'objets physiques (règles, compas, équerre...); nous observons des propriétés et nous en privilégions certaines. Nous considérons alors un ensemble dont les éléments vérifient les propriétés privilégiées énoncées en langage ensembliste (ce sont les axiomes ou théorèmes admis) puis nous déduisons alors de ces axiomes le maximum de propriétés vérifiées par les éléments de cet ensemble (ce sont les théorèmes démontrés).

Nous ne nous préoccupons pas de la « nature » des éléments et de l'ensemble, mais nous illustrerons ces propriétés par des dessins comme cela a été fait en Sixième et en Cinquième. Le dessin illustre des propriétés, permet de les retenir mais ne les justifie pas.

Il y a évidemment un arbitraire dans le choix des axiomes (la notion de vérité mathématique est relative) et le programme de Quatrième n'impose pas d'axiomatique, nous en proposons une ici.

Dans l'enseignement traditionnel de la géométrie, fondé sur l'axiomatique d'Euclide-Hilbert, toutes les notions étaient indispensables au départ : longueur, angle, perpendicularité, parallélisme... et les axiomes fort nombreux; de plus, la plupart d'entre eux n'étaient pas explicités; il était donc difficile de savoir si une propriété était admise ou à démontrer. Par contre nous suggérons ici d'introduire les axiomes les uns après les autres et de les exploiter au maximum à chaque étape. Il est aussi plus facile d'expliquer ce qu'est un raisonnement déductif lorsque peu d'axiomes entrent en jeu.

Dans l'exposé qui va suivre les axiomes sont choisis suffisamment forts pour rendre les démonstrations plus faciles. La première partie, consacrée aux axiomes d'incidence, permet d'utiliser les notions et le langage introduits dans les classes précédentes et peut donc être traitée dès le début de la Quatrième. Par contre les autres parties, droite et plan, doivent être précédées de l'introduction de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$; c'est pourquoi il est utile de ne pas intégrer l'étude des axiomes d'incidence dans celle du plan.

Remarquons pour terminer que les nouveaux programmes sont axés essentiellement sur la construction des nombres et le calcul algébrique, utilisés par la suite en géométrie, alors que les anciens programmes étaient axés sur la géométrie qui permettait d'introduire les nombres irrationnels (segments incommensurables...); la géométrie est donc la partie la moins importante du programme de Quatrième.

1. — Les axiomes d'incidence.

1.1. Introduction des axiomes.

L'élève de Quatrième a utilisé dès l'enseignement élémentaire les mots, point, ligne droite, lignes droites parallèles, plan; il a toujours admis les faits suivants justifiés par le tracé au crayon à la règle et à l'équerre, le plan étant la feuille de papier ou le tableau noir.

a) Par deux points passe une ligne droite et une seule.

b) Par un point extérieur à une ligne droite passe une et une seule ligne droite parallèle à la précédente.

L'élève remarquera aussi les faits suivants encore plus évidents :

c) Il existe des lignes droites.

d) Une ligne droite a beaucoup de points (plus de deux nous suffirons).

e) En dehors de chaque ligne droite on peut trouver un point.

1.2. Mathématisation de la situation.

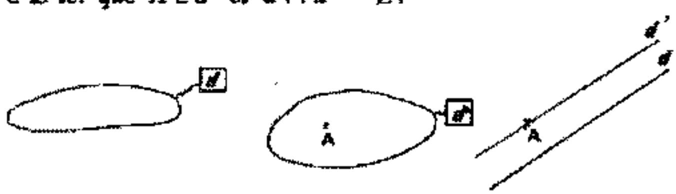
Soit P un ensemble et $\mathfrak{D}$ un ensemble de parties de P.

Le couple (P, $\mathfrak{D}$) est appelé plan mathématique si P et $\mathfrak{D}$ vérifient les propriétés suivantes :

$\boxed{I_1}$ *Il existe un élément dans $\mathfrak{D}$ et aucun élément de $\mathfrak{D}$ n'est égal à P.*

$\boxed{I_2}$ *Si $d \in \mathfrak{D}$ alors d contient au moins deux points distincts et, si $A \in P$ et $B \in P$ sont distincts alors il existe un élément de $\mathfrak{D}$ et un seul contenant $\{A, B\}$.*

$\boxed{I_3}$ *Si $d \in \mathfrak{D}$ et $A \in P$* avec *$A \in d$, alors il existe un et un seul élément $d' \in \mathfrak{D}$ tel que $A \in d'$ et $d \cap d' = \varnothing$.*



Habituellement les éléments de P sont appelés points et notés par des lettres majuscules A, B...; ceux de $\mathfrak{D}$ sont appelés droites et notés par des lettres minuscules *d*, *d'*...

Les axiomes peuvent être illustrés aussi bien par des diagrammes de Venn que par des lignes droites tracées à la règle (de telles lignes deviennent d'ailleurs au microscope des diagrammes de Venn!).

Avant d'introduire cette terminologie on peut montrer que

$$P = \{A, B, C, E\} \text{ avec } \mathfrak{D} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, E\}, \{C, E\}\}$$

est un plan mathématique. Il est également possible de découvrir un plan mathématique à neuf points.

1.3. Exploitation du modèle.

Nous nous plaçons dans un plan mathématique, l'ensemble des droites étant désigné par $\mathfrak{D}$.

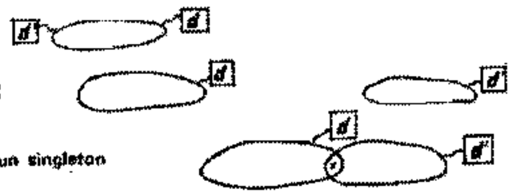
1.3.1. Étude du parallélisme.

Pour des droites notées *d* et *d'* les trois situations suivantes sont possibles :

– $d = d'$

– $d \cap d' = \emptyset$

– $d \cap d'$ est un singleton



Dans ce dernier cas les deux droites sont dites *sécantes*.

Définition : On dit qu'une droite *d* est *parallèle* à une droite *d'* si l'intersection $d \cap d'$ n'est pas un singleton.

En particulier une droite est parallèle à elle-même.

Nous notons $d//d'$ pour « *d* parallèle à *d'* ».

Théorème : Le parallélisme est une relation d'équivalence.

On peut vérifier ce théorème dans le cas du plan mathématique à quatre points ou à neuf points. Démontrer un théorème pour des ensembles finis revient à faire un certain nombre de vérification; mais dans le cas général les démonstrations devront être formelles et il est nécessaire d'utiliser des lettres — appelées variables — qui peuvent désigner un élément quelconque de l'ensemble domaine de variation des lettres.

La réflexivité et la symétrie sont évidentes; démontrons la transitivité. Pour cela remarquons d'abord que (I_2) s'énonce de manière équivalente :

Si $d \in \mathfrak{D}$ et $A \in P$ alors il existe une et seule droite *d'* contenant A et parallèle à *d*.

Nous voulons démontrer que si *d* est parallèle à *d'* et *d'* à *d''* alors *d* est également parallèle à *d''*.

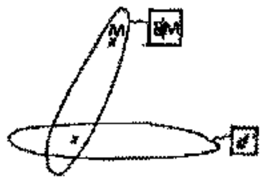
Si $d \cap d'' = \emptyset$ nous avons le résultat voulu; si $d \cap d'' \neq \emptyset$ désignons par M un point de $d \cap d''$. La droite *d* vérifie :

$d//d'$ et $M \in d$; la droite *d''* vérifie : $d''//d'$ et $M \in d''$; d'après l'unicité de la droite contenant un point donné et parallèle à une droite donnée nous avons $d = d'$.

Nous appellerons *direction* d'une droite la classe d'équivalence de cette droite; nous noterons les directions par les lettres δ, δ', δ''... Si $M \in P$ et si δ est une direction nous noterons $\delta(M)$ la droite appartenant à δ contenant le point M.

1.3.2. Étude de la projection parallèle.

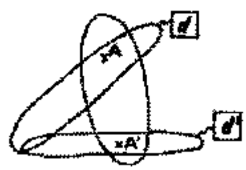
Cette étude est une simple application des propriétés de l'intersection. Soit δ une direction et d' une droite n'appartenant pas à δ, alors $\delta(M) \cap d'$ est un point de d' ; nous définissons ainsi une application de P sur d' appelée *projection parallèle à δ sur d'*.



Cette application est surjective, non injective et sa restriction à d' est l'identité.

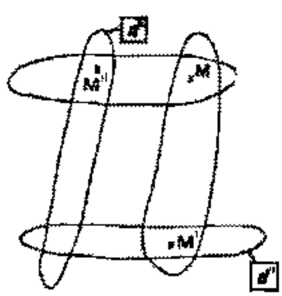
Théorème : Deux droites du plan sont équipotentes.

Prenons deux droites distinctes d et d' et deux points distincts A et A' avec $A \in d$, $A' \in d'$ et non éléments de $d \cap d'$; la restriction à d de la projection parallèle à la direction de la droite A A' sur d' est une bijection.



Théorème : Si d est une droite du plan P, alors Card $P = (\text{Card } d)^2$.

Rappelons que Card P désigne le cardinal de l'ensemble P ; pour démontrer le théorème nous devons trouver une bijection de P sur $d \times d$ ou encore une bijection de P sur $d' \times d''$, où d' et d'' sont deux droites sécantes car d'après le théorème précédent il existe une bijection de d' sur d et de d'' sur d donc de $d' \times d''$ sur $d \times d$.

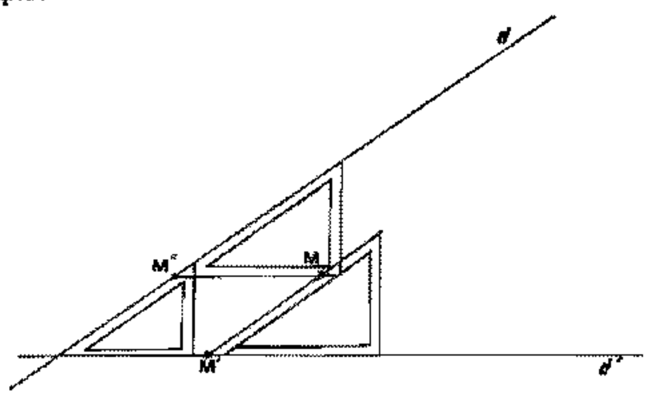


Notons δ' et δ'' les directions des droites d' et d''. L'application qui, à $M \in P$, associe le couple (M', M''), $(M', M'') \in d' \times d''$, où M' est la projection de M sur d' parallèlement à la direction de d'' et M'' la projection de M sur d'' parallèlement à la direction de d', est une bijection.

Ce résultat est une introduction à la géométrie analytique; en effet, nous associons à tout point de plan un couple de points appartenant à des droites (les coordonnées du point). Lorsque les points d'une droite pourront être caractérisés par des nombres nous aurons la géométrie analytique.

Ceux qui sont choqués par le diagramme de Venn peuvent faire des figures à l'aide de la règle et de l'équerre pour illustrer ces théorèmes :

Exemple :



2. — La droite.

Nous avons vu que toutes les droites d'un plan mathématique sont équipotentes. Nous allons préciser les propriétés que doivent vérifier les droites d'un plan mathématique décrivant la situation physique.

2.1. Introduction expérimentale.

Nous avons fait des tracés à la règle non graduée pour avoir une ligne droite, nous allons utiliser maintenant une règle graduée (par exemple un double décimètre).

Traçons une ligne droite avec une règle graduée et choisissons un point origine O sur cette droite. Nous faisons coïncider ce point avec la gradua-

tion 0 de la règle; nous avons deux dispositions pour la règle en mettant la graduation d'un côté ou de l'autre du point O. Nous choisissons une des deux possibilités et notons I le point coïncidant avec le 1 de la graduation en retournant la règle nous notons I' le point coïncidant avec le 1 de la graduation, pour traduire ce retournement nous noterons —1.

Soit M un point de la ligne droite du même côté de O que I, la graduation nous permet d'associer au point M un encadrement par des décimaux de $\mathbb{D}_1^+$: sous-ensemble des décimaux positifs ayant un chiffre après la virgule (ici 3,9 et 4,0). A un point M' de l'autre côté de O nous associerons un encadrement par deux décimaux de $\mathbb{D}_1^-$ (ici —2,2 et —2,3).

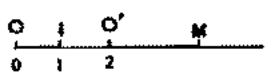
Nous pouvons faire trois remarques :

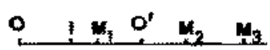
a) En choisissant l'autre possibilité pour 1, nous transformerions l'encadrement (x, x') d'un point M en l'encadrement $(-x', -x)$.

b) En choisissant un autre point comme origine, il n'y a pas de formule de passage toujours valable.

Exemple 1 :

Si nous choisissons comme nouvelle origine le point O' correspondant exactement au nombre 2, l'encadrement (x, x') d'un point M devient $(x - 2, x' - 2)$, en conservant le sens.





Si nous prenons O' correspondant à l'encadrement (2,3; 2,4) comme nouvelle origine, nous obtenons en conservant le sens le tableau suivant :

Point	M_1	M_2	M_3
Ancien encadrement	(1,5; 1,6)	(3,2; 3,3)	(4,4; 4,5)
Nouvel encadrement	(—0,9; —0,8)	(0,9; 1)	(2; 2,1)

L'écart entre les encadrements est de 2,3 ou de 2,4 suivant la position des points par rapport aux milieux des segments définissant la graduation.

c) Si les possibilités physiques nous permettaient d'obtenir des graduations en dixième de millimètre, en centième de millimètre... nous aurions ainsi pour chaque point des encadrements de plus en plus fins, or nous avons défini un nombre réel comme une telle suite d'encadrements.

d) Nous aurions pu faire cette étude avec une graduation fabriquée par l'élève et non centimétrique, puis remarquer la correspondance entre les encadrements suivant les unités de mesure; cela est en général fort délicat sauf dans le cas où la nouvelle origine est choisie sur une graduation et si l'ancienne unité est multiple de la nouvelle ; alors si un point M correspondait à la graduation x, il correspondra à une graduation $ax + b$ indépendante de x.

2.2. Mathématisation de la situation.

Si nous nous fixons un point O et un sens, nous mathématisons la graduation de la ligne droite par une bijection d'une droite mathématique D d'un plan mathématique sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$; soit $f : D \to \mathbb{R}$.

Nous appellerons droite repérée la donnée d'un point O et d'une bijection $f : D \to R$.

D'autres bijections décrivent la situation physique; le changement de sens donne une nouvelle bijection $g : D \to \mathbb{R}$ définie par $g(M) = -f(M)$; si nous changeons d'origine nous sommes dans la situation de l'exemple 1 et nous avons une nouvelle bijection $h : D \to \mathbb{R}$ avec $h(M) = f(M) - b$ avec $b = f(0')$, le point O' étant la nouvelle origine.

Nous définirons donc :

Une droite euclidienne est la donnée d'un ensemble D et d'un ensemble $\mathcal{F}$ de bijections de D sur $\mathbb{R}$ tel que si $f \in \mathcal{F}$ alors $\mathcal{F}$ est exactement l'ensemble des bijections de D sur $\mathbb{R}$ de la forme $M \mapsto f(M) + b$ *ou* $M \mapsto -f(M) + b$ *avec* $b \in \mathbb{R}$.

Changement d'unité : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une bijection ; le couple (O,I) avec $f(O) = 0$ et $f(I) = 1$ s'appelle repère correspondant à f. Si (A,B)e st un autre couple de points distincts de D, nous traduisons l'expérience physique de 2.1 *d*) par la donnée de la bijection $g : D \to \mathbb{R}$ telle que $g(A) = 0$, $g(B) = 1$ et $g(M) = \alpha f(M) + \beta$ pour tout point M de D avec $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Cette bijection est bien unique car si $f(A) = a$ et $f(B) = b$ nous avons $g(M) = \dfrac{1}{b-a}(f(M) - a)$, c'est la formule classique de changement de repère. Nous définissons alors :

Une droite affine est la donnée d'un ensemble D et d'un ensemble $\mathcal{F}$ de bijections de D sur $\mathbb{R}$ telle que si $f \in \mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est exactement l'ensemble des bijections de D sur $\mathbb{R}$ de la forme $af + b$ *avec* $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ *et* $b \in \mathbb{R}$.

2.3. Exploitation du modèle.

C'est la notion de droite affine qui traduit toute la richesse de la situation physique, mais elle n'est pas simple. Il devrait être possible en classe de Quatrième de travailler dans un premier temps avec la droite repérée et montrer dans un deuxième temps si le niveau de la classe le permet que les résultats ne dépendent pas de la bijection choisie dans la famille $\mathcal{F}$, c'est-à-dire si l'on remplace la bijection f par $af + b$. Le passage de la droite repérée à la droite affine par la droite euclidienne peut être utile pour la mathématisation mais inutile dans l'exploitation du modèle.

2.3.1. Bipoint; « mesure algébrique ».

Soit (D, f) une droite repérée. Si $x = f(M)$, x s'appelle l'abscisse de M et M l'image de x. Nous appellerons *bipoint de D* tout élément (A, B) de $D \times D$. Nous définissons la mesure algébrique du bipoint (A, B) de la droite repérée comme le nombre réel $f(B) - f(A)$ et on note $\overline{AB} = f(B) - f(A)$, la notation $\overline{AB}$ est abusive car elle n'indique pas que ce nombre dépend de f, mais elle est justifiée par le théorème suivant dont la démonstration est immédiate.

Théorème. — Si $f(B) - f(A) = f(D) - f(C)$ *alors, si* a *est un nombre réel distinct de 0 et* b *un nombre réel quelconque nous avons aussi*
$(af(B) + b) - (af(A) + b) = (af(D) + b) - (af(C) + b)$ *et réciproquement.*

L'égalité $\overline{AB} = \overline{CD}$ est donc bien une propriété intrinsèque, c'est-à-dire indépendante de la bijection choisie dans la famille $\mathcal{F}$ de bijections définissant une droite affine. Il en est de même de la relation de Chasles : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

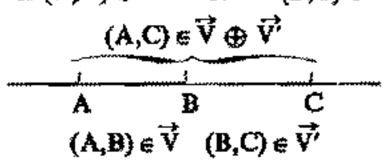
2.3.2. Vecteurs.

Nous définissons maintenant une relation d'équivalence dans l'ensemble des bipoints par :

$$(A,B)\ \mathcal{R}\ (C,D), \text{ si et seulement si, } \overline{AB} = \overline{CD}$$

La classe d'équivalence du bipoint (A,B) s'appelle vecteur et se note $\overrightarrow{AB}$; nous noterons $\vec{D}$ l'ensemble des vecteurs. Si $\vec{V}$ est un vecteur et A un point de D alors il existe un point B et un seul tel que $(A,B) \in \vec{V}$.

Nous définissons une application de $\vec{D} \times \vec{D}$ dans $\vec{D}$ par $\vec{V} \oplus \vec{V'} = \vec{V''}$ avec $\quad \vec{V''} = \overrightarrow{AC} \quad$ si $(A,D) \in \vec{V}$ $\quad$ et $\quad (B,C) \in \vec{V'}$;



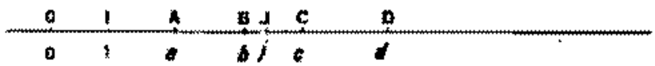
nous pouvons donc écrire par définition $\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; il faut naturellement vérifier que le vecteur $\vec{V''}$ ne dépend pas du point A choisi.

Nous pouvons définir de même une application de $\mathbb{R} \times \vec{D}$ dans $\vec{D}$ par $x.\vec{V} = \vec{V'}$ avec $\vec{V'} = \overline{AC}$ si $(A,B) \in \vec{V}$ et $\overline{AC} = x\ \overline{AB}$ (ce dernier produit est naturellement un produit de nombres réels).

Il est possible de montrer que $\vec{D}$ est aussi muni d'une structure d'espace vectoriel (cf. 3.33); nous ne le ferons ici que dans le cas du plan.

2.3.3. Milieu, barycentre, segment.

Soit (A,B) un bipoint, il existe alors un point J et un seul tel que $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = 0$; ce point s'appelle le *milieu* du bipoint (A,B). On vérifie immédiatement que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si (A,D) et (B,C) ont même milieu.



L'abscisse du milieu de (A,D) est $\frac{a+d}{2}$, celle de (B,C) est $\frac{b+c}{2}$; les deux milieux sont donc confondus, si et seulement si, $b - a = d - c$.

Plus généralement, soit (A,B) un bipoint de D et λ un nombre réel. Dans un repère donné, considérons le point d'abscisse $x = \lambda\ a + (1 - \lambda)b$; si nous changeons de repère, c'est-à-dire si $a' = \alpha a + \beta$ alors $x' = \lambda a' + (1 - \lambda)$ $b' = \alpha(\lambda a + (1 - \lambda)b) + \beta = \alpha x + \beta$.

Le point G défini sur la droite repérée par $\overline{OG} = \lambda\ \overline{OA} + (1 - \lambda)\ \overline{OB}$ ou encore $\lambda\ \overline{GA} + (1 - \lambda)\ \overline{GB} = 0$ est défini sur la droite affine, car indépendant du repère choisi, on l'appelle *barycentre* du triplet (A,B,λ).

Pour (A,B) fixé, l'application de $\mathbb{R}$ dans D qui à $\lambda \in \mathbb{R}$ associe le barycentre de (A,B,λ) est une bijection et on appelle *segment d'extrémités A et B*, noté [AB], l'image de l'intervalle [0,1].

2.3.4. Droite orientée, ordre sur la droite.

Si l'on se contente d'étudier la droite repérée, ce paragraphe est inutile car on obtient une relation d'ordre sur la droite en transportant la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ par la bijection définissant la droite repérée :

$$A < B \text{ si et seulement si } a < b.$$

Pour définir un ordre sur la droite affine, il faut d'abord montrer que la droite est orientable, c'est-à-dire faire une partition en deux classes d'équivalence des repères de la droite affine. On obtient cette partition (O,I) R (O',I') si et seulement si, la formule de changement de repère est donnée par $f'(M) = a f(M) + b$ avec $a > 0$. Orienter la droite, c'est choisir une classe d'équivalence.

Définition. — Une droite affine orientée est un couple $(D, \mathcal{F}')$ *où* $\mathcal{F}'$ *est une classe de l'ensemble des bijections* $\mathcal{F}$ *définissant la droite affine* $(D, \mathcal{F})$.

La relation dans D « $A \leqslant B$ » si et seulement si $f(A) \leqslant f(B)$ ne dépend pas de la bijection f choisie dans la classe $\mathcal{F}'$ et c'est une relation d'ordre. On peut donc munir la droite affine de deux relations d'ordre.

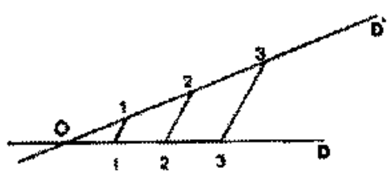
Remarque. — Sur la droite affine non orientée on peut définir la relation « entre » par « M entre A et B » si et seulement si $M \in [AB]$; mais pour définir un ordre il faut préalablement orienter la droite.

3. — Le plan.

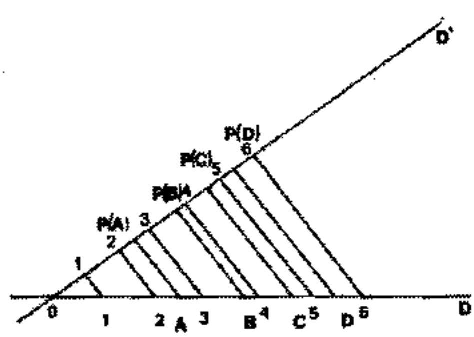
3.1. Introduction.

Dans le paragraphe précédent nous avons étudié les droites d'un plan pour elles-mêmes; nous allons maintenant « comparer » les graduations des droites.

Prenons deux lignes droites sécantes en un point O pris comme origine sur les deux droites et une graduation sur chaque droite.



Nous remarquerons que les lignes droites joignant les points de même graduation sont parallèles.



Réciproquement, si nous avons une graduation sur D nous pouvons construire une graduation sur D' par le tracé de parallèles de direction δ. Soit p la projection parallèle à δ, nous pouvons constater qu'il y a « presque » égalité pour les encadrements correspondants aux nombres :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{p(A)\ p(B)}}{\overline{p(C)\ p(D)}}$$

3.2. Mathématisation de la situation.

A partir de maintenant nous ne considérons que des plans mathématiques P, appelés alors affines, vérifiant :

(P_1) Toutes les droites sont munies d'une structure de droite affine.

(P_2) Si D et D' sont deux droites, p une projection parallèle de D sur D' et A, B, C, D des points de D vérifiant $\overline{AB} = b\ \overline{CD}$ alors $\overline{p(A)p(B)} = \overline{bp(C)p(D)}$ (Thalès).

On vérifie alors que la propriété physique: les droites joignant les points de même abscisse sont parallèles, est une conséquence de ces axiomes.

3.3. Exploitation du modèle.

On récupère ici le début de la géométrie traditionnelle de Troisième : application du théorème de Thalès au triangle (triplet de points non alignés), au trapèze (quadruplet (A,B,C,D) tel que les droites AB et CD soient parallèles) et « réciproque »; projection du milieu d'un bipoint; symétrie centrale : l'image d'une droite et une droite parallèle...

3.3.1. Étude du parallélogramme.

On appelle parallélogramme un quadruplet (A,B,C,D) tel que les bipoints (A,C) et (B,D) aient même milieu.

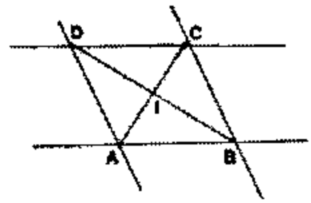
La symétrie centrale par rapport au milieu commun conserve le parallélogramme ce qui a pour conséquence que les droites, lorsqu'elles existent, AB et CD d'une part, AD et BC d'autre part sont parallèles.

Il y a différents types de parallélogrammes :

Parallélogrammes dégénérés :

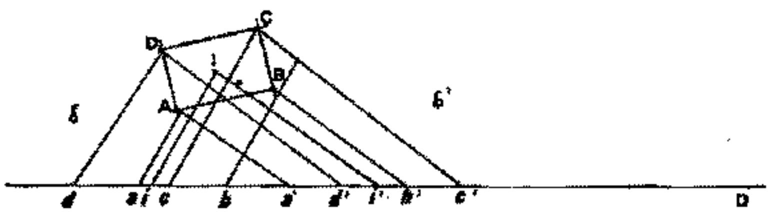
Parallélogrammes non dégénérés : les droites AB et DC d'une part, AD et BC d'autre part sont distinctes donc parallèles. On peut d'ailleurs démontrer la réciproque.

Énonçons maintenant le théorème fondamental sur le parallélogramme.



Théorème. — Tout parallélogramme se projette suivant un parallélogramme ; de plus, si un quadruplet se projette suivant deux directions distinctes, à chaque fois sur un parallélogramme, alors ce quadruplet est un parallélogramme.

La partie directe résulte de la conservation du milieu par projection. Démontrons la deuxième partie en remarquant (Thalès) qu'on peut faire les deux projections sur une même droite.



La figure ci-dessus rassemble toutes les notations.

Le milieu de (A,C) appartient à δ' (i') où i' est le milieu de (a',c') et à $\delta(i)$ où i est le milieu de (a,c); c'est donc $\delta(i) \cap \delta'(i')$ et il en est de même du milieu de (B,D).

3.3.2. Vecteurs du plan.

Théorème. — La relation entre bipoints du plan, appelée équipollence : « (A,B) équipollent à (C,D) si et seulement si (A,B,D,C) est un parallélogramme » est une relation d'équivalence.

La réflexivité et la symétrie sont immédiatement vérifiées. A l'aide du théorème 3.3.1, on se ramène à des parallélogrammes dégénérés pour lesquels la démonstration est faite en 2.3.2 et 2.3.3. On appelle vecteur, noté $\overrightarrow{AB}$, la classe d'équivalence du bipoint (A,B) et on note $\vec{P}$ l'ensemble des vecteurs.

Il est impossible de dessiner sur une feuille de papier (illustration de l'espace à 2 dimensions) un bipoint (élément de P × P, espace de dimension 4); il faut donc marquer les deux points en indiquant que A est le premier et B le second, exemples :

FIG. B13.

Somme de deux vecteurs

Par définition du parallélogramme, si $\vec{V} \in \vec{P}$ et $A \in P$, il existe un et un seul point B de P tel que $(A,B) \in \vec{V}$.

Comme dans le cas de la droite (2.3.2) nous pouvons définir par une construction indépendante du point A une application de $\vec{P} \times \vec{P}$ dans $\vec{P}$ par $\vec{V} \oplus \vec{V'} = \vec{V''}$ avec $\vec{V''} = \overrightarrow{AC}$ si $(A,B) \in \vec{V}$ et $(B,C) \in \vec{V'}$.

Nous avons par définition la formule de Chasles : $\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

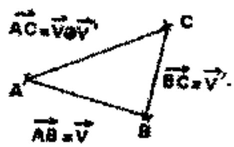


FIG. B14.

L'associativité et la commutativité de la loi $\oplus$ résultent de la construction; le vecteur, noté $\vec{0}$, dont un représentant est (A,A) vérifie $\vec{V} \oplus \vec{0} = \vec{V}$, c'est donc un élément neutre et tout vecteur $\vec{V}$ a un symétrique $\vec{V'} = \overrightarrow{BA}$ si $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$. L'ensemble $\vec{P}$ est donc muni d'une structure de groupe commutatif.

Multiplication d'un vecteur par un réel

Comme dans le cas de la droite (2.3.2) nous pouvons définir une application de $\mathbb{R} \times \vec{P}$ dans $\vec{P}$, avec $\vec{V'} = x.\vec{V}$, où $\vec{V'} = \overrightarrow{AC}$ avec $\overline{AC} = x\ \overline{AB}$ si $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$.

Les propriétés suivantes résultent d'un calcul algébrique sur la droite :

$$(x+y).\vec{V} = (x.\vec{V}) \oplus (y.\vec{V})$$
$$x.(y.\vec{V}) = (xy).\vec{V}$$
$$1.\vec{V} = \vec{V}$$

La dernière propriété résulte du théorème de Thalès.

$$x.(\vec{V} \oplus \vec{V'}) = (x.\vec{V}) \oplus (x.\vec{V'})$$

3.3.4. Repère affine.

Théorème. — Si (A,B,C) est un triangle et M un point du plan, alors il existe un couple unique (x,y) *de nombres réels tels que* $\overrightarrow{AM} = (x.\overrightarrow{AB}) \oplus (y.\overrightarrow{AC})$.

Le triangle (A,B,C) s'appelle repère affine, les nombres x et y sont les coordonnées de point M dans ce repère.

Projetons M en P sur AB parallèlement à AC et en Q sur AC parallèlement à AB. Alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} \oplus \overrightarrow{AQ}$ et si x désigne l'abscisse de P sur la droite AB dans le repère (A,B) et y l'abscisse de Q sur la droite AC dans le

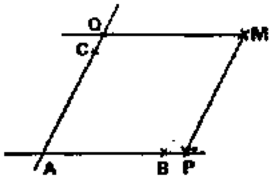


FIG. B15.

repère (A,C) on a $\overrightarrow{AP} = x.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = y.\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AM} = (x.\overrightarrow{AB}) \oplus (y.\overrightarrow{AC})$.

Démontrons l'unicité;

supposons $\overrightarrow{AM} = (x.\overrightarrow{AB}) \oplus (y.\overrightarrow{AC}) = (x'\overrightarrow{AB}) \oplus (y'.\overrightarrow{AC})$ avec $x \neq x'$;

nous aurions alors $\overrightarrow{AB} = \dfrac{y'-y}{x-x'}\overrightarrow{AC}$ donc A,B,C alignés ce qui est absurde donc $x = x'$, de même on démontre l'égalité $y = y'$.