Construction des réels à partir des décimaux

Bernard KITTEL,
I.R.E.M. Strasbourg.

Les programmes traditionnels du second cycle comportaient l'étude de $\mathbb{Q}$ sous la forme des fractions, puis à partir de $\mathbb{Q}$, la « construction » de $\mathbb{R}$.

Les nouveaux programmes mettent l'accent sur l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$; l'utilisation aisée de $\mathbb{D}$ pour les calculs approchés permet d'introduire les suites décimales et, à partir de là, l'ensemble $\mathbb{R}$ avec sa structure de corps ordonné.

On se propose d'indiquer les étapes successives d'une construction possible du corps ordonné $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{D}$.

I. — Rappels sur l'ensemble des décimaux $\mathbb{D}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on désigne par $\mathbb{D}_n$ l'ensemble des décimaux ayant « n chiffres après la virgule ». C'est l'ensemble des nombres de la forme $a.10^{-n}$ où $a \in \mathbb{Z}$; si $a \geqslant 0$ on dit que $a.10^{-n} \in \mathbb{D}_n^+$, si $a \leqslant 0$, $a.10^{-n} \in \mathbb{D}_n^-$.

On pose $\mathbb{D}_0 = \mathbb{Z}$ et $\mathbb{D} = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathbb{D}_n$.

Clairement $\mathbb{D}_{n+1} \supset \mathbb{D}_n$.

Enfin $\mathbb{D}$ est muni d'une structure d'anneau ordonné qui prolonge celle de $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{D}^+$ et $\mathbb{D}^-$ les décimaux positifs et négatifs.

Cet ensemble $\mathbb{D}$ ne contient pas tous les « nombres »; il est facile de voir qu'il ne contient pas le quotient de 22 par 7, ni « le nombre » d tel que $d^2 = 2$. Ceci motive la construction qui va suivre.

II. — Les développements décimaux.

1. Notions générales sur les suites de décimaux.

On appelle *suite de décimaux* toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{D}$. On note $u = (u_n)\ n \in \mathbb{N}$ ou plus simplement $u = (u_k)$ une telle suite.

On pose les définitions suivantes :

La suite $u = (u_n)$ est croissante lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \geqslant u_n$$

La suite $u = (u_n)$ est *décroissante* lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \leqslant u_n$$

La suite $u = (u_n)$ *converge vers le décimal l* lorsque :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \exists\, p(m) \in \mathbb{N},\ \forall n > p(m)\ |u_n - l| < 10^{-m}$$

Les suites $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ sont *équivalentes* lorsque la suite $d = (u_n - v_n)$ converge vers 0. On écrit $u \rho v$ pour exprimer que u et v sont équivalentes.

2. Développement décimal.

On appelle *développement décimal positif* une suite de décimaux $d = (d_n)$ telle que :

i) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad d_n \in D_n^+$

ii) le quotient de $10^n d_n$ par 10 est $10^{n-1} d_{n-1}$.

On appelle *développement décimal négatif* une suite de décimaux $d = (d_n)$ telle que la suite $-d = (-d_n)$ soit un développement décimal positif.

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des développements décimaux.

Un développement décimal $d = (d_n)$ pour lequel il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant m\ d_n = d_m$ s'appelle le *développement décimal du décimal* d_m.

Ainsi le développement décimal de 1,25 est

$$d_0 = 1 \qquad d_1 = 1{,}2 \qquad n \geqslant 2 \qquad d_n = 1{,}25$$

Proposition 2-1.

Si d est un *développement décimal positif, alors* $\forall n \in \mathbb{N}\,.\,\forall k \in \mathbb{N}$, $d_{n+k} - d_n < 10^{-n}$.

En effet $d_{n+k} - d_n \leqslant 9(10^{-(n+1)} + 10^{-(n+2)} + \ldots + 10^{-(n+k)}) < 10^{-n}$

Proposition 2-2.

Si d et d' sont deux développements décimaux positifs d et d' ne sont pas équivalents s'il existe un rang N tel que $d_N - d'_N > 10^{-N}$.

En effet il suffit de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_{N+k} - d'_{N+k} > 19^{-N}$, la suite $(d_n - d'_n)\ n \in \mathbb{N}$ ne pouvant alors converger vers 0.

Or $d_{N+k} - d'_{N+k} = (d_{N+k} - d_N) + (d_N - d'_N) + (d'_N - d_{N+k})$.
Comme d est une suite croissante, $d_{N+k} - d_N \geqslant 0$ et

$$d_{n+k} - d'_{N+k} \geqslant (d_N - d'_N) - (d'_{N+k} - d'_N).$$

Par hypothèse $d_N - d'_N < 10^{-N}$ donc $d_N - d'_N \geqslant 2.10^{-N}$.
D'après la proposition 2 — 1 $d'_{N+k} - d'_N < 10^{-N}$.
Donc $d_{N+k} - d'_{N+k} > 2.10^{-N} - 10^{-N} = 10^{-N}$.

III. — L'ensemble ordonné $\mathbb{R}$.

1. Définition de $\mathbb{R}$.

Par définition $\mathbb{R} = \mathbb{D}/\rho$.

Proposition 3-1:

La classe d'équivalence d'un élément $d \in \mathbb{D}$ contient un ou deux éléments ; elle en contient deux, si et seulement si, elle contient le développement décimal d'un décimal.

Preuve.

a) On montre d'abord que si $d \rho d'$ alors d et d' sont tous deux positifs ou tous deux négatifs.

Supposons $d \rho d'$ avec d positif et d' négatif; on écarte le cas où $d = d'$ (i.e. le cas où d et d' désignent le même développement de 0); il existe alors un rang r tel que $d'r < dr$; puisque d (resp. d') est une suite croissante (resp. décroissante) on a, pour $n \geqslant r$: $d'n \leqslant d'r < dr \leqslant dn$ donc $n \geqslant 1 \Rightarrow dn - d'n \geqslant dr - d'r > 0$.

Il en résulte que la suite $(d_n - d'_n)\ n \in \mathbb{N}$ ne peut converger vers 0.

b) Soit alors d et d' deux développements décimaux positifs équivalents et distincts. D'après la proposition 2—2 il existe un rang r tel que pour $n < r$ $d_n = d'_n$ et $|d_r - d'_r| = 10^{-r}$. Alors pour tout entier $k \geqslant 1$ on a

$$d_{r+k} = d_r + a_k 10^{-(r+k)} \text{ où } 0 \leqslant a_k \leqslant 10^k - 1 \text{ et}$$
$$d'_{r+k} = d'_r + a'_k 10^{-(r+k)} \text{ où } 0 \leqslant a'_k \leqslant 10^k - 1.$$

Donc $d_{r+k} - d'_{r+k} = d_r - d'_r + (a_k - a_k)\ 10^{-(1+k)}$.
Supposons $d_r - d'_r = 10^{-r}$. Alors la proposition 2—2 donne :

$$d_{r+k} - d'_{r+k} \leqslant 10^{-(r-k)}$$

et finalement :

$$10^{-r} + (a_k - a'_k)\ 10^{-(r+k)} \leqslant 10^{-(1+k)}$$
$$a'_k - a_k \geqslant 10^{k-1}$$

Vu les conditions sur les entiers a'_k et a_k, ceci exige $a'_k = 10^{k-1}$ et $a_k = 0$.

Autrement dit, les « décimales de d, de rang supérieur à r » sont égales à 0 et celles de d' sont égales à 9. Ainsi la classe d'un développement décimal ne contient deux éléments que si l'un est le développement décimal d'un décimal.

Exemple : La classe de d défini par $d_0 = 1$, $d_1 = 1{,}2$ et pour $n \geqslant 2$, $d_n = 1{,}25$ contient d et d' défini par $d'_0 = 1$, $d'_1 = 1{,}2$, $d'_2 = 1{,}24$ et pour $n \geqslant 3$ $d'_n = d'_{n-1} + 9.10^{-n}$.

On appelle ***représentant canonique d'un réel*** r l'unique représentant de r lorsque r est un singleton, et le développement décimal du décimal lorsque r est une classe contenant deux éléments.

2. Ordre sur $\mathbb{R}$.

Si et x et y sont des réels de représentants canoniques (x_n) et (y_n) on dit que x est inférieur à y ($x \leqslant y$) lorsque pour tout n de $\mathbb{N}$, $x_n \leqslant y_n$.

On définit alors les divers *intervalles* de $\mathbb{R}$.

Proposition 3-2.

L'ordre ainsi défini sur $\mathbb{R}$ prolonge celui de $\mathbb{D}$.

Preuve

Soit x et y deux réels décimaux de représentants canoniques (x_n) et (y_n). Il existe alors un plus petit rang r tel que pour $n \geqslant r$, $x_n = x_r$ et $y_n = y_r$ et $x = x_r$, $y = y_r$.

Si dans $\mathbb{D}$, $x < y$, on a $x_r < y_r$, on a aussi pour tout $n > r$ $x_n < y_n$ et pour $n < r$ $x_n \leqslant y_n$.

Inversement, si $x < y$ dans $\mathbb{R}$, il est clair que $x_r < y_r$ donc que $x < y$ dans $\mathbb{D}$.

Proposition 3-3.

$\mathbb{D}$ est dense pour l'ordre dans $\mathbb{R}$.

Cela signifie que pour tout couple (x, y) de réels tels que $x < y$ il existe un décimal d tel que $x < d < y$.

Supposons d'abord x et y positifs.

Si (x_n) et (y_n) sont les représentants canoniques respectifs de x et y, alors il existe un rang p tel que $x_p < y_p$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $n < p \Rightarrow x_n = y_n$.

D'autre part $\forall m, m > p \Rightarrow x_m < y_m$ et comme (x_n) n'a pas la période 9 il existe q supérieur à p tel que $x_q + 10^{-q} < x_p$, de sorte que le développement (z_n) défini par

$$z_n = \begin{cases} x_n \text{ si } n < q \\ x_q + 10^{-q} \text{ si } n > q \end{cases}$$

définit un décimal compris strictement entre x et y.

Même résultat si x et y sont négatifs.

Si x et y sont de signe différent, 0 est manifestement entre les deux.

IV. — La structure de corps sur $\mathbb{R}$.

Si x et y sont deux réels de représentants canoniques (x_n) et (y_n), les suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n\, y_n)$ ne sont malheureusement plus nécessairement des développements décimaux : par exemple si $x = y = 2/3$, $(x_0 + y_0) = 0$ et $(x_1 + y_1) = 1{,}2$; d'autre part $(x_1\, y_1) = 0{,}36$ qui n'est même pas dans $\mathbb{D}_1$.

On est alors amené à introduire les notions de *suite de décimaux convergentes dans $\mathbb{R}$* et de *suite de Cauchy de décimaux*.

1. Suite de décimaux convergente dans $\mathbb{R}$.

On dit qu'une suite $u = (u_n)$ de décimaux converge vers le réel r, de représentant canonique $d = (d_n)$ lorsque les suites u et d sont équivalentes.

Il est clair que le développement décimal représentant canonique d'un réel converge vers ce réel. De même la proposition suivante est évidente.

Proposition 4-1.

Deux suites de décimaux qui convergent vers la même limite sont équivalentes.

On pose alors les définitions suivantes :

Si x et y sont deux réels de représentants canoniques (x_n) et (y_n).

Le réel $x + y$, appelé somme de x et de y est la limite de la suite $(x_n + y_n)$.

Le réel xy, appelé produit de x et de y est la limite de la suite $(x_n y_n)$.

Pour justifier ces définitions il faut évidemment montrer que les suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$ ont des limites.

On est ainsi amené à introduire les :

2. Suites de Cauchy de décimaux.

Une suite de décimaux $u = (u_n)$ est dite de Cauchy lorsque pour tout entier positif m il existe un rang $p(m)$ tel que $|u_{n'} - u_n| < 10^{-m}$ dès que $n' > n > p(m)$.

Proposition 4-2.

Tout développement décimal est une suite de Cauchy.

Il suffit de démontrer ceci pour un développement décimal positif d. Si m est donné on cherche $p(m)$ tel que pour $n' > n > p(m)$ $|d_{n'} - d_n| < 10^{-m}$. Comme (dn) est croissante, on a $|d_{n'} - d_n| = d_{n'} - d_n \leqslant d_{n'} - d_{p(m)}$. D'après la proposition 2-1, $d_{n'} - d_{p(m)} < 10^{-p(m)}$. On voit qu'il suffit de prendre $p(m) = m$.

Proposition 4-3.

Si (x_n) et (y_n) sont deux suites de Cauchy de décimaux, alors les suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$ en sont aussi.

Preuve :

On se donne un entier m positif et on cherche $p(m)$ tel que

$$n' > n > p(m) \Rightarrow |x_{n'} + y_{n'} - x_n - y_n| < 10^{-m}.$$

Or $|x_{n'} + y_{n'} - x_n - y_n| \leqslant |x_{n'} - x_n| + |y_{n'} - y_n|$

Comme $|x_{n'} - x_n| < 10^{-(m+1)}$ dès que $n' \vee n > p_1\ (m+1)$ et que $|y_{n'} - y_n| < 10^{(-m+1)}$ dès que $n' > n > p_2\ (m+1)$ (puisque (x_n) et (y_n) sont de Cauchy), on voit qu'il suffit de prendre $p(m) = \sup\ (p_1 m + 1,\ p_2 m + 2)$ pour réaliser la condition

$$|x_{n'} + y_{n'} - x_n - y_n| < 2.19^{(-m+1)} < 10^{-m}.$$

On fait un raisonnement analogue pour le produit en partant de l'inégalité :

$$|x_{n'} y_{n'} - x_n y_n| \leqslant |(x_{n'} - x_n)\, y_{n'}| + |(y_{n'} - y_n)\, x_n|$$

et en utilisant le fait qu'une suite de Cauchy est bornée.

Théorème fondamental.

Toute suite de Cauchy de décimaux converge dans $\mathbb{R}$.

Preuve :

Soit (α_i) une suite de Cauchy de décimaux.

On a : $\exists\, p_0 \in \mathbb{N},\ \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ m \geqslant p_0$ et $n \geqslant p_0 \Rightarrow |\alpha_n - \alpha_m| < 10^{-1}$ donc : $\forall m,\ m \geqslant p_0 \Rightarrow \alpha_{p_0} = 10^{-1} < \alpha_m < \alpha_{p_0} + 10^{-1}$ et par conséquent à partir du rang p_0 la partie entière de α_m diffère de celle de α_{p_0} d'au plus 1.

Il existe donc une infinité de termes de la suite (α_m) ayant la même partie entière e_0.

On considère alors la suite extraite de (α_n) formée de l'infinité de ses termes ayant e_0 comme partie entière : soit (α^0_n) cette suite.

(α^0_m) est une suite de décimaux de Cauchy car extraite d'une suite de Cauchy. Posons $v_0 = e_0$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}\ |v_0 - \alpha^0_n| < 1$.

On a : $\exists p_1 \in N$, $\forall(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $m \geqslant p_1$ et $n \geqslant p_1 \Rightarrow |\alpha_m^0 - \alpha_n^0| < 10^{-2}$ donc : $\forall m$, $m \geqslant p_1 \Rightarrow \alpha_{p_1}^0 - 10^{-2} < \alpha_m^0 < \alpha_{p_1}^0 + 10^{-2}$, et à partir du rang p_1, tous les termes α_m^0 diffèrent de $\alpha_{p_1}^0$ d'au plus 10^{-2} : il existe donc une infinité de termes de la suite (α_m^0) qui ont même partie entière e_0 et même premier chiffrre après la virgule, soit e_1.

On considère alors la suite extraite de (α_m^0) formée de l'infinité de ses termes commençant par e_0, e_1 : soit (α_m^1) cette suite extraite.

(α_m^1) est une suite de Cauchy de décimaux car extraite de (α_m^0).

Posons $v_1 = e_0, e_1$ alors $\forall n$, $|v_1 - \alpha_n^1| < 10^{-1}$.

On montre ainsi par récurrence qu'il existe dans (α_m^{p-1}) une infinité de termes ayant même partie entière et mêmes p premiers chiffres.

Soit (α_m^p) cette suite extraite. Si l'on pose $v_p = e_0, e_1, e_2 \ldots e_p$ alors :

$$\forall n, \ |v_p - \alpha_n^p| < 10^{-p}$$

On a ainsi construit une suite (v_n) qui définit un réel. Soit s la suite $s = (\alpha_0^0, \alpha_1^1, \ldots, \alpha_p^p, \ldots)$.

Quel que soit l'entier m, il existe un entier q tel que $10^{-p} < 10^{-m}$ alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $p > q \Rightarrow |v_p - \alpha_p^p| < 10^{-p} < 10^{-q} < 10^{-m}$ donc (v_n) est équivalente à (s_n). Or (s_n) est équivalente à (α_n) car (s_n) est extraite de la suite de Cauchy (α_n) et donc à partir d'un rang, $|\alpha_n - \alpha_n^n| < 10^{-m}$.

En définitive, on a trouvé un développement décimal équivalent à la suite donnée donc cette suite a une limite dans $\mathbb{R}$.

3. Opérations dans $\mathbb{R}$.

La justification des définitions données en IV-1 est alors claire : les représentants canoniques (x_n) et (y_n) des réels x et y sont des suites de Cauchy (proposition 4-2); les suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$ sont de Cauchy (proposition 4-3) et donc convergent dans $\mathbb{R}$ (théorème fondamental).

Proposition 4-4.

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication définies ci-dessus est un corps.

Preuve :

a) On montre d'abord que la limite de la somme de deux suites de décimaux de Cauchy est la somme des limites de ces suites. En effet on sait déjà que la somme de deux suites de Cauchy est de Cauchy. Si $(u_n)\ \rho\ (d_n) \in r$ et $(v_n)\ \rho\ (d'_n) \in r'$ alors $\lim u_n = r$ et $\lim v_n = r'$.

Par définition de l'addition $r + r' = \lim (d_n + d'_n)$. Mais $(u_n + v_n)$ est équivalente à $d_n + d'_n$: en effet,

$$|u_n + v_n - (d_n + d'_n)| \leqslant |u_n - d_n| + |v_n - d'_n|$$

le premier membre sera inférieur à 10^{-m} dès que chaque terme du second sera inférieur à 10^{-m-1} ce qui est possible.

Ainsi $\lim(u_n + v_n) = \lim(d_n + d'_n)$ soit enfin :

$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n.$$

Montrons alors l'*associativité* de l'addition :

$$\begin{aligned}(r + s) + t &= \lim(r_n + s_n) + \lim t_n \\ &= \lim[(r_n + s_n) + t_n] \\ &= \lim[r_n + (s_n + t_n)] \\ &= \lim r_n + \lim(s_n + t_n) = r + (s + t)\end{aligned}$$

La *commutativité* est évidente.

Le décimal 0 est élément *neutre*, car $r + 0 = \lim(r_n + 0) = \lim r_n = r$.

Opposé pour tout réel :

$$(r_n) \in \mathfrak{D} \Rightarrow (-r_n) \in \mathfrak{D} \text{ et } \lim r_n + \lim(-r_n) = \lim 0 = 0$$

On note $-r$ l'opposé de r.

b) On montre que la limite du produit de deux suites de Cauchy de décimaux est le produit des limites de ces suites.

En effet, soit (u_n) et (v_n) deux suites de Cauchy de décimaux telles que $(u_n)\ \rho\ (d_n) \in r$ et $(v_n)\ \rho\ (d'_n) \in r'$.

En majorant le second membre de

$$|u_n v_n - d_n d'_n| \leqslant |u_n - d_n|.|v_n| + |d_n|.|v_n - d'_n|$$

On montre que $(u_n v_n)\ \rho\ (d_n d_n)$.

Alors $\lim u_n v_n = \lim d_n d'_n = \lim d_n . \lim d'_n = \lim u_n . \lim v_n$.

Montrons l'associativité de la multiplication :

$$\begin{aligned}(r\,s)t &= \lim r_n s_n . \lim t_n = \lim(r_n s_n).t_n = \lim r_n(s_n t_n) \\ &= \lim r_n . \lim s_n t_n = r.(st)\end{aligned}$$

La *commutativité* est évidente.

Le décimal 1 est élément *neutre* car $\lim r_n . 1 = \lim r_n = r$ donc $1.r = r$.

Enfin la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est évidente :

$$\begin{aligned}r(s + t) &= \lim r_n . \lim (s_n + t_n) \\ &= \lim r_n(s_n + t_n) = \lim(r_n s_n + r_n t_n) = \lim r_n s_n + \lim r_n t_n \\ &= rs + rt\end{aligned}$$

c) Il reste à voir que tout réel non nul a un inverse pour la multiplication.

Il suffit de le voir pour un réel positif r. Si (r_n) est le représentant canonique de r, il existe un rang m tel que $r_m < 0$ et donc pour $n < m$, $r_n \geqslant r^m > 0$. La suite (s_n) définie par $s_n = 1$ pour $n < m$ et $s_n = \frac{1}{r_n}$ pour $n \geqslant m$ est une suite de Cauchy : ceci se déduit facilement des égalités et inégalités suivantes :

$$|s_n - s_{n'}| = \left|\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n'}}\right| = \left|\frac{r_{n'} - r_n}{r_n \cdot r_{n'}}\right| < \left|\frac{r_{n'} - r_n}{r_m^2}\right|$$

valables pour $n' > n > m$.

La suite (s_n) définit alors un réel s (théorème fondamental) et $sr = \lim (s_n) \lim (r_n) = \lim (s_n r_n) = \lim 1 = 1$.

Donc r différent de 0 admet s pour inverse.

4. Compatibilité des opérations avec la relation d'ordre.

Elle résulte des résultats suivants sur les suites de décimaux qui se démontrent de façon analogue aux résultats de IV-3.

a) Si une suite (u_n) de décimaux a une limite u strictement inférieure au réel a, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à a.

b) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites de Cauchy de décimaux telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \leqslant v_n$, alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$.

5. Les opérations définies sur $\mathbb{R}$ prolongent celles de $\mathbb{D}$.

Montrons-le pour la multiplication : soit x et y deux réels décimaux de représentants canoniques (x_n) et (y_n). Si r est un rang tel que pour $n \geqslant r$ $x_n = x_r$ et $y_n = y_r$, le produit de x et y défini dans $\mathbb{D}$ est égal à $x_r y_r$. Le produit xy défini dans R est la limite de la suite $(x_n y_n)$. Or cette suite est constante et égale à $x_r y_r$ pour $n \geqslant r$. Elle a donc pour limite $x_r y_r$.

Conclusion.

On a ainsi fabriqué un ensemble de « nombres » $\mathbb{R}$, qui contient $\mathbb{D}$ ainsi que les nouveaux nombres rencontrés qui ont motivé sa construction. Cet ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une structure de corps totalement ordonné qui prolonge celle de $\mathbb{D}$.

Enfin on peut montrer que toute suite de Cauchy de réels est équivalente à une suite de Cauchy de décimaux de sorte que le procédé d'extension ainsi utilisé est clos.