Bulletin de l'APMEP n°279 - Mai/Juin 1971

Dans l'article ci-dessous notre Collègue indique comment, dans une classe expérimentale, *elle a introduit les réels à partir des décimaux.*

Des décimaux aux réels en classe de quatrième [1]

Magdeleine MOTTE,
Toulon.

Une révision du calcul dans ($\mathbb{D}$, $+$, $\times$) amène naturellement à comparer ($\mathbb{D}$, $+$) et ($\mathbb{D}$, $\times$) et à chercher les éléments qui ont un inverse. Soit I leur ensemble; tout élément de I s'écrit $2^a.5^b.(0,1)^n$, $(a, b, n) \in \mathbb{N}^3$; on peut l'admettre, ou le prouver en admettant l'unicité de la décomposition d'un naturel en produit de facteurs premiers. Des exercices de calcul sur des décimaux écrits ainsi, ou bien $m.10^n$ ou $p.(0,1)^q$, les exposants étant toujours des naturels, préparent le calcul sur les puissances de 10.

Chemin faisant on trouve de petites déductions intéressantes (car le besoin s'en fait sentir) et faciles à formaliser : le produit de deux décimaux inversibles est inversible; un nombre $m.(0,1)^n$, $(m, n) \in \mathbb{N}_0^2$, est inversible si et seulement si m est inversible.

On cherche la représentation cartésienne de la fonction de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}$: « x a pour inverse y ». Des élèves ont tracé l'hyperbole; les autres protestent : 3, 6, 7, 9 ... n'ont pas d'inverse; il n'y a pas de point sur telle et telle droite...

On ne sait trop si on a des points isolés ou une « courbe trouée » mais sur ceci on est d'accord : il manque une infinité de points.

Simultanément on continue le travail amorcé en Cinquième, l'étude d'autres tables d'opération, et on dégage la notion de groupe dont on a maintenant de nombreux exemples : ($\mathbb{Z}$, $+$), ($\mathbb{D}$, $+$), (I, $\times$), des groupes ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $+$) et des groupes de permutations.

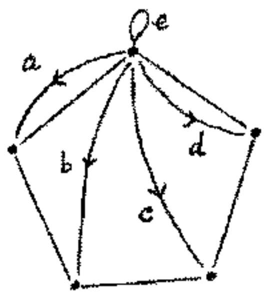
On précise et distingue les conventions — écriture additive, multiplicative — et le vocabulaire : multiple (puissance) d'un élément d'un groupe. Sur un exemple fini on dégage le calcul sur les puissances d'un élément d'un groupe. On généralise : pour tout groupe (G, $*$) : ($\forall a$, $a \in$ G) ($\forall n$, $n \in \mathbb{N}$) : $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$. On introduit les exposants négatifs et on admet, ou prouve, suivant le temps dont on dispose et le niveau de la classe, l'extension aux exposants négatifs, des règles de calcul.

(1) Classe expérimentale du Lycée Bonaparte : 1969-70.

On fait alors du calcul numérique utilisant les puissances, positives ou négatives, de 2, 5, 10.

Si on a pu, pendant la période qui vient d'être décrite, obtenir, dans le cadre des exercices et de l'exploration géométrique prolongeant celle amorcée en Cinquième, les groupes de rotations des polygones réguliers, $(G_n, \circ)$, on obtiendra les classes de $\mathbb{Z}$, modulo 5 par exemple, comme classes d'exposants équivalents :

$$a = a^1 = a^6 = a^{11} = \dots = d^{-1} = a^{-4} = a^{-9} = \dots$$
$$b = a^2 = a^7 = a^{12} = \dots = c^{-1} = a^{-3} = a^{-8} = \dots$$



Les permutations a, b, c, d, e pourront être codées par ces classes et on obtiendra $(Z/_{5Z}, +)$ comme traduction en notation additive de $(G_5, \circ)$.

La table de $(Z/_{5Z}, \times)$ est suggérée par la table de la loi externe « x $(x \in G_5)$ élevé à l'exposant y $(y \in Z)$ donne z $(z \in G_5)$ ».

La résolution d'équations dans $(Z/_{nZ}, +)$ et $(Z/_{nZ}, \times)$ — n donné — amène naturellement les élèves au calcul dans les groupes et les anneaux.

C'est le moment de revenir à $\mathbb{D}$ pour en montrer simultanément l'insuffisance théorique et l'adéquation à tous les problèmes pratiques. Nous l'avons fait à travers l'étude d'une douzaine de fiches dont nous reproduisons ici les quatre premières et la dernière, résumant les autres au passage.

1. — Première fiche : Défauts et mérites de $\mathbb{D}$.

Résous sur $\mathbb{D}$ les équations :

$2.x = 7$	$(-3).x = 6$	$3.x = -4$	$0.x = -2$
$-0,25.x = 3$	$4.x = -9$	$x.(1,25) = -11$	$7.x = -48$
$0,7\ .x = 0,42$	$7.x = 24$	$0,1.x = 0,28$	$13.x = 0$

Dans quels cas l'équation $ax = b$ sur $\mathbb{D}$ a-t-elle une et une seule solution ?

2. — Quelques problèmes concrets.

2.1. Soit à partager un mètre de ruban en trois rubans destinés au même usage.

Si le mètre est l'unité, et x la mesure des petits rubans, on doit avoir $3x = 1$. Nous savons que cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{D}$. Il serait pourtant absurde de dire que le partage demandé est impossible et le ruban inutilisable!

Si $x = 0{,}3$, $3x = 0{,}9$ et on perd 1 dm de ruban;

Si $x = 0{,}33$, $3x = 0{,}99$ - - - 1 cm - -

Le partage en trois rubans de 33 cm ou deux rubans de 33 cm et un de 34 cm résout notre problème.

2.2. Considérons le problème d'ajustage suivant : il s'agit de préparer trois tringles en acier de façon que :

(1) leurs longueurs diffèrent de moins de 1 mm;

(2) l'écart entre la somme de leurs longueurs et le mètre soit inférieur à 1 mm.

Quelle solution proposerais-tu sachant que tu aurais à ta disposition un instrument permettant de mesurer avec une précision de 0,1 mm?

3. — Deuxième fiche.

Nous avons vu, en étudiant et représentant graphiquement la fonction de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}$: $x \mapsto x^2$ que le graphique ne possédait pas de points d'ordonnée 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11 .... Rappelons et explicitons notre raisonnement :

— si un de ces nombres était le carré d'un nombre entier nous le verrions sur sa décomposition en produit de facteurs primaires : celle-ci aurait des exposants pairs :

$$n^2 = (2^a.3^b.5^c \ \ldots \ p^x)^2 = 2^{2a}.3^{2b}.5^{2c} \ \ldots \ p^{2x}.$$

Or 2, 3, 5, 7, 11 sont premiers et $6 = 2^1 \times 3^1$, $8 = 2^3$.

— si un de ces nombres était le carré d'un décimal à virgule il serait lui-même un décimal à virgule.

Autrement dit les équations $x^2 = 2$, $x^2 = 3$, $x^2 = 5$, ..., $x^2 = 11$ n'ont pas de solution dans $\mathbb{D}$.

Par contre, rappelons que $x^2 = 1{,}44$ a deux solutions : $(-1{,}2)$ et $1{,}2$.

4. — Problèmes concrets.

4.1. Mètre en main il t'est facile de te rendre compte de l'étendue que représente l'unité appelée mètre carré; facile aussi de te rendre compte de l'étendue représentée par 2 mètres carrés dès lors que tu prends un domaine rectangulaire (2×1 ou $4 \times 0{,}5$ ou $1{,}25 \times 1{,}6$). Mais si tu veux te représenter un *carré* de 2 m², que fais-tu?

4.2. L'an dernier tu as construit un cube en bristol de 8 cm (0,8 dm) d'arête. Calcule son volume en dm^3, en cm^3, dans le but de le comparer au litre ($1\ l = 1\ dm^3$).

Aide-toi de ce résultat pour me dire quelle mesure je dois indiquer aux élèves pour l'arête pour que le volume soit aussi voisin que possible de 0,5 dm^3. N'oublie pas que je ne puis pas utiliser le dixième de millimètre parce que, *même si* nos instruments permettaient de distinguer deux longueurs diffèrent de 0,1 mm cela ne nous serait d'aucune utilité puisque nos traits de crayon ont de 0,2 mm à 1 mm d'épaisseur et que nos découpages et collages aggravent l'imprécision.

Mais si un papa, ajusteur à l'arsenal, fait pour sa fille un cube en métal il peut s'imposer une arête au dixième de millimètre. Quelle sera cette arête pour que le volume soit aussi voisin que possible de 0,5 dm^3?

5. — Troisième fiche.

Dans les problèmes pratiques précédents nous ne pouvons pas dire que nous obtenons des « valeurs approchées des solutions » puisque celles-ci n'existent pas dans $\mathbb{D}$. Il est plus correct de parler de « solutions approchées ».

Observons ce que nous faisons :

Problème du ruban; nous remplaçons la résolution de l'équation $3.x = 1$ par la résolution de deux inéquations :

$$1 - a \leqslant 3x < 1$$

— où a dépend de nos exigences — précisées par la condition supplémentaire « je n'ai que faire d'un nombre avec 3 chiffres décimaux » autrement dit « je cherche un nombre ayant au plus 2 chiffres décimaux ». « Ne pas perdre plus de 1 cm de ruban » est traduit par :

$$a = 0{,}01$$

Le problème est alors exprimé par

$$\begin{cases} 1 - 0{,}01 \leqslant 3x < 1 \\ x \in \mathbb{D}_2 \text{ (1)} \end{cases}$$

Il a pour solution : 0,33.

Le problème des tiges d'acier; il est exprimé par

$$\begin{cases} 1 - 0{,}001 < 3x < 1 + 0{,}001 \\ x \in \mathrm{D}_4 \end{cases}$$

(1) $\mathbb{D}_2 = \{d \mid d \in \mathbb{D} \wedge 10^2 d \in \mathbb{Z}\}$.

si l'unité est le mètre et si l'on impose la condition supplémentaire « trois tiges de même longueur ».

Le problème du cube en bristol; il est exprimé par :

$$\begin{cases} |x^3 - 500| \text{ minimum, l'unité étant le centimètre;} \\ x \in \mathbb{D}_1 \end{cases}$$

il a pour solution : 7,9.

Le problème du cube en métal; il est exprimé, avec la même unité par $(|x^3 - 500|$ minimum; $x \in \mathbb{D}_2)$; il a pour solution : 7,94.

On calcule, en effet : $7{,}93^3 \simeq 498{,}6$ et $7{,}94^3 \simeq 500{,}5$; on a donc

$$|7{,}94^3 - 500| < |7{,}93^3 - 500|.$$

7,93 et 7,94 sont *des* solutions approchées — la première par défaut, la seconde par excès — du problème théorique résumé par $x^3 = 500$; 7,9 et 8 sont aussi *des* solutions approchées de ce problème.

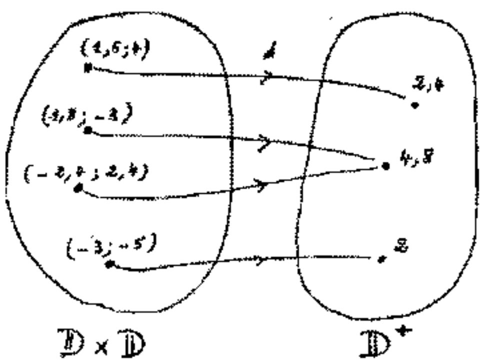
6. — Quatrième fiche.

Pour distinguer ces deux couples de solutions approchées il est commode de considérer les nombres positifs :

$$|7{,}93 - 7{,}94| = |7{,}94 - 7{,}93| = 0{,}01 = 10^{-2}$$
$$|7{,}9 - 8| = |8 - 7{,}9| = 0{,}1 = 10^{-1}$$

On les appelle ***distances*** des couples (7,93; 7,94) et (7,9; 8).

Définition. — On appelle ***distance,*** l'application de d de $\mathbb{D}^2$ dans $\mathbb{D}^+$ définie par : $d(x\,;y) = |x - y|$.



Le mot « distance » désigne à la fois :

— *l'application d.*

— *les images dans cette application.*

Avec ce vocabulaire nous pouvons dire : 7,9 et 8 sont les solutions approchées, par défaut et par excès, dont la distance est un dixième.

Comment t'expliques-tu le nom de « distance » choisi pour cette application?

Ex. 1. Prépare un tableau cartésien de A × A, :

$$A = [-5{,}8;\ -4{,}7;\ -3{,}1;\ -2;\ -0{,}7;\ 0;\ 1;\ 3{,}5;\ 5]$$

et inscrit dans la case repérée par le couple $(x; y)$ sa distance.

Tu peux aussi utiliser un repère cartésien et inscrire, à côté du point image du couple $(x; y)$ la distance de ce couple. Dans ce cas des recherches intéressantes se présentent.

Ex. 2. Calcule $d(x; x)$; compare $d(x; y)$ et $d(y; x)$. Tu sais $d(a; b) = 0$ que peux-tu en déduire?

Ex. 3. Compare $d(x; y) + d(y; z)$ à $d(x; z)$ pour plusieurs triples (x, y, z). Qu'observes-tu? Essaie d'établir la validité de ton observation pour tout triple.

7. — Cinquième et sixième fiches.

(5ᵉ fiche) { Cadre-résumé des propriétés de *d*.
Deux autres exercices.

(6ᵉ fiche). L'ensemble des solutions de l'équation $3x = 1$ est l'intersection des ensembles de solutions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des inéquations sur $\mathbb{D}$:

$$(A)\ 3x \leqslant 1, \qquad (B)\ 3x \geqslant 1.$$

Si nous ignorions que cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{D}$ nous pourrions chercher *des* solutions de (A), *des* solutions de (B), en cherchant à diminuer la distance d'un élément de $\mathcal{A}$ à un élément de $\mathcal{B}$.

Exerçons-nous sur l'équation : $(\mathbb{D})$, $x^2 + x = 3$.

... [C'est dans cette fiche qu'on fait remarquer qu'on n'apprécie la précision d'une solution par défaut qu'en l'associant à une solution par excès; que la précision est exprimée par la distance du couple ainsi formé.]

8. — Septième, huitième et neuvième fiches.

(7ᵉ fiche). Retour à l'équation : $(\mathbb{D})$, $3x = 1$; suite croissante (décroissante) des solutions approchées par défaut (par excès). On range les uns au-dessus des autres les nombres dont la distance est une unité décimale et on encadre ces couples. Ne gardant que les décimaux encadrés on obtient de nouvelles suites :

s_1 0,3 0,33 0,333 0,333 3 ...

s_2 0,4 0,34 0,334 0,333 4 ...

Introduction du vocabulaire : quotient approché par défaut (excès) à un dixième (un centième, ...) de 1 par 3.

Le nombre 0,33 est le plus grand élément de $\boldsymbol{D}_2$ dont le triple est inférieur à 1.

(7e et 8e fiches). On retrouve la technique de la division étudiée à l'école primaire.

Il y aurait intérêt à repousser cette étude à plus tard et à passer directement à la 9e fiche ; sinon certains élèves vont oublier la définition des quotients approchés par défaut (excès) à 10^n près et son lien avec les encadrements par des décimaux dont la distance est une unité décimale, pour ne retenir qu'un mécanisme.

Cette remarque m'est suggérée par une constatation un peu décevante faite quelques mois plus tard chez près de la moitié des élèves qui continuent à indiquer correctement un quotient approché par défaut à 10^n près mais :

— buttent sur le quotient approché par excès à 10^n près,

— croient pouvoir déduire la racine carrée approchée par défaut à un centième d'un encadrement comme :

$$1,95^2 \leqslant a < 1,97^2$$

(9e fiche). Remarques : la suite s_2 est parfaitement connue dès que s_1 est connue.

— s_1 peut être résumée par l'écriture 0,333 ... ou 0,*3* ... appelée ...

— Exercices : donner les suites s_1 et s_2 pour les solutions approchées des équations : $0,7.x = 0,48$ $64.x = 7$.

— Suites s_1 et s_2 pour $(\boldsymbol{D})$: $x^2 = 2$; écriture qui les résume; vocabulaire : racine carrée; racine carrée approchée par défaut (par excès) à 10^n près; symboles $\sqrt{A}$, $A^{\frac{1}{2}}$.

9. — Dixième fiche.

Exercices : recherche de racines carrées et de racines carrées approchées. Usage de la table des carrés de 100 à 10 000.

Retour sur le problème du cube : racine cubique.

10. — Onzième fiche.

Problème. La recherche de valeurs approchées d'un nombre a a donné une suite s_1 et une suite s_2 résumées par la suite décimale illimitée : 10, 271 1 . . . ; la recherche d'un nombre b a donné des suites s'_1 et s'_2 résumées par la suite décimale illimitée périodique : 0,7 . . . . Peux-tu écrire des inégalités vérifiées par le nombre $(a + b)$? Dans quelle information peux-tu les résumer?

[Remarque. Les élèves connaissaient les propriétés de l'ordre sur $\mathbb{D}$.]

11. — Si, dans l'exercice précédent, on remplace $(a + b)$ par $(a - b)$ les calculs sont un peu plus pénibles sans machine. On trouve :

7,14 . . .	$< a.b <$ 8,24	gardons	7 $< a.b <$ 9
7,907 9	$< a.b <$ 8,018 4	gardons	7,9 $< a.b <$ 8,1
7,980. . .	$< a.b <$ 7,991. . .	gardons	7,98 $< a.b <$ 8,00
7,98783. . .	$< a.b. <$ 7,98893. . .	gardons	7,987 $< a.b <$ 7,989

Nous avons obtenu des encadrements par des décimaux de distances 2, 2.10^{-1}, 2.10^{-2}, 2.10^{-3}. Nous pouvons cependant en déduire :

7 $< a.b <$ 8 (avec la première et la troisième ligne)

7,9 $< a.b <$ 8,0 (avec la deuxième et la troisième ligne)

7,98 $< a.b <$ 7,99 (avec la troisième et la quatrième ligne)

informations résumées par le décimal illimité : 7,98 . . .

12. — Les valeurs approchées par défaut et par excès d'un nombre d sont données par la suite décimale illimitée 1,3 . . . . Examine les encadrements de $4d$, puis de $3d$.

14. — Les valeurs approchées par défaut et par excès d'un nombre a sont données par la suite décimale illimitée 2,339 . . . . Compare ce nombre a au nombre décimal $b = 2,34$.

***

Remarque. — Quelques autres exercices n'exigeant pas de calculs fastidieux ont été donnés en devoirs; il y aurait eu intérêt à multiplier des exercices comme l'exercice traité du paragraphe 12, après l'introduction des nombres réels pour éviter l'ambiguïté qui s'introduit dans cette dernière fiche, sur l'existence et la nature de ces nombres a et b.

Bien entendu l'étude de ces onze fiches prend un peu de temps; mais on sent bien qu'il s'agit là d'une étape essentielle. Chemin faisant le désir de postuler l'existence d'un inverse pour tout décimal et d'une racine carrée pour tout décimal positif se fait de plus en plus sentir et le professeur n'étonne personne en commençant à parler d'un ensemble de nombres dont l'existence est admise par les mathématiciens pour satisfaire à ces exigences.

C'est pourquoi l'ambiguïté de la fiche 11 n'est pas gênante.

Peu après trois fiches présentent l'ensemble des nombres réels sans dépasser les exigences des élèves :

— $\mathbb{R} \supset \mathbb{D}$; $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$; $\{0\} = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-$.

— Addition et multiplication prolongent celles des décimaux en faisant de $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_0, \times)$ des groupes abéliens et en conservant la distributivité.

— Existence d'une et une seule racine carrée pour tout réel positif.

— Extension des définitions : $a > b \Leftrightarrow (a - b) \in \mathbb{D}^+$.

— Définition de la valeur absolue : $|a| = \text{Max}\ (a ; -a)$.

***

Remarques sur l'étude des onze fiches.

L'étude des quatre premières a été l'objet d'un travail d'équipes de trois élèves, mené à la demande des élèves d'une manière intensive, sans dispersion sur d'autres sujets, pendant les quatre heures hebdomadaires. Elle a été très animée. Au départ j'ai dû répondre à beaucoup de questions (hésitations sur le système métrique en particulier) mais le travail demandé a été bien compris et les erreurs d'interprétation peu nombreuses.

Ensuite le travail s'est progressivement individualisé : travail par table de deux, puis travail individuel sur les dernières fiches pour me permettre de vérifier l'assimilation.

Je suis convaincue qu'avec cette approche nous avons employé notre temps de façon beaucoup plus profitable qu'avec une construction des rationnels. Il est clair que le temps dont nous disposons impose un choix : en choisissant de construire $\mathbb{Q}$ on remet à plus tard l'introduction du calcul approché et les prémices de l'analyse (« Tôt et progressivement ») et on laisse dans l'ombre la notion de réel, ou bien on la dissimule sous celle des racines carrées.

Nous avons l'avantage de traiter une seule fois le calcul sur les quotients, très rapidement et sans aucune difficulté. Bien entendu le calcul numérique fait alors place à deux sortes d'exercices : ceux où la réduction au même dénominateur est naturelle; ceux où c'est le recours à une valeur approchée décimale. Nos collègues physiciens devraient assez rapidement s'apercevoir d'un changement. En 1974 il sera déjà intéressant de les entendre; à condition qu'ils n'oublient pas que le premier cycle doit rester le lieu où on aborde les notions, techniques et savoir-faire de base, sans prétendre rien achever.