L'article précédent donnait des indications adaptées au niveau des élèves ; celui qui suit s'adresse au professeur et lui suggère un plan d'étude.

Construction de l'ensemble R des nombres réels

C. Morin,
Montpellier.

Préliminaire.

Il y a de nombreuses façons de construire l'ensemble $\mathbb{R}$. Dans tous les cas, certaines démonstrations sont longues et un peu difficiles. Vous trouverez, dans le plan de travail ci-dessous, une méthode qui peut être enseignée en classe de Quatrième. Évidemment, ce plan s'adresse à des professeurs et il faudrait certainement l'adapter au niveau des élèves. Ceci n'est pas du tout un chapitre du cours de Quatrième. De plus, certains résultats ont dû être admis lorsque les démonstrations étaient un peu trop longues.

Construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ à partir de l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux.

I. Construction.

Nous construirons seulement $\mathbb{R}^+$, ensemble des réels positifs, à partir de $\mathbb{D}^+$, ensemble des décimaux positifs. La construction des réels négatifs ne posant pas de problèmes lorsqu'on a l'ensemble des réels positifs.

Les élèves connaissent l'ensemble des décimaux positifs depuis l'école primaire. Il est nécessaire de le remettre en place et de dresser la liste des propriétés des opérations dans cet ensemble. Dans ce plan, nous supposerons connu l'ensemble $\mathbb{D}^+$.

1. Nécessité d'une extension de $\mathbb{D}$.

a) L'inverse de a dans $\mathbb{D}$ est le nombre x, s'il existe, tel que

$$ax = 1$$

Certains nombres ont un inverse dans $\mathbb{D}$ (ex. : 4, 10, 0,25, etc.), d'autres n'en ont pas.

Montrons, par exemple, que 3 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{D}$;

S'il en avait un, il serait tel que $3x = 1$.

Posons : $x = \mathrm{A}, a_1\, a_2 \ldots a_n$ a_n étant le dernier chiffre non nul après la virgule. Le dernier chiffre du nombre $3x$ est le dernier chiffre du nombre $3a_n$.

Pour que $3x = 1$, il faut que $3 \times \mathrm{A}, a_1\, a_2 \ldots a_n = 1, 00 \ldots 0$.

Il faut donc que le dernier chiffre de $3a_n$ soit un 0.

*1. — Vérifiez que $3a_n$ ne se termine jamais par 0, quel que soit a_n. Le nombre 3 n'a donc pas d'inverse dans $\mathbb{D}$.

Il est cependant possible de définir une suite de nombres décimaux :

$$\left.\begin{array}{l} 3 \times 0 = 0 \\ 3 \times 1 = 3 \end{array}\right\} 3 \times 0 < 1 < 3 \times 1$$

$$\left.\begin{array}{l} 3 \times 0{,}1 = 0{,}3 \\ 3 \times 0{,}2 = 0{,}6 \\ 3 \times 0{,}3 = 0{,}9 \\ 3 \times 0{,}4 = 1{,}2 \end{array}\right\} 3 \times 0{,}3 < 1 < 3 \times 0{,}4$$

$$\left.\begin{array}{l} 3 \times 0{,}31 = 0{,}93 \\ 3 \times 0{,}32 = 0{,}96 \\ 3 \times 0{,}33 = 0{,}99 \\ 3 \times 0{,}34 = 1{,}02 \end{array}\right\} 3 \times 0{,}33 < 1 < 3 \times 0{,}34$$

etc.

Nous obtenons ainsi la suite :

$$0 \qquad 0{,}3 \qquad 0{,}33 \qquad 0{,}333 \qquad \text{etc.}$$

Notons qu'une suite de nombres décimaux est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{D}$. Ici :

$$0 \mapsto 0 \qquad 1 \mapsto 0{,}3 \qquad 2 \mapsto 0{,}33 \qquad 3 \mapsto 0{,}333 \qquad \text{etc.}$$

b) Racine carrée.

x est une racine carrée de X dans $\mathbb{D}$ si :

$$x \in \mathbb{D} \qquad x^2 = \mathrm{X}.$$

Certains nombres décimaux admettent une racine carrée (ex. : 4, 25, 0,16, etc), d'autres non.

*2. — Montrez (en utilisant un procédé analogue à celui utilisé dans le paragraphe *a)*) que 2 n'a pas de racine carrée dans $\mathbb{D}$.

Il est cependant possible de construire une suite de nombres décimaux :

$$\left.\begin{array}{l}0 \times 0 = 0\\ 1 \times 1 = 1\\ 2 \times 2 = 4\end{array}\right\} 1 \times 1 < 2 < 2 \times 2$$

$$\left.\begin{array}{l}1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}21\\ 1{,}2 \times 1{,}2 = 1{,}44\\ 1{,}3 \times 1{,}3 = 1{,}69\\ 1{,}4 \times 1{,}4 = 1{,}96\\ 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25\end{array}\right\} 1{,}4 \times 1{,}4 < 2 < 1{,}5 \times 1{,}5$$

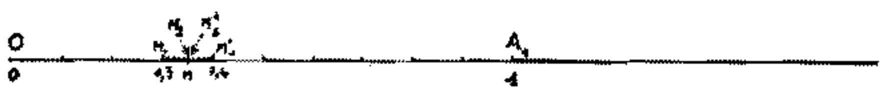
etc.

Nous obtenons la suite :

1 1,4 etc.

*3. — Avec une machine à calculer, un ordinateur, ou... à la main, cherchez les deux termes suivants.

2. Interprétation graphique.



Appelons M le point situé au tiers de la longueur OA_1 ($OA_1 = u$), c'est-à-dire tel que $3OM = OA_1$.

Le point M n'a pas d'abscisse dans D, nous venons de le voir, car son abscisse x, si elle existait devrait vérifier : $3x = 1$.

Mais, nous pouvons encadrer la longueur OM

$$OO < OM < OA_1$$

c'est-à-dire $\quad 0.u < OM < 1.u$

$$OM_1 < OM < OM'_1$$

c'est-à-dire $\quad 0{,}3\,u < OM < 0{,}4\,u$

$$OM_2 < OM < OM'_2$$

c'est-à-dire $\quad 0{,}33.u < OM < 0{,}34\,u$

etc.

Nous obtenons ainsi une suite de segments, M appartenant à chacun d'eux : $[OA_1]$, $[M_1M'_1]$, $[M_2M'_2]$, etc.

Chacun de ces segments est inclus dans tous les précédents et la mesure de leur longueur est arbitrairement petite (ces mesures sont respectivement 1, 0,1, 0,01, etc.).

Une telle suite est appelée « suite de segments emboîtés ».

Cherchons l'intersection de ces segments; nous la noterons :

$$\bigcap_i [M_iM'_i]$$

$$M \in \bigcap_i [M_iM'_i]$$

Supposons qu'un autre point N appartienne aussi à cette intersection, alors on aurait $[MN] \subset \bigcap_i [M_iM'_i]$.

Tous les segments $[M_iM'_i]$ auraient alors une longueur dont la mesure serait supérieure ou égale à celle de $[MN]$.

Ceci est impossible puisque la mesure des segments $[M_iM'_i]$ est arbitrairement petite.

On obtient :

$$\bigcap_i [M_iM'_i] = \{M\}$$

D'une façon générale, soit une suite de segments emboîtés $S_0, S_1, S_2 \ldots S_n$, c'est-à-dire une suite de segments vérifiant :

1) $S_j \subset S_i$ chaque fois que $j \geqslant i$.

2) La mesure de la longueur de S_i est arbitrairement petite.

On montre, comme précédemment, que l'intersection des segments S_i ne peut pas contenir plus d'un point. Cette intersection est donc un singleton ou l'ensemble vide.

Axiome. — L'intersection de tous les segments d'une suite de segments emboîtés est un singleton.

3. But de la construction de $\mathbb{R}$.

Nous voulons donner à tous les points de la droite une abscisse, ce qui n'est pas possible à l'aide de l'ensemble $\mathbb{D}$.

Par exemple, le point M situé au tiers de la longueur OA, devra avoir une abscisse dans notre nouvel ensemble.

Pour construire cet ensemble, nous retiendrons les idées suivantes :

a) Une suite de segments emboîtés $[M_0M'_0]$, $[M_1M'_1]$, $[M_2M'_2]$ ..., $[M_nM'_n]$ ... définit parfaitement un point de la droite : l'élément unique de l'ensemble $\bigcap [M_iM'_i]$.

b) En reprenant l'exemple de la définition du point M situé au tiers de la longueur OA, nous remarquerons que la donnée de la première extrémité du segment $[M_nM'_n]$ définit ce segment. Il suffit par exemple de donner M_3 d'abscisse 0,333 pour savoir que M'_3 sera le point d'abscisse 0,334, etc.

Remarque

Si un point M_n a pour abscisse par exemple 1,2569, le point M'_n aura pour abscisse 1,2570.

La mesure de la longueur $M_nM'_n$ est 10^{-n}.

c) La suite de leurs abscisses :

0 0,3 0,33 ...

devrait donc pouvoir définir un nouveau nombre qui serait l'abscisse de M.

4. *Suite décimale illimitée.*

a) *Définition*

Nous appellerons « suite décimale illimitée » (application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{D}$) toute suite de nombres décimaux du type :

$$\begin{array}{l} \mathrm{A} \\ \mathrm{A},\ a_1 \\ \mathrm{A},\ a_1a_2 \\ \cdots\cdots \\ \mathrm{A},\ a_1a_2 \ldots a_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

où $\mathrm{A} \in \mathbb{N}$ et où les a_i sont des chiffres.

Chaque nombre est obtenu à partir du précédent en adjoignant un chiffre à sa droite.

Exemples de suites décimales illimitées :

— Premier exemple :

0
0,3
0,33
0,333

etc.

0,333 ... 3

etc.

— Deuxième exemple :

1
1,4
1,41
....

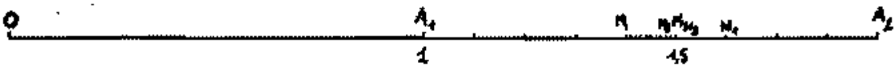
Nous appellerons $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites. Chaque élément de $\mathcal{S}$ est une suite décimale illimitée et nous la représenterons par le symbole :

$$\mathrm{A},\ a_1a_2 \ldots a_n \ldots$$

b) *Relation d'équivalence dans* $\mathcal{S}$.

1) Remarque sur deux suites décimales illimitées.

Soit M le milieu de $[A_1A_2]$; M a pour abscisse 1,5.



$M \in [A_1A_2]$ A_1 a pour abscisse 1
$M \in [M_1M]$ M_1 a pour abscisse 1,4
$M \in [M_2M]$ M_2 a pour abscisse 1,49
$M \in [M_3M]$ M_3 a pour abscisse 1,499

etc.

La suite des segments $[A_1A_2]$, $[M_1M]$, $[M_2M]$, $[M_3M]$ etc. est une suite de segments emboîtés. $\bigcap\limits_i [M_iM] = \{M\}$

De même :

$M \in [A_1A_2]$ A_1 a pour abscisse 1
$M \in [MN_1]$ M a pour abscisse 1,5 (N_1 a pour abscisse 1,6)
$M \in [MN_2]$ M a pour abscisse 1,50 (N_2 a pour abscisse 1,51)
$M \in [MN_3]$ M a pour abscisse 1,500 (N_3 a pour abscisse 1,501)

etc.

La suite des segments $[A_1A_2]$, $[MN_1]$, $[MN_2]$ etc. est une suite de segments emboîtés et on a aussi : $\bigcap\limits_i [MN_i] = \{M\}$

Ces deux suites de segments emboîtés définissent donc le même point M de la droite.

Nous serons donc amenés à considérer les deux suites :

1		1
1,4		1,5
1,49		1,50
1,499	et	1,500
.....		.....
1,499...9		1,500...0
.....		.....

comme équivalentes.

2) Définition

s et s' étant des suites décimales, nous dirons que $s\mathcal{R}s'$ pour exprimer que $s = s'$ ou que s et s' sont de la forme :

A, $a_1a_2\ldots a_i\ldots 99\ldots 9$. pour l'une,

A, a_1a_2 $(a_i + 1)00\ldots 0\ldots$ pour l'autre

ou de la forme A, 9 9...9... pour l'une

A + 1, 00...0...pour l'autre. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathcal{S}$. On le vérifiera facilement.

*3. — Cherchez les classes d'équivalence

5. L'ensemble $\mathcal{S}/\mathcal{R}$ est appelé ensemble $\mathbf{R}^+$ des nombres réels positifs. Nous représenterons encore un réel par le symbole A, $a_1a_2\dots a_n\dots$ bien que la suite A; A, a_1; ...; A, $a_1\dots a_n$; etc. ne soit qu'un représentant d'une classe d'équivalence.

Remarquons toutefois que le cas où une classe a deux représentants est exceptionnel. Généralement, on remplacera les suites du type A, $a_1a_2\dots a_i\dots 99\dots 9$. par l'autre représentant de la même classe, c'est-à-dire :

$$A,\ a_1a_2\dots(a_i+1)\ 00\dots 0\dots$$

*4. — Montrez que l'ensemble $\mathbb{D}^+$ des décimaux positifs est inclus dans l'ensemble $\mathbb{R}^+$.

6. Valeurs approchées.

Étant donné un réel $x =$ A, $a_1a_2\dots a_n\dots$, les nombres décimaux : A; A, a_1; A, a_1a_2; ... ; A, $a_1a_2\dots a_n$; etc. sont appelés valeurs approchées par défaut du nombre réel x.

A est la valeur approchée à 1 près,

A, a_1 est la valeur approchée à 10^{-1} près.

....

A, $a_1a_2\dots a_n$ est la valeur approchée à 10^{-n} près.

Pour obtenir les valeurs approchées par excès correspondantes, il suffit d'augmenter d'une unité le dernier chiffre de la valeur approchée par défaut si ce chiffre n'est pas un 9, ou de remplacer ce 9 par un 0 et d'augmenter d'une unité le chiffre précédent.

*5. — Exemple

$x \times 43{,}57913\dots$

Approximation	Valeurs approchées par défaut	Valeurs approchées par excès
1		
10^{-1}		
10^{-2}		
10^{-3}		
10^{-4}		
10^{-5}		

II. Ordre sur $\mathbb{R}$.

L'ordre sur l'ensemble $\mathbb{R}$ est l'ordre lexicographique.

Soit à comparer les réels s et t:

(On choisit les représentants ne contenant pas que des 9 à partir d'un certain rang).

$$s = \mathrm{A},\ a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$
$$t = \mathrm{B},\ b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

Nous dirons que $s \leqslant t$ si l'on se trouve dans l'un des trois cas suivants :

1) $\mathrm{A} < \mathrm{B}$ dans $\mathbb{N}$,
2) $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ et $a_i = b_i$ quel que soit $i \leqslant p$ et $a_{p+1} < b_{p+1}$ (dans $\mathbb{N}$),
3) $s = t$ (c'est-à-dire $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ et $a_i = b_i$ pour tout i).

*6. — Exercice rédigé.

Montrez que la relation « $\leqslant$ » définie dans $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre.

a) La relation est réflexive : $s \leqslant s$ d'après 3).

b) Montrons que la relation est transitive.

Hypothèse : $s \leqslant t$ et $t \leqslant u$.

$$s = \mathrm{A},\ a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$
$$t = \mathrm{B},\ b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$
$$u = \mathrm{C},\ c_1 c_2 \ldots c_n \ldots$$

si $s = t$, ou $t = u$, on a évidemment $s \leqslant u$.

Examinons les autres cas. On peut avoir :

		$\mathrm{A} < \mathrm{B}$ et $\mathrm{B} < \mathrm{C}$
ou		$\mathrm{A} = \mathrm{B}$; $a_i = b_i$ jusqu'au rang i; $a_{p+1} < b_{p+1}$
	et	$\mathrm{B} = \mathrm{C}$; $b_i = c_i$ jusqu'au rang q; $b_{q+1} < c_{q+1}$
ou		$\mathrm{A} < \mathrm{B}$
	et	$\mathrm{B} = \mathrm{C}$; $b_i = c_i$ jusqu'au rang q; $b_{q+1} < c_{q+1}$
ou		$\mathrm{A} = \mathrm{B}$; $a_i = b_i$ jusqu'au rang p; $a_{p+1} < b_{q+1}$
	et	$\mathrm{B} < \mathrm{C}$

Dans le premier cas, on a $\mathrm{A} < \mathrm{C}$, donc $s \leqslant u$.

Dans les deux derniers cas, on a aussi $\mathrm{A} < \mathrm{C}$, donc $s \leqslant u$.

Dans le second cas, on a : $\mathrm{A} = \mathrm{C}$.

$$a_i = c_i \text{ jusqu'au rang } p \text{ si } p \leqslant q,$$
$$\text{jusqu'au rang } q \text{ si } p > q.$$

Au rang suivant on a :

	$a_{q+1} < b_{p+1}$ et $b_{p+1} = c_{p+1}$	donc $a_{p+1} < c_{p+1}$
ou	$a_{q+1} = b_{q+1}$ et $b_{q+1} < c_{q+1}$	donc $a_{q+1} < c_{q+1}$

On a donc bien $s \leqslant u$.

c) Montrons que la relation est antisymétrique.

Nous montrerons que si $s \neq t$, on ne peut avoir à la fois $s \leqslant t$ et $t \leqslant s$.

Supposons : $s \neq t$.

Cela signifie : $A \neq B$ ou au moins l'un des chiffres de s est différent du chiffre de même rang de t; appelons a_p et b_p les premiers chiffres vérifiant $a_p \neq b_p$.

Si $A \neq B$, alors $A < B$ ou $B < A$ et pas les deux à la fois. Donc $s \leqslant t$ ou $t \leqslant s$ mais pas les deux à la fois.

Si $A = B$; $a_i = b_i$ jusqu'au rang p; $a_p \neq b_p$.

On a $a_p < b_p$ ou $b_p < a_p$, mais pas les deux à la fois. Donc, on a $s \leqslant t$ ou $t \leqslant s$ mais pas les deux à la fois.

*7. — La relation « $\leqslant$ » dans $\mathbb{R}$ est-elle une relation d'ordre total?

Remarque importante.

Étant donné un réel, il n'a pas de suivant. On ne peut pas parler de deux réels consécutifs. Autrement dit, étant donné deux réels x et y, il existe une infinité de réels z vérifiant : $x \leqslant z \leqslant y$.

*8. — $x = 7,45872\ldots\ldots$

$y = 7,45863\ldots\ldots$

Comparez x et y, puis trouvez plusieurs réels z compris entre x et y.

III. Structure.

1. Addition. Définition.

Soient deux réels représentés par les suites s et t.

$$s = A,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots$$
$$t = B,\ b_1b_2\ldots b_n\ldots$$

s est la suite de nombres décimaux :

$$A;\quad A,\ a_1;\quad A,\ a_1a_2;\ldots\ A,\ a_1a_2\ldots a_n;\ldots$$

t est la suite :

$$B;\quad B,\ b_1;\quad B,\ b_1b_2;\ldots\ B,\ b_1b_2\ldots b_n;\ldots$$

Formons une suite de nombres décimaux en ajoutant les nombres de même rang des suites s et t:

$$A + B;\ A,\ a_1 + B,\ b_1;\ A,\ a_1a_2 + B,\ b_1b_2;\ \ldots A,\ a_1a_2\ldots a_n + B,\ b_1b_2\ldots b_n;\ldots$$

Cette nouvelle suite de nombres décimaux n'est pas, en général, une suite décimale. Prenons un exemple :

$$s = 4{,}73148\ldots$$
$$t = 3{,}28557\ldots$$

s : 4; 4,7; 4,73; 4,731; 4,7314; 4,73148;...

t : 3; 3,2; 3,28; 3,285; 3,2855; 3,28557;...

nouvelle suite :

7; 7,9; 8,01; 8,016; 8,0169; 8,01705;...

Chaque nombre de cette nouvelle suite n'est pas obtenu à partir du précédent en adjoignant un chiffre à droite.

Nous obtenons une suite u que nous noterons :

$$\begin{array}{l} c_0 \\ c_1,\ c_1^1 \\ c_2,\ c_1^2c_2^2 \\ c_3,\ c_1^3c_2^3c_3^3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_n,\ c_1^nc_2^nc_3^n\ldots c_n^n \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On verra facilement que la suite des nombres naturels $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$ n'est pas décroissante. De plus elle est majorée par (A + 1) + (B + 1). Elle devient donc stationnaire à partir d'un certain rang p. A partir de ce rang, tous les c_i sont égaux à un naturel que nous appellerons c.

(Dans l'exemple donné plus haut, on vérifiera que $c = 8$.)

Dans la suite u, barrons tous les nombres dont la partie entière n'est pas égale à C, c'est-à-dire tous les nombres jusqu'au rang p (non compris).

(Dans l'exemple précédent, on barre 7 et 7,9.)

La suite des premiers chiffres après la virgule : c_1^p, c_1^{p+1}, ... n'est pas décroissante, et majorée par 10. Elle devient donc stationnaire à partir d'un certain rang q.

A partir du rang q, tous les c_1^i sont égaux à un nombre que nous appellerons c_1 (dans l'exemple on vérifiera que $c_1 = 0$). Puis barrons tous les nombres dont le premier chiffre après la virgule n'est pas c_1, c'est-à-dire tous les nombres jusqu'au rang q (non compris). (Dans l'exemple $q = p$ et il n'y a rien à barrer.)

Procédons de la même façon pour obtenir les deuxième, troisième, ..., n$^{\text{ème}}$ chiffres après la virgule.

Nous obtenons ainsi une suite décimale.

$$\begin{array}{l} c \\ c,\ c_1 \\ c,\ c_1c_2 \\ \ldots\ldots \\ c,\ c_1c_2\ldots c_n \\ \ldots\ldots \end{array}$$

Nous appellerons familièrement cette méthode : « méthode de la pêche aux décimales ».

Dans l'exemple précédent, la suite obtenue est :

8
8,0
8,01
8,017
8,0170
......

Cette suite est, par définition, la somme des suites s et t.

Remarque :

Lorsqu'on a fait la somme des valeurs approchées à 10^{-n} près, on est sûr des chiffres jusqu'au rang $n-1$ à condition que le chiffre de rang n ne soit pas un 9. En effet, dans une addition de deux nombres, la retenue ne peut être supérieure à 1 ; si le dernier chiffre est inférieur à 9, il ne peut donc fournir une retenue affectant le chiffre de rang $n-1$.

Dans l'exemple précédent, quand on a trouvé 8,016, on est sûr du 1 (et des chiffres précédents). Par contre, quand on a trouvé 8,0169, on ne peut être sûr du 6.

L'exemple montre d'ailleurs que l'on obtient 7 au rang suivant.

Compatibilité avec la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$.

Étant donné deux suites décimales s et t, nous venons de définir la suite $s+t$. Supposons que s' soit une suite équivalente à s : $s\mathfrak{R}s'$.

On pourrait démontrer qu'alors $(s+t)\,\mathfrak{R}\,(s'+t)$.

Si $s = s'$, ceci est évident. Nous traiterons l'autre cas sur un exemple.

*9.

$$s = 14{,}400\ldots0\ldots$$
$$t = \ \ 5{,}8282\ldots82\ldots$$

Calculez $s+t$

$$s' = 14{,}399\ldots9\ldots$$

Calculez $s'+t$

Constatez que $(s+t)\,\mathfrak{R}\,(s'+t)$.

Nous pouvons définir maintenant la somme de deux réels x et y. s et t étant des représentants de x et y, la somme $x+y$ est le nombre réel dont un représentant est $s+t$.

Remarquons, une fois de plus, que le cas où il y a plus d'un représentant pour un nombre réel est très particulier.

2. *Addition. Propriétés.*

a) Il est évident que l'addition ainsi définie est commutative et que 0 est l'élément neutre. Nous admettrons que l'addition est associative.

b) Régularité :

Tout nombre réel est régulier pour l'addition, c'est-à-dire :

$$a + x = b + x \Rightarrow a = b$$

c) Ordre et addition : on pourrait montrer que

$$a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$$

*10. — En déduire que :

$$(a \leqslant b \wedge c \leqslant d) \Rightarrow (a + c \leqslant b + d)$$

Nous pouvons maintenant construire l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, dans lequel tout nombre admet un opposé. L'ensemble $\mathbb{R}$ est un groupe commutatif.

3. *Multiplication. Définition.*

On utilise un procédé analogue pour définir le produit de deux suites *s* et *t*.

s est la suite

$$A; \quad A, a_1 \quad ;\ldots; \quad A, a_1a_2\ldots a_n;\ldots$$

t est la suite

$$B; \quad B, b_1 \quad ;\ldots; \quad B, b_1b_2\ldots b_n;\ldots$$

On fait les produits des nombres décimaux de même rang et on obtient une nouvelle suite *v* :

$$A \times B; \quad A, a_1 \times B, b_1 \quad ;\ldots A, a_1a_2\ldots a_n \times B, b_1b_2\ldots b_n;\ldots$$

Cette suite n'est pas, en général, une suite décimale.

*11. — Calculez les quatre premiers nombres de cette suite en prenant pour *s* et *t* les suites données lors de la définition de l'addition.

On utilise alors la méthode de « la pêche aux décimales » et on obtient une suite décimale.

$$D, d_1d_2\ldots d_n\ldots$$

qui est, par définition, le produit des suites *s* et *t*.

La remarque qui a été faite pour l'addition n'est pas valable pour la multiplication, évidemment, puisque les retenues peuvent être de 8 et donc affecter plusieurs rangs.

Pour les élèves de Quatrième, on aura peut-être intérêt à calculer les produits des valeurs approchées par défaut, le produit des valeurs approchées par excès, puis à garder les chiffres communs.

En prenant toujours les mêmes suites :

$$4{,}73 \times 3{,}28 = 15{,}5144$$
$$4{,}74 \times 3{,}29 = 15{,}5946$$

On est sûr seulement de 15,5.

Compatibilité avec la relation d'équivalence : il faudrait montrer maintenant que :

$$s\mathcal{R}s' \Rightarrow (s \times t)\,\mathcal{R}\,(s' \times t)$$

Nous pouvons alors définir le produit de deux nombres réels x et y. s et t étant des représentants des nombres x et y, le produit xy est, par définition, le nombre réel dont un représentant est st.

4. *Multiplication. Propriétés.*

a) La multiplication ainsi définie est évidemment commutative et 1 est l'élément neutre. Nous admettrons qu'elle est associative et distributive par rapport à l'addition.

b) *Inverse d'un nombre réel.* Nous admettrons l'existence d'un inverse pour tout élément de $\mathbf{R}^*$.

Méthode de la détermination de l'inverse du nombre réel x.

On cherche le quotient à une unité près par défaut de 1 par la valeur approchée à une unité près par excès de x. On obtient un nombre X_0 ($X_0 \in \mathbb{N}$).

On cherche le quotient à 10^{-1} près par défaut de 1 par la valeur approchée à 10^{-1} près par excès de x. On obtient un nombre X_1 (X_1 est un nombre décimal ayant un chiffre après la virgule).

On cherche le quotient à 10^{-2} près par défaut de 1 par la valeur approchée à 10^{-2} près par excès de x. On obtient un nombre décimal X_2 ayant deux chiffres après la virgule. Et ainsi de suite...

On a alors une suite de nombres décimaux $X_0, X_1, X_2, \ldots$, qui n'est pas, en général, une suite décimale. On démontre que cette suite est croissante (au sens large). On utilise la méthode de la « pêche aux décimales » et on obtient un nombre réel y qui est l'inverse de x, c'est-à-dire qui vérifie $xy = 1$ (c'est cela qui est un peu difficile à démontrer).

Exemple. — Cherchez l'inverse de $\sqrt{2}$. $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$

$$1 = 2 \times 0 + 1$$
$$1 = 1{,}5 \times 0{,}6 + r_1$$
$$1 = 1{,}42 \times 0{,}70 + r_2$$
$$1 = 1{,}415 \times 0{,}706 + r_3$$
$$1 = 1{,}4143 \times 0{,}7070 + r_4$$
$$1 = 1{,}41422 \times 0{,}70710 + r_5$$
$$1 = 1{,}414214 \times 0{,}707106 + r_6$$

etc.

On obtient la suite :

$$0;\ 0{,}6;\ 0{,}70;\ 0{,}706;\ 0{,}7070;\ 0{,}70710;\ 0{,}707106;\ \text{etc.}$$

Ce n'est pas une suite décimale. L'inverse de $\sqrt{2}$ est :

$$0{,}70710...$$

c) Régularité.

Tout élément de $\mathbb{R}^*$ est régulier pour la multiplication, c'est-à-dire :

$$(ax = bx) \wedge (x \neq 0) \Rightarrow a = b.$$

d) Ordre et multiplication.

$$a \leqslant b \Rightarrow ka \leqslant kb \quad \text{si} \quad k \in \mathbb{R}^+$$
$$a \leqslant b \Rightarrow ka \geqslant kb \quad \text{si} \quad k \in \mathbb{R}^-$$

IV. Liste des propriétés de $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ obtenu a les propriétés suivantes (que l'on pourrait prendre comme axiomes et qui servirait alors à définir $\mathbb{R}$) :

1) $\mathbb{R}$ est un corps commutatif ordonné.

Cela signifie que $\mathbb{R}$ est un corps commutatif et qu'il existe dans $\mathbb{R}$ une relation d'ordre compatible avec les opérations addition et multiplication. (Ce sont les propriétés *c*) pour l'addition et *d*) pour la multiplication.)

2) $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$. Et les opérations et l'ordre définis sur $\mathbb{R}$ « prolongent » les opérations et l'ordre définis sur $\mathbb{D}$.

3) $\mathbb{R}$ est un espace métrique complet.

$\mathbb{R}$ est un espace métrique, ce qui signifie qu'on peut y définir une distance. La distance de deux réels x et y est la valeur absolue de la différence $x - y$. En ceci, $\mathbb{R}$ ne diffère pas de l'ensemble $\mathbb{D}$ sur lequel on peut aussi définir une distance.

Une suite de segments (intervalles fermés) $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, ... $[x_n, y_n]$, ... est appelé « suite de segments emboîtés » si :

a) $[x_i, y_i] \subset [x_j, y_j]$ dès que $i \geqslant j$.

b) La mesure de ces segments est arbitrairement petite (la mesure de $[x_i, y_i]$ est la distance des nombres x_i et y_i).

Soit $[x_i, y_i]$ une suite de segments emboîtés. Dire que $\mathbb{R}$ est complet signifie que $\bigcap\limits_i [x_i, y_i]$ n'est pas vide (on en déduit que cette intersection est un singleton).

L'ensemble $\mathbb{D}$ n'est pas un espace métrique complet, nous l'avons vu au début de cette étude.