Les deux articles suivants sont plus ambitieux et s'adressent au professeur dans le cadre de la formation permanente ; ils permettront de dominer les programmes de Quatrième. Le premier utilise un langage et des connaissances acquis en Faculté alors que le second est tiré des documents de travail établis par l'I.R.E.M. de Strasbourg pour le recyclage des professeurs de premier cycle.

Les nombres réels dans l'enseignement du second degré

M. Roumieu,
I.R.E.M. de Montpellier.

Une définition solide des nombres réels ne peut être donnée qu'à un niveau avancé des études mathématiques et sans doute pas dans l'enseignement du second degré. Cependant, c'est une notion qui s'introduit naturellement, de façon intuitive — ou naïve — très tôt. Comment parler de la longueur du cercle ou de la diagonale du carré, sans faire appel, au moins implicitement, à la notion de nombre réel?

Les réels sont donc des êtres mathématiques dont l'élève aura pendant longtemps une connaissance plus ou moins vague et très incertaine. Pendant cette longue période, pratiquement toutes les études secondaires, le professeur devra consolider progressivement cette connaissance afin d'amener les élèves à utiliser correctement l'ensemble $\mathbb{R}$.

Les réels ne figurent pas dans les programmes des classes de Sixième et de Cinquième. Cependant, il faudra bien s'en servir, au moins implicitement, ne serait-ce que pour parler de la mesure des longueurs qui, elle, figure dans les programmes.

La longueur d'un objet physique n'est jamais définie *exactement*. Tout ce qu'on peut faire, c'est *encadrer* la mesure de cette longueur par des valeurs approchées par défaut et par excès, qui seront des nombres décimaux.

Le cercle ayant pour diamètre l'unité de longueur est un objet mathématique abstrait et sa longueur est définie exactement. Les élèves en ont une connaissance toute intuitive et la mesure de cette longueur est désignée par π. Il convient de guider et de préciser l'intuition en insistant sur le fait que les nombres décimaux ou fractionnaires ne peuvent fournir que des valeurs approchées de π.

Enfin par des exercices nombreux et variés, on habituera les élèves à choisir judicieusement l'ordre d'approximation (nombre de chiffres significatifs suivant la nature du problème étudié).

En Quatrième, les programmes prévoient une approche intuitive des nombres réels. Dans les classes précédentes, on a utilisé *quelques nombres réels* non décimaux, tels que $\frac{1}{3}$, $\frac{22}{7}$, π, $\sqrt{2}$, ..., etc., dont les élèves ont une connaissance intuitive. Il s'agit maintenant de les amener à une connaissance encore intuitive, mais plus large et plus solide, de l'ensemble $\mathbb{R}$.

Il faut d'abord que les élèves connaissent très bien les propriétés des nombres décimaux, en particulier,

— le fait que la relation d'ordre est lexicographique,

— la continuité de l'addition et de la multiplication, mise en évidence par des calculs de valeurs approchées.

On mettra ensuite en lumière, sur des exemples, la notion de *suite illimitée* des valeurs approchées, par défaut et par excès, de certains nombres réels, en particulier :

— les rationnels pour lesquels la suite des décimales est périodique,

— les nombres tels que $\sqrt{2}$ pour lesquels existe un algorithme connu des élèves, permettant le calcul des décimales successives.

Il est alors possible de présenter à des élèves de Quatrième *une* construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ fondée sur des idées très simples et mathématiquement tout à fait solide. Je reviendrai dans la deuxième partie de cet exposé sur cette construction.

En Seconde, le programme prévoit un « inventaire » des propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$. Il s'agit d'une récapitulation et d'une mise au point, par des énoncés généraux et précis, des propriétés antérieurement mises en évidence, dont les élèves ont une connaissance intuitive plus ou moins sûre. On peut considérer cet inventaire comme une définition axiomatique de $\mathbb{R}$, les axiomes étant largement surabondants, et les questions d'existence et d'unicité restant dans le vague.

Une construction de l'ensemble $\mathbb{R}$.

Rappelons d'abord ce qu'est un groupe abélien totalement ordonné et les propriétés de ces objets dont nous aurons besoin. Dans ce qui suit, G désignera un groupe abélien totalement ordonné.

1. — G est muni d'une addition, notée $+$, qui en fait un groupe abélien.

2. — G est muni d'une relation d'ordre, notée $\leqslant$, qui en fait un ensemble totalement ordonné.

3. — Entre l'addition et la relation d'ordre, existe une relation de compatibilité.

$$(\forall x \in G)\ (\forall y \in G)\ (\forall a \in G)\ x \leqslant y \Leftrightarrow x + a \leqslant y + a$$

Topologie de G.

Soient $x \in G$; $y \in G$. Conformément à l'usage, on définit les *intervalles ouverts* par :

$$]x,\ y[= \{u \in G;\ x < u < y\}$$
$$]\leftarrow,\ x[= \{u \in G;\ u < x\}$$
$$]x,\ \rightarrow[= \{u \in G;\ u > x\}$$

On vérifie facilement que l'intersection de deux intervalles ouverts est, soit vide, soit un intervalle ouvert. Il en résulte qu'on définit une topologie sur G en prenant comme base d'ouverts la famille des intervalles ouverts.

Cette topologie est séparée. En effet, soient $a \in G$; $b \in G$; $a \neq b$.

Si $]a, b[$ est non vide, soit $c \in]a, b[$; les intervalles $]\leftarrow, c[$,$]c, \rightarrow[$ sont des ouverts disjoints qui contiennent respectivement a et b.

Si $]a, b[$ est vide, les intervalles $]\leftarrow, b[$, $]a, \rightarrow[$ sont encore des ouverts disjoints qui contiennent respectivement a, b.

Le groupe G est non discret, si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]0, \varepsilon[$ est non vide. En effet, si G est discret, $\{0\}$ est un ouvert; donc il existe un intervalle $]\alpha, \beta[$ tel que $\{0\} =]\alpha, \beta[$. Alors $]0, \beta[$ est vide. Réciproquement, si $]0, \varepsilon[$ est vide, $]-\varepsilon, 0[$ aussi et par conséquent on a $\{0\} =]-\varepsilon, +\varepsilon[$.

Exemple.

L'ensemble des nombres décimaux que nous désignerons par $\mathbb{D}$, muni de l'addition et de la structure d'ordre usuelle, est un groupe abélien totalement ordonné non duscret.

Théorème fondamental.

Il existe un objet mathématique et un seul, nommé $\mathbb{R}$, possédant les propriétés suivantes :

— *$\mathbb{R}$ est un groupe abélien totalement ordonné, non discret,*

— *dans $\mathbb{R}$, toute suite croissante et majorée possède une borne supérieure.*

La démonstration comporte naturellement deux parties : existence et unicité. Je m'intéresse surtout à la démonstration de l'existence qui consiste en une construction effective de $\mathbb{R}$. Je présenterai cette construction en essayant de montrer qu'elle est parfaitement adaptable à l'enseignement au niveau de la classe de Quatrième.

Une suite décimale x est définie par une suite $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, telle que $x_0 \in \mathbb{Z}$; $x_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. On définit sur l'ensemble des suites décimales une relation d'ordre qui n'est autre que l'ordre lexicographique :

$$x = x_0, x_1, \ldots, x_n \qquad y = y_0, y_1, \ldots, y_n$$

$$x < y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\ x_0 = y_0, \quad x_1 = y_1, \ldots, \quad x_{k-1} = y_{k-1}; \quad x_k < y_k.$$

On vérifie aussitôt que l'ensemble des suites décimales est ainsi totalement ordonné.

Soient x, y, deux suites décimales, $x < y$. Cherchons les suites décimales u telles que $x < u < y$. On est conduit à distinguer le cas particulier suivant :

$$x_0 = y_0 ; \quad x_1 = y_1 \ldots \quad x_{k-1} = y_{k-1} ; \quad x_k = y_{k-1}$$
$$x_n = 9 \text{ et } y_n = 0 \text{ pour } n > k.$$

Il n'existe alors aucune suite décimale u telle que $x < u < y$. En dehors de ce cas particulier, il existe une infinité de suites décimales u telles que

$$x < u < y.$$

On peut définir formellement $\mathbb{R}$ comme ensemble-quotient de l'ensemble des suites décimales par une relation d'équivalence. Plus concrètement, un nombre réel est défini par une suite décimale et on convient que deux suites décimales définissent le même nombre réel lorsqu'on est dans le cas *.

On pourrait aussi définir un nombre réel comme suite décimale contenant une infinité de chiffres autres que 9. Mais on se heurte alors à une difficulté pour définir l'addition; en effet, on a :

$$0{,}666\ldots + 0{,}333\ldots = 0{,}999\ldots$$

Soient x une suite décimale définissant un nombre réel X; y, y' deux suites décimales définissant le même nombre Y. Comme $]y, y'[$ est vide, on a simultanément $x < y$ et $x' < y$ ou bien $y < p$ et $y' < x$. Il en résulte que la relation d'ordre définie sur l'ensemble des suites décimales « passe au quotient » et définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ est alors totalement ordonné.

On définit maintenant la topologie de $\mathbb{R}$; c'est la topologie engendrée par les intervalles ouverts]X, Y[.

Démontrons maintenant que l'axiome de la borne supérieure est bien vérifié :

Soit (X^n) une suite de nombres réels croissante et majorée. Représentons X^n par une suite décimale

$$x^n = x_0^n,\ x_1^n,\ \ldots x_n^n \ldots$$

en convenant que si X^n et X^{n+1} sont égaux, ils seront représentés par la même suite décimale ($x^n = x^{n+1}$). On a alors $x^{n+1} \geqslant x^n$ pour tout n.

La suite d'entiers (x_0^n) est croissante et majorée. Il existe donc

$$x_0 \in \mathbb{Z} \text{ et } \mathbb{N}_0 \in \mathrm{N} \text{ tels que } x_0^n = x_0 \text{ pour } n \geqslant \mathrm{N}_0.$$

Considérons maintenant la suite $(x_1^n)_n \geqslant \mathrm{N}_0$. Il est facile de voir qu'elle est croissante et majorée par 9. Donc il existe $x_1 \in \{0,1, \ldots 9\}$ et $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$, tels que $x_1^n = x_1$ pour $n \geqslant \mathrm{N}_1$.

La construction se poursuit de manière évidente et on obtient une suite décimale $(x, x_1, \ldots x_n \ldots)$ définissant un nombre réel X. possédant manifestement les propriétés suivantes :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n < X$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe n tel que $X_n < X < X_n + \frac{1}{10^k}$. Ce qui permet de conclure.

Les nombres décimaux s'identifient naturellement à des nombres réels particuliers, ceux précisément qui sont représentés par deux suites décimales. L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est partout dense dans $\mathbb{R}$.

L'addition est définie de façon naturelle sur $\mathbb{D}$. C'est une application continue de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$. D étant partout dense dans $\mathbb{R}$, on la prolonge par continuité en une application continue de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On doit encore vérifier, ce qui est facile :

— que $\mathbb{R}$ est un groupe abélien,
— que l'addition et la structure d'ordre sont compatibles.

La démonstration de l'existence de $\mathbb{R}$ est alors achevée. Naturellement, il convient de définir encore la multiplication sur $\mathbb{R}$ et de démontrer que $\mathbb{R}$ est un corps commutatif. La multiplication est définie naturellement sur $\mathbb{D}$ et on la prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$. Ses propriétés sont établies sans difficulté. L'algorithme de la division montre aisément que l'équation $ax = b$, $a \neq 0$, a toujours une solution dans $\mathbb{R}$.

Naturellement avec des élèves de Quatrième, il ne saurait être question d'utiliser les notions de limite et de continuité auxquelles j'ai fait appel dans cet exposé. Mais on peut utiliser largement la notion *d'approximation par encadrement* qui permettra de mettre en lumière, sur des exemples, toutes les idées fondamentales.

Pour terminer, je donnerai, très succinctement, une idée de la démonstration d'unicité. A la base de cette démonstration se trouve la propriété suivante :

Soit G un groupe possédant les propriétés figurant dans l'énoncé du théorème fondamental. La division par 2 est possible dans G, c'est-à-dire que pour tout $a \in G$, il existe $x \in G$ tel que $x + x = a$.

Grâce à cette propriété, pour $a \in G$ fixé, on peut définir le sous-groupe D des éléments de G de la forme $\frac{p}{2^k} a$ $(p \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N})$. D est partout dense dans G.

Soit alors G′ un autre groupe possédant aussi les propriétés figurant dans l'énoncé du théorème fondamental. Soit $a' \in G'$. L'application

$$\frac{p}{2^k} a \to \frac{p}{2^k} a'$$

est un isomorphisme de D dans G′, cette application se prolonge par continuité en un isomorphisme de G sur G′.