*La première partie de cet article se propose de préciser la place de l'enseignement du calcul numérique en Quatrième dans l'ensemble de la formation de l'élève.*

*La deuxième partie est une esquisse sommaire de la théorie sous-jacente à l'introduction des décimaux et des réels en Quatrième ; elle ne fait appel qu'à des connaissances élémentaires sur les ensembles ordonnés, les groupes et les corps.*

# Les décimaux et les réels en quatrième

E. Dehame,
*Poitiers.*

## 1. — Objectifs et méthodes pédagogiques.

Parmi les nombreux objectifs que l'on peut se fixer en enseignant le calcul numérique en Quatrième, nous n'en retiendrons que quelques-uns dont il est inutile de souligner l'importance, tant pour la formation du futur scientifique que pour la formation de l'homme de notre siècle, quelle que soit sa destinée.

### 1.1. Apprentissage des techniques de calcul numérique en vue des applications.

Dans le monde contemporain, où le nombre envahit tous les domaines de la vie, l'élève doit être familiarisé avec le nombre décimal, car c'est toujours en décimaux que s'expriment les résultats des mesures (physiques ou statistiques), et c'est par le truchement des décimaux que se font les calculs sur les réels.

On devrait pouvoir exiger de l'élève sortant de Quatrième :

a) ***Qu'il connaisse la signification des opérations usuelles sur les décimaux*** (qu'il sache par exemple traduire par des inégalités le fait que 0,53 est le quotient approché à $10^{-2}$ près par défaut de 7 par 13);

b) ***Qu'il sache pratiquer avec aisance ces opérations*** (par exemple, connaissant le produit de 17 par 42, trouver le produit de 0,017 par 4,2 ou de $17.10^{6}$ par $42.10^{-2}$). Il est à noter que, dans la pratique, on utilise aussi bien la représentation des décimaux par des nombres à virgule que leur représentation par des produits $a.10^p$ ($a \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$) ou encore par des produits du type $a.10^p$ ($1 \leqslant |a| < 10$; $p \in \mathbb{Z}$)

$$412{,}64 = 41\,264.10^{-2} = 4{,}126\,4.10^2$$

Il est utile de savoir calculer sur les décimaux sous ces différentes formes et de savoir passer rapidement d'un mode de représentation à un autre.

c) ***Qu'il sache prévoir l'ordre de grandeur d'un résultat.*** Par exemple, si $x = 0{,}125$, ce qui importe n'est pas de savoir que $x^5$ a 15 chiffres après la virgule, mais que $x^5$ est de l'ordre de $2.10^{-5}$. Si on cherche la vitesse moyenne d'un avion qui parcourt Paris-Bordeaux en 1 h 10, on peut trouver 500 km/h, mais sûrement pas 50 km/h, ni 5 000 km/h.

La pratique du calcul à la machine est, à cet égard, très éducative, puisqu'elle oblige l'élève à penser à la place de la virgule.

d) ***Qu'il possède une certaine maîtrise du calcul des encadrements, mais surtout, qu'il ne cherche pas à retenir de « recettes » à ce sujet.*** Jusqu'à présent, l'enseignement trop tardif du calcul des encadrements en mathématiques a contraint les professeurs de technologie et de physique à donner aux élèves des « recettes » pour calculer l'incertitude sur une somme ou sur un produit; la mémorisation prématurée de ces recettes a bloqué beaucoup d'entre eux à tel point qu'en classe de Mathémathiques Supérieures ou dans le Premier Cycle des Universités, ils sont encore incapables d'aborder sainement un problème d'analyse numérique.

Puisque les élèves de Quatrième reçoivent parallèlement un enseignement de technologie, il importe de faire très tôt le lien entre le langage du technologue et celui du mathématicien :

« $x_0$ est une valeur approchée de $x$ à 0,5 près » signifie que

$$x_0 - 0{,}5 \leqslant x \leqslant x_0 + 0{,}5$$

En mathématiques, ces dernières inégalités sont, sans aucun doute, des inégalités au sens large (penser aux tables de logarithmes dans lesquelles « $\log x = 0{,}35274$ à $0{,}5.10^{-5}$ près » signifie que $\log x \in [0{,}352735\,;\ 0{,}352745]$). Si le technologue préfère les inégalités strictes, on peut convenir que

$$x_0 - 0{,}5 < x < x_0 + 0{,}5$$

se lit :

« $x_0$ est une valeur approchée de $x$ à moins de 0,5 près ». Mais, de toute façon, dans un problème concret, la distinction entre les inégalités larges et les inégalités strictes est illusoire.

En réalité, dans un véritable problème concret, on ne s'intéresse pas aux extrémités de l'intervalle d'encadrement, mais à la probabilité pour que $|x - x_0|$ soit inférieur à un $\varepsilon$ donné. Le bagage mathématique des élèves de

Quatrième est encore trop rudimentaire pour qu'on puisse leur faire toucher du doigt le fond du problème; mais ce n'est pas une raison pour bannir les problèmes concrets du cours de mathématiques de Quatrième. Bien, au contraire, des allusions au concret sont indispensables à tous les niveaux de l'enseignement; mais, à un niveau déterminé, on ne peut aborder les problèmes concrets qu'avec les outils dont on dispose à ce niveau, tout en faisant remarquer que ces outils ne sont pas parfaits.

### 1.2. Apprentissage de la déduction.

Contrairement à une opinion encore très répandue il y a quelques années, l'étude des nombres fournit, mieux encore que l'étude de l'espace, un grand nombre de situations propices au développement de l'esprit déductif.

Mais il serait prématuré, en classe de Quatrième, de donner à l'élève une construction complète des ensembles de nombres où tous les axiomes et toutes les démonstrations seraient explicités (de même qu'il serait prématuré de lui donner une véritable construction axiomatique du plan affine ou du plan euclidien).

La construction que nous proposons dans la deuxième partie de cet article n'est qu'un fil directeur à l'usage du professeur. Celui-ci devra choisir (dans le cadre de la construction que nous proposons ou de toute construction équivalente) les propriétés qu'il admet et celles dont la démonstration est suffisamment simple et suffisamment éducative pour pouvoir être proposée avec fruit aux élèves.

Ce qui importe, c'est qu'à la fin de la Quatrième, l'élève soit capable de ressentir que, dans telle ou telle situation, une démonstration s'impose (nécessité de démontrer une propriété qui n'a été que constatée pour quelques valeurs de $n$, nécessité de démontrer la réciproque d'un théorème, etc.), et soit capable de faire une démonstration simple à partir de prémisses qu'on lui rappellera si c'est nécessaire.

Voici, par exemple, sous quelle forme la démonstration de la compatibilité de l'ordre et de l'addition dans l'ensemble des décimaux a été proposée aux élèves des classes de Quatrième expérimentale de Poitiers :

**Exercice.**

On sait que $a > b$; on se propose de comparer $(a+c)$ et $(b+c)$; pour cela on calcule leur différence.

Vous utilisez les propriétés :

① l'addition est associative et commutative.
② pour retrancher un décimal, on ajoute son opposé.
③ la somme d'un décimal et de son opposé est égale à 0.

④ l'opposé de la somme de deux décimaux est égal à la somme de leurs opposés.

⑤ 0 est élément neutre pour l'addition.

Appelons $d$ la différence $(a + c) - (b + c)$.

$$d = (a + c) - (b + c)$$

$$d = (a + c) + \text{opp } (b + c)$$

$$d = (a + c) + (\text{opp } b + \text{opp } c)$$

$$d = (a + \text{opp } b) + (c + \text{opp } c)$$

$$d = a + \text{opp } b + 0$$

$$d = a + \text{opp } b$$

$$d = a - b$$

Vous aviez $d = (a + c) - (b + c)$, vous avez obtenu $d = a - b$; quelle est votre conclusion?

Pouvez-vous répondre à la question posée au début de l'exercice?

Cet exercice, posé en début d'année, n'est qu'un premier stade dans l'initiation à la déduction. Au stade suivant, des démonstrations sont proposées toujours sous la forme d'organigrammes, mais en laissant plus d'initiative à l'élève. Enfin, à un stade ultérieur, il faut initier l'élève à la rédaction d'une démonstration.

**1.3. Développement de l'intuition numérique et préparation aux raisonnements d'analyse.**

Ce serait une erreur de centrer l'enseignement des mathématiques sur la déduction : l'enseignement de la langue française ne se réduit pas à celui de la grammaire, l'enseignement de la musique ne se réduit pas à celui de l'harmonie. Beaucoup d'idées mathématiques, simples et fécondes, sont accessibles aux élèves bien avant qu'ils ne soient capables de démontrer tous les théorèmes qui, logiquement, leur sont antérieurs.

Plus important que l'apprentissage de la déduction est le développement de *l'intuition numérique*.

C'est cette intuition qui permettra à l'élève d'utiliser avec efficacité ses connaissances mathématiques dans les autres disciplines scientifiques et dans les problèmes posés par la vie courante.

C'est elle qui lui permettra d'aborder dès le second cycle des notions d'*analyse* qui, pour la plupart, n'étaient enseignées autrefois qu'en Terminale ou en Faculté et qui, dans le monde moderne, sont considérées comme les éléments de base de toute culture scientifique : les notions de limite, de continuité, de dérivée, d'intégrale.

En Quatrième, les seules notions préparatoires à l'analyse que l'on puisse introduire sont celles d'intervalle (ouvert ou fermé), de distance, de suite emboîtée d'intervalles. Mais il est possible de trouver des problèmes tout à fait élémentaires et concrets qui font appel à des types de raisonnements propres à l'analyse.

*a*) **Problèmes de majoration.**

Si on connaît un encadrement d'un décimal $x$, par exemple :

$$1{,}799 \leqslant x < 1{,}901, \tag{1}$$

on peut en déduire d'autres encadrements :

$$1{,}79 \leqslant x < 1{,}91 \tag{2}$$
$$1{,}7 \leqslant x < 2 \tag{3}$$

Cette majoration de l'amplitude de l'encadrement ne peut pas être faite sans précautions : un élève habitué trop tôt à négliger aurait tendance à remplacer (1) par

$$1{,}8 \leqslant x < 1{,}9$$

Le choix entre les encadrements (1), (2), (3) est guidé par des considérations d'opportunité : précision permise par les instruments de mesure, par la machine à calculer utilisée, commodité des calculs ultérieurs à effectuer à la main, etc. Ce choix exige une démarche de l'esprit, dont tout automatisme est exclu, et qui n'a rien à voir avec la déduction; nous sommes loin de l'enseignement traditionnel de l'algèbre en Quatrième, où alternaient les calculs (automatiques) et les démonstrations; mais nous sommes très près des raisonnements utilisés en physique et aussi en analyse :

Le choix de l'encadrement le plus « raisonnable » d'un résultat numérique est analogue au choix du « meilleur » $\alpha$ correspondant à un $\varepsilon$ donné dans une démonstration de continuité et au choix du majorant le plus « commode » dans la démonstration de la convergence d'une série.

**b) Problèmes du type : « on donne $\varepsilon$, trouvez $\alpha$ ... ».**

*1er exemple :* le quotient approché à $10^{-6}$ près par défaut de 652 par 27 est 24,148 148.

Pour que 27 $x$ soit une valeur approchée de 652 à $10^{-2}$ près, suffit-il de prendre pour $x$

24,1? 24,14? 24,148? ...

*2e exemple :* on donne deux décimaux s'écrivant chacun avec un grand nombre de chiffres à droite de la virgule. Combien faut-il conserver de décimales pour obtenir leur produit à $10^{-3}$ près?

Le premier exemple est une approche expérimentale de la continuité de la fonction $x \mapsto 27\,x$, le second est une approche expérimentale de la continuité de la fonction de deux variables : $(x, y) \mapsto xy$. Mais la notion de continuité ne pourra être explicitée que bien plus tard, quand les élèves sauront manier les quantificateurs.

***Le rôle des figures.***

Chez beaucoup d'élèves, l'intuition numérique a besoin d'un support graphique.

Pour mettre en évidence des propriétés de $\mathbb{R}$ ne faisant intervenir que l'ordre, on peut se contenter de classer des nombres réels en respectant leur ordre mais sans s'intéresser aux longueurs des intervalles qui les séparent :

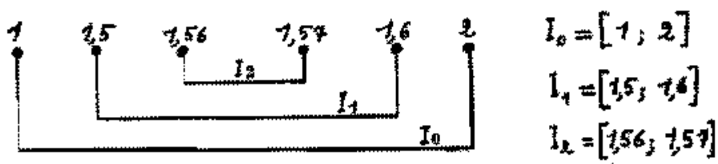


Fig. 1.

Mais, pour les propriétés de $\mathbb{D}$, ou de $\mathbb{R}$, qui font intervenir la structure d'espace métrique (c'est-à-dire la notion de distance), seules les figures à l'échelle sont suffisamment suggestives :

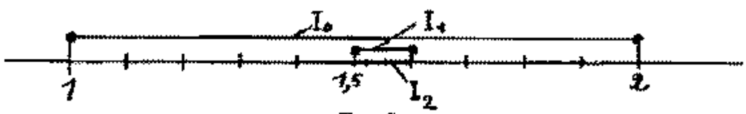


Fig. 2.

Naturellement, on peut reprocher beaucoup de choses aux figures : impossibilité de distinguer les décimaux des réels non décimaux, risque de confusion entre « propriété constatée sur la figure » et « propriété démontrée ». Il faut que les élèves sachent que la figure n'est pas l'objet de l'étude : ce n'est qu'un support pour l'imagination. Elle joue le même rôle que les diagrammes de Venn pour l'étude des ensembles : elle n'a pas plus de valeur mathématique, mais elle a autant de valeur psychologique.

Dans une classe de Quatrième expérimentale, les élèves avaient à encadrer le poids du contenu d'une bouteille connaissant un encadrement du poids de la bouteille pleine et un encadrement du poids de la bouteille vide. Ils n'ont vraiment compris le problème qu'après l'avoir traduit par un graphique, mais il a fallu qu'on leur demande explicitement de tracer ce graphique (ils n'y pensent pas d'eux-mêmes). A un niveau plus avancé, les étudiants éviteraient bien souvent des calculs inutiles s'ils s'astreignaient à faire une figure (ou, tout au moins à essayer de s'imaginer la figure).

Hormis chez quelques sujets exceptionnels qui viennent au monde avec l'intuition numérique, celle-ci s'acquiert par le tracé effectif de nombreuses figures. Ce n'est qu'après en avoir tracé un nombre suffisamment grand que les élèves arriveront à s'imaginer les figures « dans leur tête » sans les tracer effectivement.

### *La comparaison avec le dictionnaire.*

Nous venons de signaler que toute représentation graphique ne peut donner qu'une idée grossièrement approchée de la structure de $\mathbb{R}$. Pour développer l'intuition du nombre réel sans inculquer d'idées fausses, il est nécessaire d'en varier les représentations imagées. Voici une « image » de $\mathbb{R}$ qui, elle non plus, n'est pas parfaite, mais qui, mieux que la figure, rend compte des propriétés d'ordre de $\mathbb{R}$.

On imagine qu'on classe dans un dictionnaire tous les mots (d'un nombre fini de lettres) que l'on peut former avec les 26 lettres de l'alphabet. Puis on intercale dans ce dictionnaire des mots illimités; par exemple entre *bar* et *bas*, on peut intercaler une infinité de mots illimités tels que *baraaa...*, *barcdecdecde...*, ... (remarquez qu'entre *bar* et *bas*, il y avait aussi une infinité de mots limités).

Cette situation présente une grande analogie avec le passage des décimaux aux réels, les mots limités jouant le rôle des décimaux et les mots illimités le rôle des réels non décimaux. Cette analogie serait parfaite si on se bornait aux réels de l'intervalle [0; 1] et si on convenait d'identifier des mots tels que *bas*, *barzzz...* et *basaaa...* (de même qu'on identifie 0,523; 0,522 999... et 0,523 000).

## 2. — Une théorie élémentaire des décimaux et des réels.

### 2.1. Introduction des décimaux.

Dans les classes antérieures, la nécessité d'introduire des nombres non entiers a été ressentie par les élèves à propos des problèmes de mesure. Il n'y a pas lieu de revenir sur cette motivation en Quatrième. Le moment est venu de développer chez l'élève le concept abstrait de nombre décimal : si la notion de décimal reste attachée à un exemple concret (celui de la mesure des longueurs par exemple), il sera difficile de concevoir la puissance $n^{ième}$ d'un décimal, de ressentir la nécessité d'introduire des nombres non décimaux, etc.

Voici, dans ses grandes lignes, le principe d'une introduction possible des décimaux, introduction qui se veut abstraite, mais très proche des techniques de calcul utiles aux élèves de Quatrième.

*a*) On considère des symboles tels que :

$$\ldots 000\,018\,206,\ 493\,000\,000$$
$$\ldots 000\,000\,120,\ 000\,000\,000\ldots$$
$$-(\ldots 0\,287\,000\,000,\ 000\,000\,000\ldots)$$
$$-(\ldots\ \ldots 000\,000,\ 000\,724\,000\ldots)$$

Chacun de ces symboles est constitué par une suite de chiffres illimitée vers la droite et vers la gauche, séparée en deux parties par une virgule, et précédée ou non du signe —; les chiffres sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

On identifie les symboles :

$$\ldots 000{,}000\ldots \text{ et } -(\ldots 000{,}000\ldots).$$

L'ensemble ainsi défini se note $\mathbb{D}$ (ensemble des *décimaux*).

*b*) On identifie les éléments de $\mathbb{D}$ dont tous les chiffres à droite de la virgule sont nuls aux éléments de $\mathbb{Z}$ :

$$\ldots 000\,018{,}000\ldots \text{ est identifié à } 18$$
$$-(\ldots 040\,100{,}000\ldots) \text{ est identifié à } -40\,100$$

La paire de symboles $\{\ldots 000{,}000\ldots;\ -(\ldots 000{,}000\ldots)\}$ est identifiée à 0.

*c)* Dans $\mathbb{D}$, on définit la *multiplication par 10* de la façon suivante (décalage de la virgule d'un rang vers la droite), on pose :

$$(\ldots 0 a_n a_{n-1} \ldots a_0,\ a_{-1}\ a_{-2} \ldots a_{-p} 0 \ldots) \times 10 = 0 a_n a_{n-1} \ldots a_0 a_{-1},$$
$$a_{-2} \ldots a_{-n} 0 \ldots \text{ et, pour tout } x \in \mathbb{D},\ 10.x = x.10.$$

Cette définition généralise la règle bien connue de multiplication d'un entier par 10.

*d)* De cette définition résulte l'existence d'un élément $\alpha \in \mathbb{D}$ tel que $\alpha.10 = 10.\alpha = 1.$ :

$$\alpha = \ldots 000,\ 100\,000 \ldots$$

On note $\alpha = 10^{-1}$, et on définit la multiplication par $10^{-1}$ par décalage de la virgule d'un rang vers la gauche.

On vérifie que $10^2$, $10^3$, $\ldots$, $10^n$ admettent respectivement pour inverses $\alpha^2$, $\alpha^3$, $\ldots$, $\alpha^n$ (qu'on note aussi $10^{-2}$, $10^{-3}$, $\ldots$, $10^{-n}$ et qui s'écrivent $\ldots 0{,}010\,0\ldots$ ; $\ldots 0{,}001\,00\ldots$ ; etc.).

On peut ici mettre en évidence les propriétés de groupe commutatif de l'ensemble $\{10^p ;\ p \in \mathbb{Z}\}$ pour la multiplication et les règles de calcul dans ce groupe :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall p \in \mathbb{Z},\ 10^n.10^p = 10^{n+p}$$
$$(10^n)^p = 10^{np}$$

On définit *le produit d'un décimal* x *par* $10^n (n \in \mathbb{Z})$ en itérant $n$ fois la multiplication par 10 si $n > 0$, en itérant $|n|$ fois la multiplication par $10^{-1}$ si $n < 0$ (décalage de la virgule de $n$ rangs vers la droite ou de $|n|$ rangs vers la gauche).

*e)* Cette dernière définition permet de mettre, de plusieurs façons, tout décimal sous la forme $a.10^{-n}$ ($a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$)
(par exemple, $-(\ldots 027{,}2900\ldots) = -2729.10^{-2} = -27\,290.10^{-3} = \ldots$).

On définit alors *la somme et le produit de deux décimaux quelconques* par les formules :

$$a.10^{-n} + b.10^{-n} = (a+b).10^{-n} \qquad (1)$$
$$a.10^{-n} \times b.10^{-p} = a.b.10^{-(n+p)} \qquad (2)$$

On vérifie que les seconds membres de (1) et (2) ne dépendent pas des représentations choisies dans le premier membre : par exemple, la formule (1) donne :

$$3.10^{-2} + 50.10^{-2} = 53.10^{-2};\quad 30.10^{-3} + 500.10^{-3} = 530.10^{-3};$$

$53.10^{-2}$ et $530.10^{-3}$ représentent le même élément de $\mathbb{D}$.

On démontre que, muni des lois de composition internes définies par (1) et (2), $\mathbb{D}$ est un anneau commutatif, et que $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{D}$.

*f*) L'ensemble $\mathbb{D}_+$ des décimaux qui sont représentés par des symboles non précédés du signe — est stable pour l'addition et pour la multiplication. On convient d'écrire :

$$x \leqslant y$$

si et seulement si $y - x$ est un élément de $\mathbb{D}_+$.

On démontre que la relation notée $\leqslant$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{D}$, et que cette relation d'ordre est compatible avec la structure d'anneau de $\mathbb{D}$ :

$$\forall a \in \mathbb{D},\ \forall b \in \mathbb{D},\ \forall c \in \mathbb{D},\quad a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c \qquad (3)$$

$$\forall a \in \mathbb{D},\ \forall b \in \mathbb{D},\ \forall c \in \mathbb{D}_+,\quad a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc \qquad (4)$$

Les propriétés des inégalités dont on fera couramment usage dans les problèmes sur les encadrements sont des corollaires de (3) et (4) : addition des inégalités membre à membre, multiplication membre à membre des inégalités entre décimaux positifs.

### 2.2. Structure d'espace métrique de $\mathbb{D}$.

*a*) On démontre que la distance de deux décimaux $x$, $y$,

$$d(x, y) = |x - y|$$

possède les propriétés suivantes (propriétés caractéristiques des distances) :

$d(x, y)$ est un réel positif (ici un décimal positif) et

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

On dit encore que $\mathbb{D}$, muni de la distance $d$, est un *espace métrique*.

*b*) Dans tout espace métrique E, on définit les notions de *boule ouverte* et de *boule fermée :*

Si $a \in$ E et si $r \in \mathbb{R}_+$, la boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$ est l'ensemble des éléments $x$ de E tels que $d(a, x) < r$ ; la boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$ est l'ensemble des éléments $x$ de E tels que $d(a, x) \leqslant r$.

Dans $\mathbb{D}$, la boule ouverte (respectivement fermée) de centre $a$ et de rayon $r$ n'est autre que l'*intervalle ouvert* (respectivement *fermé*) d'extrémités $a - r$ et $a + r$.

L'introduction de ce langage est commode pour établir la liaison entre le langage des encadrements et celui des valeurs approchées : « $x_0$ est une valeur approchée de $x$ à $\varepsilon$ près » signifie que $d(x_0, x) \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire que $x$ est encadré par le couple de décimaux $x_0 - \varepsilon$, $x_0 + \varepsilon$.

*c*) Dans tout espace métrique E, on définit le *diamètre* d'une partie bornée quelconque A de E : c'est la borne supérieure de $d(x, y)$, $x$, $y$ étant deux éléments quelconques de A.

Le diamètre d'un intervalle de $\mathbb{D}$ est la distance de ses extrémités.

Cette notion correspond à celle d'*amplitude* d'un encadrement (rappelons que, si on a choisi comme valeur approchée le centre de l'intervalle d'encadrement, l'incertitude est égale à la moitié de l'amplitude de l'encadrement).

### 2.3. Insuffisance des décimaux.

a) ***Lacunes de nature algébrique.***

Dans $\mathbb{D}$, certaines équations n'ont pas de solutions : $3x = 1$ ; $x^2 = 2$ ; $x^2 = -1$ ; etc.

Cette remarque ne conduit pas à l'introduction de $\mathbb{R}$, mais plutôt à celle de l'ensemble des nombres algébriques ou de certains de ses sous-ensembles (ensemble des rationnels, des réels de la forme $a + b\sqrt{2}$ où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$, des complexes de la forme $a + b\,i$ où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$, etc.).

b) ***Lacunes de nature topologique.***

On appelle suite emboîtée d'intervalles (dans un ensemble totalement ordonné, $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{R}$ par exemple) toute suite $I_0, I_1, \ldots, I_n \ldots$ d'intervalles de cet ensemble telle que

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_{n-1} \supset I_n \supset \ldots$$

Dans $\mathbb{D}$, il existe des suites emboîtées d'intervalles *fermés* dont l'intersection est vide, par exemple :

$$I_0 = [0;\ 1],\quad I_1 = [0{,}3;\ 0{,}4],\quad I_2 = [0{,}33;\ 0{,}34],\quad \ldots,$$
$$I_n = [0{,}333\ldots33;\quad 0{,}333\ldots34]\ (n \text{ chiffres}),\ \ldots$$

On verra ultérieurement (mais pas en Quatrième) que, dans $\mathbb{R}$, cela ne se produit jamais : *toute suite emboîtée d'intervalles fermés de $\mathbb{R}$ a une intersection non vide.*

C'est là que réside la raison profonde pour laquelle on est amené à prolonger $\mathbb{D}$ en un ensemble plus riche qu'on appellera $\mathbb{R}$. Cette différence fondamentale entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{R}$ ne peut pas être énoncée dans toute sa généralité en Quatrième. Mais il ne faudra pas manquer de la faire ressentir à propos des exemples proposés par le programme (recherche de l'inverse et de la racine carrée). Ces exemples, étudiés sous leur simple aspect algébrique, ne constitueraient pas une motivation suffisante à l'introduction des réels.

Ce n'est pas la représentation graphique des décimaux par les points d'une droite qui rend intuitive ces lacunes topologiques de $\mathbb{D}$ : pour mesurer des longueurs, les décimaux (et même souvent les décimaux d'ordre 2 ou 3) sont largement suffisants. Toute motivation de l'introduction des réels basée exclusivement sur des problèmes de mesure (au sens physique) ne peut que donner des idées fausses ou incomplètes. Ce n'est pas une raison pour renoncer aux figures, mais il faut que l'élève sente qu'au moment où on introduit les réels, on fait un nouveau pas dans l'abstraction, dans l'idéalisation (la comparaison avec le dictionnaire signalée plus haut (1.3) n'est pas déplacée ici, car il s'agit d'un dictionnaire imaginaire, d'un dictionnaire idéal).

**2.4. Introduction de l'ensemble ordonné des réels.**

a) ***Suites décimales illimitées.***

En analysant le critère qui permet de décider si un décimal représenté par une suite illimitée de chiffres est inférieur à un autre décimal, on s'aperçoit que, dans le « dictionnaire » des suites illimitées de chiffres, on peut en intercaler de nouvelles telles que

...0 012,325 325 325 ... (période 325)

— (...0 000,024 242 424 ...) (période 24)

...0 000,123 456 789 101 112 ... (suite des naturels écrits en base 10).

Comme dans les suites illimitées introduites au paragraphe 2.1, tous les chiffres situés à gauche d'un certain chiffre sont nuls; mais ici, il peut y avoir, vers la droite, une infinité de chiffres non nuls.

Nous passons sous silence l'énoncé explicite du critère de comparaison de deux suites décimales illimitées et la démonstration du fait que, dans l'ensemble des suites décimales illimitées, la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total.

On peut remarquer qu'entre deux suites décimales illimitées distinctes, on peut en intercaler une infinité d'autres, sauf dans le cas où l'une d'elles représente un décimal

$$\ldots 0\,0\,a_n \ldots a_0, a_{-1} \ldots a_{-p}\,0 \ldots \quad (a_{-p} \neq 0)$$

et où l'autre s'écrit :

$$\ldots 0\,0\,a_n \ldots a_0, a_{-1} \ldots a_{-p+1}\,(a_{-p} - 1)\,999 \ldots \text{ (période 9)}$$

Par exemple, entre ... 01,00 ... et ... 00,999 ..., on ne peut intercaler aucune autre suite décimale illimitée. Nous dirons que deux telles suites sont « *consécutives* ».

b) ***Nombres réels.***

Dans l'ensemble des suites décimales illimitées, on identifie les suites « consécutives ». On obtient ainsi un nouvel ensemble qu'on note $\mathbb{R}$ (ensemble des *réels*).

En somme, un nombre réel est :

— soit une suite décimale illimitée (précédée ou non du signe —) n'ayant pas pour période 0 ni 9,

— soit une paire de suites décimales illimitées consécutives.

Cette paire de suite est identifiée au décimal représenté par l'une d'entre elles : par exemple :

Le réel $\{\ldots 01{,}00 \ldots ; \ldots 00{,}999 \ldots\}$ est identifié au décimal $\ldots 01{,}00 \ldots$ (c'est-à-dire à l'entier 1).

Donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$.

Pour définir la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$, il est commode de convenir qu'on choisira toujours, pour représenter un réel, une suite décimale n'ayant pas pour période 9; la comparaison de deux réels se ramène alors à la comparaison de deux suites décimales illimitées. La relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$ est une relation d'*ordre total*, qui *prolonge* la relation d'ordre dans $\mathbb{D}$.

On peut démontrer simplement que tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient une infinité de décimaux et une infinité de réels non décimaux ($\mathbb{D}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{D}$ sont *denses* dans $\mathbb{R}$).

On peut aussi (mais c'est moins facile) démontrer les deux théorèmes suivants :

(1) Si une suite *emboîtée* d'intervalles de $\mathbb{R}$, *à extrémités décimales* est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un intervalle de la suite dont le diamètre est $\leqslant 10^{-n}$, l'intersection de tous les intervalles de cette suite est un singleton de $\mathbb{R}$.

(2) Toute suite emboîtée d'intervalles fermés de $\mathbb{R}$ a une intersection non vide.

Le théorème (2), qui ne fait intervenir que l'ordre dans $\mathbb{R}$, est un théorème d'existence.

Le théorème (1) permet de démontrer à la fois l'existence et l'unicité d'un réel; il fait intervenir la notion de distance (mais s'agit de la distance de deux décimaux : la distance de deux réels quelconques n'a pas encore été définie).

C'est ce théorème qui sera utilisé (mais peut-être pas de façon explicite dans nos classes) pour définir la somme et le produit de deux réels.

## 2.5. Opérations sur les réels.

### a) *Encadrements canoniques d'un réel.*

Le réel $x = \ldots 02{,}749\ 749\ 749 \ldots$ (période 749) admet pour encadrements :

$$2 \leqslant x \leqslant 3; \qquad 2{,}7 \leqslant x \leqslant 2{,}8; \qquad 2{,}74 \leqslant x \leqslant 2{,}75; \quad \ldots$$

Les intervalles [2; 3], [2,7; 2,8], [2,74; 2,75], ... de $\mathbb{R}$ forment une suite emboîtée vérifiant les conditions du théorème (I) énoncé ci-dessus (§ 2,4). Ils ont pour intersection $\{x\}$.

Il est commode d'appeler « *encadrements canoniques de* x » les encadrements fournis par ces intervalles.

Un décimal admet deux suites d'encadrements canoniques :

$$2 \leqslant 2{,}1 \leqslant 3; \quad 2{,}1 \leqslant 2{,}1 \leqslant 2{,}2; \quad 2{,}10 \leqslant 2{,}1 \leqslant 2{,}11; \ \ldots$$
$$2 \leqslant 2{,}1 \leqslant 3; \quad 2{,}0 \leqslant 2{,}1 \leqslant 2{,}1; \quad 2{,}09 \leqslant 2{,}1 \leqslant 2{,}10; \ \ldots$$

qui correspondent aux deux suites décimales illimitées qui le représentent :

$$2{,}1 = 2{,}100\,00 \ \ldots = 2{,}099\,999 \ \ldots$$

b) ***Définition des opérations dans*** $\mathbb{R}$.

Étant donnés deux réels $x$ et $y$ définis par des suites décimales illimitées, on peut leur associer des encadrements canoniques :

$$(a_0, b_0), \quad (a_1, b_1), \ \ldots, \quad (a_n, b_n) \ \ldots \quad \text{pour } x$$
$$(c_0, d_0), \quad (c_1, d_1), \ \ldots, \quad (c_n, d_n) \ \ldots \quad \text{pour } y.$$

On démontre que les intervalles

$$[a_0 + c_0, \ b_0 + d_0], \ [a_1 + c_1, \ b_1 + d_1], \ \ldots, \ [a_n + c_n, \ b_n + d_n], \ \ldots$$

vérifient les conditions du théorème (1). Leur intersection est un singleton de $\mathbb{R}$, soit $\{z\}$. Par définition, $z$ est la *somme* des réels $x$ et $y$.

Si $x$ et $y$ sont des réels positifs, on démontre que les intervalles

$$[a_0c_0, \ b_0d_0], \ [a_1c_1, \ b_1d_1], \ \ldots, \ [a_nc_n, \ b_nd_n], \ \ldots$$

ont aussi pour intersection un singleton $\{t\}$ de $\mathbb{R}$, et on dit que $t$ est le produit des réels $x$ et $y$.

On définit ensuite le produit de deux réels de signe quelconque par :

$$(-x)\,y = -(xy) = x\,(-y); \quad (-x)\,(-y) = xy,$$

Des démonstrations (assez laborieuses) permettent de montrer que ces deux opérations définissent sur $\mathbb{R}$ une structure de corps, et que la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ est compatible avec ces opérations.

En particulier, on peut théoriquement démontrer à partir de ce qui précède que tout réel non nul est inversible. Si on prend cette propriété comme axiome, ce n'est pas pour des raisons logiques, mais pour des raisons de commodité (la démonstration est difficile).