# Nombres décimaux

Véronique GAUTHRON,
(*I.R.E.M. de Paris*).

Les propriétés de $\mathbb{Z}$ qui en font un anneau commutatif totalement ordonné (voir appendice) ainsi que la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ sont supposées connues (cf. Programme de Cinquième).

## I. — Le groupe G des puissances de 10.

**Rappels** : si $x$ et $n$ sont des nombres entiers positifs, on connaît la notation

$$x^n = \underbrace{x \times x \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$$

et on voit facilement que

$$\forall x \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall n' \in \mathbb{N}^*, \; x^n \times x^{n'} = x^{n+n'} \qquad (1)$$

on convient de poser

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, \; x^0 = 1$$

Cette convention est compatible avec les relations (1).

### Définition des puissances de 10.

Dans le cas particulier $x = 10$ (base de la numération), on va définir les « nombres » $10^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ généralisant les entiers $10^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble considéré est celui des symboles $10^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$ ; on définit sur cet ensemble une loi de composition interne, notée $\times$, de la façon suivante :

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m} \qquad (n \in \mathbb{Z}, \; m \in \mathbb{Z})$$

Si $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, nous retrouvons les relations (1), ce qui nous permet d'identifier, pour $n \geqslant 0$, le symbole $10^n$ avec l'entier $10^n$ défini précédemment, et pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, la loi $\times$ avec la multiplication entre entiers.

*Notation :* si $n \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$, alors $n = -n'$, avec $n' \in \mathbb{N}^*$.

On écrit souvent $\frac{1}{10^{n'}}$ au lieu de $10^n$.

**La loi qu'on vient de définir est une loi de groupe commutatif.**

Cette propriété va découler de ce que $\mathbb{Z}$ est un groupe commutatif pour l'addition :

— La loi est commutative :

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{Z}\quad 10^m \times 10^n = 10^{m+n}$$

et

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m}$$

or dans $\mathbb{Z}$, $m + n = n + m$

— La loi est associative :

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \forall p \in \mathbb{Z}, \text{ alors}$$
$$(10^m \times 10^n) \times 10^p = 10^{(m+n)+p}$$
$$10^m \times (10^n \times 10^p) = 10^{m+(n+p)}$$

or dans $\mathbb{Z}$, $(m + n) + p = m + (n + p)$.

— L'élément $10^0 = 1$ est élément neutre :

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ 1 \times 10^m = 10^{0+m} = 10^m$$

— Tout élément a un inverse :

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on connaît l'élément $-n \in \mathbb{Z}$ tel que $n + (-n) = 0$ donc $10^n \times 10^{-n} = 10^0 = 1$.

$10^{-n}$ est l'inverse de $10^n$ pour la loi $\times$.

Nous appellerons G le groupe des puissances de 10.

*Remarque :* nous avons ainsi défini un isomorphisme de groupe entre $\mathbb{Z}$ muni de l'addition et le groupe G, à savoir l'application $\varphi$ de $\mathbb{Z}$ dans G défini par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \varphi(n) = 10^n \in G$$

Cette application vérifie en effet évidemment :

$$\varphi(m + n) = \varphi(m) \times \varphi(n)$$

et elle est bijective d'après la définition même de G.

**Ordre total sur le groupe G.**

On connaît l'ordre naturel sur $\mathbb{Z}$;

On définit une relation $<$ dans G par $10^m < 10^n \Leftrightarrow m < n$ dans $\mathbb{Z}$.

— C'est un ordre total : cela découle de la structure d'ordre total de $\mathbb{Z}$ :

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $10^n \leqslant 10^n$ car $n \leqslant n$

$\forall m \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(10^m \geqslant 10^n$ et $10^n \leqslant 10^m) \Rightarrow 10^m = 10^n$ (car on voit qu'alors $m = n$)

$\forall m, n, p \in \mathbb{Z}$, $(10^m \leqslant 10^n$ et $10^n \leqslant 10^p) \Rightarrow 10^m \leqslant 10^p$.

— Cet ordre est compatible avec la structure de groupe de G.

En effet, si $10^m \leqslant 10^p$, cela exprime que $m \leqslant p$, donc
$\forall n \in \mathbb{Z}$, $m + n$, $\leqslant p + n$ (structure de groupe ordonné de $\mathbb{Z}$);
c'est-à-dire $10^{m+n} \leqslant 10^{p+n}$.

Conséquences directes :

$\forall m', m, n', n \in \mathbb{Z}$, $(10^m \leqslant 10^n$ et $10^{m'} \leqslant 10^{n'}) \Rightarrow 10^{m+m'} \leqslant 10^{n+n'}$

— Lien avec l'ordre de $\mathbb{Z}$.

Si $m$ et $n$ sont des entiers positifs, nous avons identifié les éléments $10^m$ et $10^n$ de G aux entiers $10^m$ et $10^n$.

La relation d'ordre que nous avons définie est compatible avec cette identification, puisque, si $m, n \in \mathbb{Z}$ et $m \leqslant n$, les entiers $10^m$ et $10^n$ sont tels que $10^m \leqslant 10^n$.

Cela découle de ce que $\mathbb{Z}$ est un anneau ordonné, c'est-à-dire que la structure de groupe ordonné de $\mathbb{Z}$ est compatible avec la multiplication (voir appendice).

## II. — Les nombres $a.10^p$ ($a \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$).

**Rappels** : si $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$, on connaît l'entier $a \times 10^p$. L'écriture d'un entier sous la forme $a.10^p$ n'est pas unique. En effet, considérons deux nombres entiers écrits sous la forme $a.10^p$ et $b.10^q$; supposons par exemple que $p \leqslant q$, alors ces deux entiers sont égaux si et seulement si $b = a.10^{p-q}$.

**Construction** :

On considère l'ensemble des symboles $a \times 10^p$ ($a \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$).

Cela revient en fait à considérer l'ensemble des couples $(a, p)$, mais l'écriture $a \times 10^p$ est plus parlante.

Munissons cet ensemble de la relation suivante :

$$a.10^p \,\mathcal{R}\, b.10^q \Leftrightarrow (p \geqslant q \text{ et } b = a.10^{p-q}) \text{ ou } (q \geqslant p \text{ et } a = b.10^{q-p}).$$

*La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence :*

Seule la transivité n'est pas tout à fait évidente :

Si $a.10^p \,\mathcal{R}\, b.10^q$ et $b.10^q \,\mathcal{R}\, c.10^r$, nous devons examiner les six cas possibles suivant l'ordre des trois nombres $p$, $q$, $r$.

Supposons par exemple $q < p < r$

alors $b = a.10^{p-q}$ et $b = c.10^{r-q}$

or $p - q < r - q$

d'où $c = a.10^{r-p}$ et $a.10^p \mathcal{R}\, c.10^r$.

Les autres cas se traitent de la même façon.

*L'ensemble des classes d'équivalence pour la relation* $\mathcal{R}$ *s'appelle ensemble des nombres décimaux, et se note* $\mathbb{D}$.

On notera un élément de l'ensemble des décimaux de la même façon qu'un de ses représentants, soit $a.10^p$, ce qui permet d'écrire :

$$a.10^p = b.10^q \Leftrightarrow (p \geqslant q \text{ et } b = a.10^{p-q}) \text{ ou } (q \geqslant p \text{ et } a = b.10^{q-p})$$

Si $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$, l'élément $a.10^p$ de $\mathbb{D}$ sera identifié avec l'entier $a \times 10^p$.

Si $a = 1$ et $p \in \mathbb{Z}$, l'élément $1.10^p$ de $\mathbb{D}$ sera identifié avec l'élément $10^p$ de G.

Nous allons maintenant munir l'ensemble $\mathbb{D}$ d'une structure d'anneau commutatif totalement ordonné.

**Addition.**

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$, la distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{Z}$ nous permet d'écrire l'égalité suivante entre éléments de $\mathbb{Z}$ :

$$a.10^p + b.10^p = (a + b)\ 10^p$$

Nous sommes conduits à poser dans $\mathbb{D}$, pour $a, b, p \in \mathbb{Z}$ :

$$a.10^p + b.10^p = (a + b)\ 10^p \qquad (2)$$

Soient maintenant deux éléments quelconques de $\mathbb{D}$, $a.10^p$ et $b.10^q$

On a par exemple $p < q$

alors $b.10^q = (b.10^{q-p})\ 10^p$

et on a :

$$a.10^p + b.10^q = a.10^p + (b.10^{q-p})\ 10^p = (a + b.10^{q-p})\ 10^p$$

Il faut montrer que le résultat ne dépend pas du représentant choisi : il suffit de le vérifier sur la relation (2) :

si $a.10^p = a'.10^{p'}$

$b.10^p = b'.10^{p'}$ supposons par exemple $p \geqslant p'$

alors $a' = a.10^{p-p'}$

$b' = b.10^{p-p'}$

donc $(a' + b')\ 10^{p'} = (a + b)\ 10^p$.

**L'addition fait de $\mathbb{D}$ un groupe commutatif :**

*Associativité :* elle découle de l'associativité dans $\mathbb{Z}$ ; en effet, trois éléments quelconques de $\mathbb{D}$ peuvent s'écrire : $a.10^p$, $b.10^p$ et $c.10^p$ (avec le même $p$), et on a bien :

$$(a.10^p + b.10^p) + c.10^p = a.10^p + (b.10^p + c.10^p) = (a + b + c)\ 10^p$$

*Commutativité :* de même :

$$a.10^p + b.10^p = b.10^p + a.10^p = (a + b)\ 10^p$$

car, dans $\mathbb{Z}$, $a + b = b + a$.

L'élément $0 = 0.10^p$ ($p$ quelconque) est élément neutre car

$$0 + a.10^p = (0 + a).10^p = a.10^p$$

*Symétrique :*

L'élément $(-a).10^p$ est le symétrique de $a.10^p$

car $$a.10^p + (-a).10^p = 0.10^p = 0.$$

**Multiplication.**

Si $(a, b) \in \mathbb{Z}$ et $p\ q \in \mathbb{N}$, la commutativité de la multiplication définie dans $\mathbb{Z}$ fait que :

$$a.10^p \times b.10^q = (a \times b).10^{p+q}$$

Nous définirons donc une multiplication dans $\mathbb{D}$ par :

$$a,\ b,\ p,\ q \in \mathbb{Z} \qquad a.10^p \times b.10^q = (a \times b).10^{p+q}$$

Montrons que le résultat ne dépend pas des représentants choisis.

Si $$a.10^p = a'.10^{p'}$$
$$b.10^q = b'.10^{q'}$$

avec, par exemple $p > p'$ et $q < q'$

alors $$a' = a.10^{p-p'} \qquad b = b'.10^{q'-q}$$

et $$a\ b.10^{p+q} = a\ b'.10^{p+q'} = (a.10^{p-p'})\ b'.10^{p'+q'} = a'\ b'.10^{p'+q'}$$

Remarquons que si $a = b = 1$, on retrouve bien la multiplication qu'on avait définie dans le groupe G.

*L'associativité et la commutativité de la multiplication dans* $\mathbb{D}$ découlent des propriétés analogues de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}$ (vérification immédiate).

*Distributivité par rapport à l'addition :*

$$a.10^p \times (b.10^q + c.10^q) = a.10^p \times (b + c)\ 10^q = a\,(b + c)\ 10^{p+q}$$

et $$a.10^p \times b.10^q + a.10^p \times c.10^q = ab.10^{p+q} + ac.10^{p+q}$$
$$= (ab + ac).10^{p+q}$$

La distributivité dans $\mathbb{D}$ découle alors de celle dans $\mathbb{Z}$.

**Relation d'ordre sur $\mathbb{D}$.**

Comme on a vu que deux éléments quelconques de $\mathbb{D}$ peuvent s'écrire $a.10^p$ et $b.10^p$ (avec le même $p$), il suffit de pouvoir comparer deux tels éléments, et de montrer que la structure ainsi définie est compatible avec l'égalité $a.10^p = a'.10^{p'}$.

Or, si $a, b \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$, on remarque que dans l'ordre naturel de $\mathbb{Z}$, on a :

$$a.10^p \leqslant b.10^p \Leftrightarrow a \leqslant b \qquad (3)$$

Nous sommes conduit à poser, pour tout $a, b, p \in \mathbb{Z}$,

$$a.10^p \leqslant b.10^p \Leftrightarrow a \leqslant b$$

*Compatibilité :*

Si $\qquad a.10^p = a'.10^{p'}$

et $\qquad b.10^p = b'.10^{p'}$

avec par exemple $p \leqslant p'$, alors $a = a'.10^{p'-p}$ et $b = b'.10^{p'-p}$ et la relation (3) montre que $a \leqslant b \Leftrightarrow a' \leqslant b'$.

Le fait que la relation ainsi définie sur $\mathbb{D}$ est une relation d'ordre résulte sans difficulté de ce que la relation $a \leqslant b$ est un ordre sur $\mathbb{Z}$.

Montrons par exemple l'antisymétrie :

si $\quad a.10^p \leqslant b.10^p$ et $b.10^p \leqslant a.10^p$, cela veut dire :

$\quad a \leqslant b$ et $b \leqslant a$ (ordre dans $\mathbb{Z}$)

d'où $\quad a = b$ (antisymétrie de l'ordre dans $\mathbb{Z}$)

d'où $\quad a.10^p = b.10^p$ (égalité dans $\mathbb{D}$).

L'ordre est total puisqu'on sait comparer deux éléments quelconques de $\mathbb{D}$.

Si $p \in \mathbb{N}$, les éléments $a.10^p$ et $b.10^p$ ont été identifiés avec des éléments de $\mathbb{Z}$ ; dans ce cas, l'ordre dans $\mathbb{D}$ est le même que l'ordre dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que :

$a.10^p \leqslant b.10^p$ d'après l'ordre de $\mathbb{D} \Leftrightarrow a.10^p \leqslant b.10^p$ d'après l'ordre de $\mathbb{Z}$ ;

D'autre part, deux éléments de la forme $1.10^p$ et $1.10^q$ de $\mathbb{D}$ ont été identifiés avec les éléments $10^p$ et $10^q$ de G.

Or $10^p \leqslant 10^q$ d'après l'ordre de $G \Leftrightarrow p \leqslant q$

mais alors $\quad 1.10^q = (10^{q-p})\ 10^p$ (égalité dans $\mathbb{D}$)

et comme $\quad 10^{q-p} \geqslant 1$ (ordre de $\mathbb{Z}$), cela équivaut à

$\quad 1.10^p \leqslant 1.10^q$ d'après l'ordre $\mathbb{D}$ ;

donc $1.10^p \leqslant 1.10^q$ (d'après l'ordre de $\mathbb{D}$) $\Leftrightarrow 10^p \leqslant 10^q$ (d'après l'ordre de G).

Remarquons enfin que, si $a.10^p \in \mathbb{D}$, alors

$$a.10^p \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant 0$$

**Lien de l'ordre avec les opérations sur $\mathbb{D}$.**

(1) Si $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont des éléments de $\mathbb{D}$, on peut les écrire :

$$\alpha = a.10^p \qquad \beta = b.10^p \qquad \gamma = c.10^p$$

$$\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow a \leqslant b$$

or $\quad a \leqslant b \Leftrightarrow a + c \leqslant b + c$ (ordre de $\mathbb{Z}$)

donc

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{D}, \qquad \alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$$

On en déduit que :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{D},$$

$$(\alpha \leqslant \beta \quad \text{et} \quad \gamma \leqslant \delta) \Leftrightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \delta$$

(2) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$ et $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$

alors on peut écrire $\quad \alpha = a.10^p$ avec $a \geqslant 0$

$\beta = b.10^p$ avec $b \geqslant 0$

donc $a\,b \geqslant 0$ d'après les propriétés de l'ordre de $\mathbb{Z}$ finalement

$$\forall \alpha \in \mathbb{D}, \qquad \forall \beta \in \mathbb{D}, \qquad (\alpha \geqslant 0 \text{ et } \beta \geqslant 0) \Rightarrow \alpha\beta \geqslant 0$$

On en déduit que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{D} \ \forall \beta \in \mathbb{D} \ \forall \gamma \in \mathbb{D}, \quad (\alpha \geqslant 0 \text{ et } \beta \geqslant \gamma) \Rightarrow \alpha\beta \geqslant \alpha\gamma$$

en effet, $\beta \geqslant \alpha \Rightarrow \beta - \alpha \geqslant 0$, d'après (4),
donc $\alpha(\beta - \gamma) \geqslant 0$ d'après (5), d'où $\alpha\beta \geqslant \alpha\gamma$.

*Remarque :* si $\alpha \leqslant 0$ et $\beta \geqslant \alpha$, alors $\alpha\beta \leqslant \alpha\gamma$.
En effet, $(-\alpha)$ est $\geqslant 0$, et on utilise la formule (6).

**Valeur absolue.**

On connaît l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$

$$a \in \mathbb{Z} \mapsto |a| \in \mathbb{N} \text{ (où } |a| = \sup(a, -a))$$

On définit de même une application de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}^+$ (c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathbb{D}$ qui sont positifs ou nuls) de la façon suivante :

si $\qquad \alpha \in \mathbb{D}$ on écrit $\alpha = a.10^p$

et on pose $\qquad |\alpha| = |a|\ 10^p$.

*Compatibilité :*

Si $\alpha = a.10^p = a'.10^{p'}$ alors par exemple $a = a'.10^{p'-p}$

$a$ et $a'$ sont des entiers de même signe donc $|a| = |a'|\ 10^{p'-p}$
et finalement $|a|\ 10^p = |a'|\ 10^{p'}$.

L'application $\alpha \to |\alpha|$ a les propriétés d'une valeur absolue :

* $\forall \alpha \in \mathbb{D}$, $|\alpha| \geqslant 0$ car si $\alpha = a.10^p$, $|a| \geqslant 0$ dans $\mathbb{Z}$
* $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ car si on écrit $\alpha = a.10^p$,
$\alpha = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow |a| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = 0$
* $\forall \alpha \in \mathbb{D}$, $\forall \beta \in \mathbb{D}$, $|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$

car si $\alpha = a.10^p$ et $\beta = b.10^q$, alors $|\alpha\beta| = |ab|.10^{p+q} = |a|\,|b|.10^{p+q}$
donc $|\alpha\beta| = |a|.10^p.|b|.10^q$

* $\forall \alpha \in \mathbb{D}$, $\forall \beta \in \mathbb{D}$, $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$ (triangle)

en écrivant $\alpha = a.10^p$ et $\beta = b.10^p$ (le même $p$) cela découle de l'inégalité analogue pour la valeur absolue dans $\mathbb{Z}$.

## III. — Écriture d'un élément de $\mathbb{D}$ sous forme de nombre à virgule.

Nous allons écrire un élément de $\mathbb{D}$ sous la forme d'un nombre décimal en base 10.

Soit $\alpha = a.10^p$ un élément de $\mathbb{D}$.

1° Si $p \geqslant 0$, $a.10^p$ est un entier, qu'on sait écrire en base 10 : on écrit $|\alpha| = |a|.10^p$, et on fait précéder cette écriture du signe — si $\alpha < 0$. On peut éventuellement faire précéder l'entier $|\alpha|$ d'un nombre quelconque de zéros, et le nouveau symbole représente le même nombre.

2° Si $p < 0$ alors posons $q = -p$ ; $q > 0$.

On écrit alors $a$ en base 10, en le faisant précéder du nombre nécessaire de zéros, puis on compte $q$ chiffres à partir de la droite et on place une virgule. On peut alors ne pas écrire les zéros qui se trouvent à la droite de la virgule et tels qu'il n'y ait pas de chiffres différents de zéro à leur droite.

Exemple : $30.10^{-3} = 0{,}030$ et $30.10^{-3} = 0{,}03$ etc.

$-5.10^{-3} = -0005.10^{-3}$ et $-5.10^{-3} = -0{,}005$.

*Compatibilité :*

Si $a.10^p = b.10^q$, alors par exemple $a = b.10^{p-q}$ ; l'écriture de $a$ en base 10 s'obtient à partir de celle de $b$ en ajoutant $p$-$q$ zéros à droite ; la méthode précédente permet alors d'écrire le même nombre à virgule.

**Technique des opérations.**

*Addition :*

La définition $a.10^p + b.10^p = (a + b)\,10^p$ donne la méthode : on écrit les nombres avec autant de chiffres après la virgule (éventuellement en ajoutant des zéros à la droite de l'un d'eux), puis on ajoute les entiers obtenus en supprimant les virgules, et dans le résultat on place la virgule en laissant le même nombre de chiffres sur la droite :

$$0,5 + 3,25 = 0,50 + 3,25 = 3,75$$

*Multiplication :*

La définition $a.10^p \times b.10^q = ab.10^{p+q}$ nous donne encore la technique : on multiplie les entiers obtenus en supprimant les virgules, et dans le résultat on place la virgule en laissant sur la droite un nombre de chiffres égal à la somme des nombres de chiffres de chaque facteur placés après la virgule :

$$30 \times 0,5 = 15,0 = 15$$
$$1,3 \times 0,02 = 0,026$$

**Relation d'ordre.**

Il résulte de la définition de l'ordre dans $\mathbb{D}$ que pour comparer deux nombres à virgule, on les écrit avec le même nombre de chiffres après la virgule, puis on compare les entiers obtenus en supprimant la virgule.

*Remarque :* pour comparer deux entiers positifs ayant le même nombre de chiffres (et on peut toujours se ramener à ce cas), on utilise l'ordre lexicographique (cf. un dictionnaire), c'est-à-dire :

Si $\alpha$ s'écrit en base 10 $a_1\ a_2\ \ldots\ a_n$ (les $a$ sont des chiffres)
et si $\beta$ s'écrit $b_1\ b_2\ \ldots\ b_n$
et si de plus $\alpha \neq \beta$, alors

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \exists\, i \in \{1, 2, \ \ldots\ n\} ;\ a_i < b_i \text{ et } a_\alpha = b_\beta \text{ pour } \alpha < i.$$

Il en résulte en particulier que si deux nombres à virgule sont tels que les entiers obtenus en supprimant les chiffres après la virgule sont différents, le plus grand des nombres est celui correspondant au plus grand des entiers en question.

## IV. — Encadrements.

### 1) Intervalles.

Si $\alpha$ et $\beta$ sont deux décimaux tels que $\alpha < \beta$, on peut considérer les ensembles :

$$I_1 = (x \in \mathbb{D} ;\ \alpha \leqslant x < \beta) \quad \text{qu'on note } I_1 = [\alpha, \beta[$$
$$I_2 = (x \in \mathbb{D} ;\ \alpha < x \leqslant \beta) \quad \text{qu'on note } I_2 = ]\alpha, \beta]$$

***Propriété :***

*$I_1$ et $I_2$ sont deux ensembles infinis de $\mathbb{D}$.* Montrons par exemple que $I_1$ est infini.

* Premier point de vue : en notant $\alpha = a.10^p$ et $\beta = b.10^p$ (avec le même $p$) alors le nombre $\gamma = (5a + 5b)10^{p-1}$ est tel que : $\alpha < \gamma < \beta$ donc $\gamma \in I_1$.

En effet, $\alpha < \beta \Leftrightarrow a < b$, donc $10a < 5a + 5b$, d'où $\alpha < \gamma$ et on montre de même que $\gamma < \beta$.

* Deuxième point de vue : écriture décimale ; montrer sur des exemples qu'en ajoutant des chiffres à la droite de l'écriture décimale de $\alpha$ si $\alpha > 0$, on trouve un décimal $\delta$ tel que $\alpha < \delta < \beta$.

Exemple : $\alpha = 32{,}548 \quad \beta = 32{,}672$

alors $\delta = 32{,}5487$ répond à la question

donc $\delta \in I_1$.

Dans ces deux cas, on a trouvé un nombre compris strictement entre $\alpha$ et $\beta$, en recommençant, on trouve un nombre entre $\alpha$ et $\gamma$ (resp $\gamma$ et $\beta$), et ainsi de suite; donc $I_1$, est infini.

*Cas particulier :* $\alpha = a.10^p \quad \beta = (a + 1)\,10^p$

alors $I_1$ est exactement formé des nombres décimaux de la forme :

$$x = (a.10^{p-q} + a')\,10^q$$

avec $$q < p \text{ et } 0 \leqslant a' < 10^{p-q}$$

on trouve $I_2$ de façon analogue.

## 2) Encadrements.

Si $\alpha \in \mathbb{D}$ et $d \in \mathbb{D}$, $d > 0$, on appelle encadrement de $\alpha$ à $d$ près un intervalle de l'un des types :

$$I_1 = [\beta, \gamma],\ I_2 = [\beta, \gamma[,\ I_3]\,\beta, \gamma] \text{ ou } I_4 = ]\,\beta, \gamma[$$

tel que $\gamma - \beta = d$ et que $\alpha$ appartienne à cet intervalle.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{D}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on peut trouver $a \in \mathbb{Z}$, unique,

tel que $$\alpha \in I_{p,\alpha} = [a.10^p, (a + 1)\,10^p[$$

Soit en effet $\alpha = b.10^q$.

On peut toujours supposer $q \leqslant p$ ; en effet, si $q < p$, alors

$$\alpha = b.10^q = (b10^{q-p})10^p \quad \text{et} \quad b10^{q-p} \in \mathbb{Z}$$

Il existe alors un entier $a$, unique, tel que :

$$a.10^{p-q} \geqslant b < (a + 1)10^{p-q}$$

donc $$\alpha = b10^q \in I_{p,\alpha} = [a10^p, (a + 1)10^p[$$

$I_{p,\alpha}$ s'appellera l'encadrement naturel de $\alpha$ à $10^p$ près par défaut.

En notation de nombre à virgule, on obtient le nombre $a.10^p$, à partir de l'écriture de $\alpha$, en supprimant les $p$-$q$ chiffres qui sont sur la droite, quitte à remplacer par des zéros ceux qui se trouvent à gauche de la virgule.

*Exemples :*

encadrement naturel de $\alpha = 32{,}5$ à 10 près : $[30{,}40[$
encadrement naturel de $\beta = 43{,}572$ à $10^{-2}$ près : $[43{,}57,\ 43{,}58[$
encadrement naturel de $\gamma = 35{,}2$ à $10^{-2}$ près : $[35{,}20,\ 35{,}21[$
encadrement naturel de $\delta = -3{,}7$ à $10^{-1}$ près : $[-3{,}7,\ -3{,}6[$

*Remarque :* si $q < p$, alors $I_{q,\alpha} \subset I_{p,\alpha}$
et on voit facilement que $\bigcap_{p \in Z} I_{p,\alpha} = \{\alpha\}$ ;
donc $\bigcap_{p \in Z} I_{p,\alpha}$ n'est pas un encadrement de $\alpha$, puisqu'il n'a qu'un seul élément.

**Encadrement d'une somme et d'une différence.**

Les propriétés de groupe de $D$ font que :

$$\left.\begin{array}{r}\alpha \in [d_1,\ d_2[ \\ \text{et }\ \beta \in [\beta_1,\ \beta_2[\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \alpha + \beta \in [\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2[$$

Donc, d'encadrements de $\alpha$ et $\beta$ à $d$ près, on peut déduire un encadrement de $\alpha + \beta$ à $2d$ près (car, si $\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1 = d$, alors

$$(\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1) = 2d).$$

Remarquons cependant que, des encadrements naturels de $\alpha$ et $\beta$ à $10^p$ près, on ne peut pas déduire un encadrement naturel de la somme, même à $10^{p-1}$ près.

Pour la différence, il faut faire un peu plus attention :

si $\qquad \alpha \in [\alpha_1,\ \alpha_2[$
et $\qquad \beta \in [\beta_1,\ \beta_2[$
alors $\qquad \alpha - \beta \in [\alpha_1 - \beta_2,\ \alpha_2 - \beta_1\ [\ \subset [\alpha_1 - \beta_2,\ \alpha_2 - \beta_1[$

(donner surtout des exemples).

**Encadrement d'un produit.**

Soit $\qquad \alpha \in [a \cdot 10^p,\ (a+1) \cdot 10^p[$
et $\qquad \beta \in [b \cdot 10^p,\ (b+1) \cdot 10^p[$

Supposons d'abord $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$
alors $\qquad \alpha\beta \in [ab \cdot 10^p,\ (ab + a + b + 1)\ 10^p[$

On voit qu'un encadrement à $10^p$ près de $\alpha$ et $\beta$ ne fournit qu'un encadrement à $(a + b + 1)\ 10^p$ près de $\alpha\beta$ ; on obtient un résultat analogue en supposant $a$ ou $b$ négatifs.

*Exemple :*

Si
$$\alpha \in [1111{,}1, \quad 1111{,}2[$$
$$\beta \in [0{,}2, \quad 0{,}3[$$

on en déduit que $\alpha\beta \in [222{,}22, \quad 333{,}36[$

Il est opportun de remarquer à ce moment que, puisque l'encadrement sert surtout dans la pratique à donner un ordre de grandeur de l'erreur commise en remplaçant $\alpha$ par $a.10^p$, on aura intérêt à écrire simplement, dans l'exemple précédent, $220 \leqslant \alpha\beta < 340$ ou $\alpha\beta \in [220, 340[$

**Inverse approché à $10^p$ près.**

Un élément $\alpha$ non nul quelconque de $\mathbb{D}$ n'a en général pas d'inverse dans $\mathbb{D}$ ; (c'est-à-dire que $\mathbb{D}$ n'est pas un corps).

Montrons par exemple que le nombre 3 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{D}$.

Raisonnant par l'absurde, supposons que $a.10^p$ soit l'inverse de 3

$$3a.10^p = 1$$

On voit que $p$ doit être négatif, sinon 3 diviserait 1 dans $\mathbb{Z}$.

Posons donc $q = -p$ ; $q > 0$

on aurait alors $3a = 10^q$.

Cette égalité est impossible dans $\mathbb{Z}$, car 3 est un nombre premier qui ne divise pas 10, donc pas non plus $10^q$.

On peut d'ailleurs montrer facilement que les éléments inversibles de $\mathbb{D}$ sont les éléments de la forme $a.10^p$ tels que la décomposition de $a$ en facteurs premiers ne comporte que des 2 et des 5.

Nous allons par contre montrer qu'on peut déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{D}$ et $p \in \mathbb{Z}$ donnés, un élément $\beta = b.10^q$ de $\mathbb{D}$ tel que l'on ait : $\alpha.b10^q \leqslant 1 < (b + 1)\ 10^q$.

L'élément $b.10^q$ s'appellera *l'inverse approché de $\alpha$ à $10^q$ près par défaut.*

Soit donc $\alpha = a.10^p \in \mathbb{D}$ ; on a vu qu'on peut supposer $p$ aussi petit que l'on veut (en remplaçant le couple $(a, p)$ par un couple équivalent), on peut donc supposer $p + q < 0$ ; le nombre $10^{-p-q}$ est donc un entier, et on peut effectuer dans $\mathbb{Z}$ sa division euclidienne par $a$.

$$10^{-p-q} = a.b + r \qquad 0 \leqslant r < a$$

ou encore
$$ab \leqslant 10^{-p-q} < a\,(b + 1)$$

soit
$$(a.10^p)\,(b.10^q) \leqslant 1 < a.10^p\,(b + 1)\ 10^q.$$

$b.10^q$ est bien l'élément cherché.

**Technique de détermination de $\beta$ si $\alpha$ est écrit comme nombre à virgule.**

Traitons un exemple : inverse de 7,2 à $10^{-3}$ près :

$$q = -3 \qquad p = -1 \qquad a = 72$$

$$\begin{array}{r|l} 10\,000 & 72 \\ \cline{2-2} 2\,80 & 138 \\ 640 & \\ 64 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \text{d'où } b = 138 \\ \text{et } \beta = 0{,}138 \\ \\ \end{array}$$

## Autre présentation des nombres décimaux.

Cette présentation est tout à fait différente de celle qui précède, et on peut difficilement les mélanger : il faut faire un choix au départ.

On suppose toujours connu l'anneau ordonné $\mathbb{Z}$, et un système de numération de $\mathbb{Z}$; sa base qui s'écrit toujours 10, sera dans les applications le nombre de doigts des deux mains.

Nous allons construire un anneau le plus « simple » possible contenant $\mathbb{Z}$ et dans lequel 10 soit inversible.

**Partie multiplicative des puissances de 10.**

Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ suivant :

$S = \{10^n;\ \ n \in \mathbb{N}\}$ (où on a convenu de poser $10^0 = 1$)

S est stable pour la multiplication dans $\mathbb{Z}$,

en effet : $\qquad 10^p . 10^q = 10^{p+q}$

d'autre part, on remarque que $1 \in S$ et que $0 \notin S$.

**Équivalence sur $\mathbb{Z} \times$ S.**

On définit sur $\mathbb{Z} \times S$ la relation suivante :

si $\qquad a, b \in \mathbb{Z}$ et $10^p, 10^q \in S$,

alors $\qquad (a, 10^p)\, R\, (b, 10^q) \Leftrightarrow a . 10^q = b . 10^p$ (égalité dans $\mathbb{Z}$).

C'est une relation d'équivalence : seule la transitivité n'est pas tout à fait évidente :

si $\qquad a10^p = b10^n$

et $\qquad b10^r = c10^p$

on en déduit $\qquad a10^{p+r} = b10^{n+r}$

et $\qquad b10^{n+r} = c10^{n+p}$

donc $\qquad a10^{p+r} = c10^{n+p}$

et puisque $10^p \neq 0 \qquad a10^r = c10^n$, d'où $(a, 10^n) R (c, 10^r)$

On note une classe d'équivalence $\frac{a}{10^n}$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{a}{10^n} = \frac{b}{10^p} \Leftrightarrow a.10^p = b.10^n$$

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble de ces classes d'équivalence, c'est l'ensemble des décimaux.

**Addition.**

Si $\frac{a}{10^p}$ et $\frac{b}{10^q}$ sont des éléments de $\mathbb{D}$, nous voulons définir leur somme par :

$$\frac{a}{10^p} + \frac{b}{10^p} = \frac{a10^q + b10^p}{10^{p+q}}$$

Cette définition ne se justifie que si on montre que le résultat est indépendant des représentants $(a,10^p)$ et $(b,10^q)$ des classes $\frac{a}{10^p}$ et $\frac{b}{10^q}$ ; nous allons le vérifier rapidement :

$$\frac{a}{10^p} = \frac{a'}{10^{p'}}, \qquad \text{alors } a.10^{p'} = a'.10^p$$

et si de même $\qquad b.10^{q'} = b'.10^q$

alors on déduit que : $(a10^q + b10^p)10^{p'+q'} = (a'.10^{q'} + b'.10^{p'})10^{p+q}$
ou encore :

$$\frac{a10^q + b10^p}{10^{p+q}} = \frac{a'10^{q'} + b'10^{p'}}{10^{p'+q'}}$$

*Remarque :* réduction au même dénominateur :
si $\frac{a}{10^p}$ et $\frac{b}{10^q}$ sont deux décimaux, avec par exemple $p \leqslant q$, on peut les réduire en les écrivant : $\frac{b}{10^q}$ et $\frac{a.10^{q-p}}{10^q}$ ; donc deux décimaux quelconques peuvent s'écrire $\frac{a}{10^q}$ et $\frac{b}{10^q}$ ; la loi précédemment définie donne alors :

$$\frac{a}{10^q} + \frac{b}{10^q} = \frac{a10^q + b10^q}{10^{2q}} = \frac{a+b}{10^q}$$

**Montrons que cette opération fait de $\mathbb{D}$ un groupe abélien.**

Une fois qu'on sait réduire des éléments au même dénominateur, l'associativité et la commutativité découlent de celles de $\mathbb{Z}$, l'élément neutre est $\frac{0}{1} = \frac{0}{10^p}$ $(p \in \mathbb{N})$, l'opposé d'un élément $\frac{a}{10^p}$ est $\frac{-a}{10^p}$.

**Multiplication.**

Nous définissons la multiplication dans $\mathbb{D}$ par : $\frac{a}{10^p} \cdot \frac{b}{10^q} = \frac{ab}{10^{p+q}}$

Cette définition se justifie, car si :

$$\frac{a}{10^p} = \frac{a'}{10^{p'}} \qquad \text{(c'est-à-dire } a10^{p'} = a'10^p\text{)}$$

et :

$$\frac{b}{10^q} = \frac{b'}{10^{q'}} \qquad \text{(c'est-à-dire } b10^{q'} = b'10^q\text{)}$$

alors $ab.10^{p'+q'} = a'b'10^{p+q}$, donc $\frac{ab}{10^{p+q}} = \frac{a'b'}{10^{p'+q'}}$.

L'opération que nous venons de définir est commutative, associative, et possède un élément neutre $\frac{1}{1}$ (vérification immédiate).

**Éléments inversibles de $\mathbb{D}$.**

Il s'agit de trouver les éléments $\frac{a}{10^n}$ pour lesquels il existe un élément $\frac{b}{10^p}$ tel que $\frac{10^{n+p}}{ab} = \frac{1}{1}$ ;

ou encore $\qquad ab = 10^n.10^p \qquad$ (égalité dans $\mathbb{Z}$),

ou encore $\qquad ab = 2^{n+p}.5^{n+p}$.

La théorie des nombres premiers montre qu'il est possible de trouver $\frac{b}{10^p}$ si et seulement si la décomposition de $|a|$ en facteurs premiers ne contient que des 2 et des 5.

Les éléments inversibles de $\mathbb{D}$ sont donc ceux de la forme :

$$\frac{\pm 2^\alpha 5^\beta}{10^n} \; (\alpha \in \mathbb{N},\ \beta \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N})$$

**Ordre sur $\mathbb{D}$.**

Comme on sait réduire deux éléments de $\mathbb{D}$ au « même dénominateur » il suffit de savoir comparer deux éléments de la forme $\frac{a}{10^n}$ et $\frac{b}{10^n}$. Posons donc $\frac{a}{10^n} \leqslant \frac{b}{10^n} \Leftrightarrow a \leqslant b$ dans $\mathbb{Z}$.

Il faut bien entendu vérifier que cette relation ne dépend pas du représentant $(a, 10^n)$ de la classe $\frac{a}{10^n}$, ce qui est immédiat car, dans $\mathbb{Z}$, l'ordre vérifie : $a \leqslant b \Leftrightarrow a.10^p \leqslant b.10^p$ (avec $p \in \mathbb{N}$).

On voit aussi facilement que la relation ainsi définie munit $\mathbb{D}$ d'un ordre total.

D'autre part, $\mathbb{D}$ muni de cet ordre est dense, c'est-à-dire que, si $\alpha \in \mathbb{D}$, $\beta \in \mathbb{D}$ et $\alpha < \beta$ (strictement), alors il existe un élément $\gamma$ de $\mathbb{D}$ situé strictement entre $\alpha$ et $\beta$.

En effet si $\dfrac{a}{10^p} < \dfrac{b}{10^p}$

alors $10a < 5a + 5b < 10b$

d'où $\dfrac{a}{10^p} < \dfrac{5a+5b}{10^{p+1}} < \dfrac{b}{10^p}$

(remarquons que $\mathbb{Z}$ n'avait pas cette propriété).

**Identification de $\mathbb{Z}$ à une partie de $\mathbb{D}$.**

Considérons l'application $i$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{D}$ définie par :

si $a \in \mathbb{Z}$ $i(a) = \dfrac{a}{1}$

1° *Montrons que c'est un homorphisme d'anneau.*

$$i(a+b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1}$$

donc $i(a+b) = i(a) + i(b)$

$$i(ab) = \frac{ab}{1} = \frac{ab}{1 \times 1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1}$$

donc $i(ab) = i(a) . i(b)$

2° *Montrons que* i *respecte l'ordre, c'est-à-dire que :*

$$a \leqslant b \Leftrightarrow i(a) \leqslant i(b)$$

en effet $a \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{a}{1} \leqslant \dfrac{b}{1}$ d'après la définition de l'ordre dans $\mathbb{D}$.

3° *Montrons que* i *est injectif.*

En effet si $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{1}$, cela veutdire $a \times 1 = b \times 1$, soit $a = b$.

Tout ce qui précède nous permet d'identifier $\mathbb{Z}$ à son image par $i$ dans $\mathbb{D}$, donc nous écrirons $3 \in \mathbb{D}$ à la place de $\dfrac{3}{1} \in \mathbb{D}$.

## Appendice : Rappels sur les groupes et anneaux ordonnés.

Si un ensemble E est muni d'une part d'une loi de composition interne notée $+$ qui en fait un groupe abélien et d'autre part d'une relation d'ordre notée $\leqslant$, on dit que ces structures font de E un groupe ordonné (ou que la loi de groupe et la relation d'ordre sont compatibles) si, pour tous $a$, $b$, $c$ de E on a la relation :

$$(a \leqslant b) \Rightarrow (a + c \leqslant b + c)$$

On en déduit aisément les règles de calcul suivantes :

$(a \geqslant 0 \text{ et } b \geqslant 0) \Rightarrow a + b \geqslant 0$ (0 élément neutre de la loi)

$(a \leqslant 0 \text{ et } b \leqslant 0) \Rightarrow a + b \leqslant 0$

$(a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d) \Rightarrow a + c \leqslant b + d$

Si de plus la relation $\geqslant$ est une relation d'ordre total, alors tout élément est soit $\geqslant 0$ soit $\leqslant 0$, et $(a \geqslant 0) \Leftrightarrow (-a \leqslant 0)$.

Si un ensemble E est muni d'une structure d'anneau et d'une relation d'ordre $\leqslant$, on dit que E est un anneau ordonné s'il vérifie les deux conditions suivantes : 1° l'addition et la relation $\leqslant$ font de E un groupe ordonné; 2° la multiplication les compatible avec la relation $\leqslant$, c'est-à-dire que, pour tout $a$, $b$ de E, on a : $(a \geqslant 0 \text{ et } b \geqslant 0) \Rightarrow a.b \geqslant 0)$.

On en déduit aisément les règles de calcul suivantes :

$(a \leqslant b \text{ et } c \geqslant 0) \Rightarrow ac \leqslant bc$

$(a \leqslant b \text{ et } c \leqslant 0) \Rightarrow ac \geqslant bc$

$$\left.\begin{array}{ll} a \leqslant 0 \text{ et } b \leqslant 0 & ab \geqslant 0 \\ a \geqslant 0 \text{ et } b \leqslant 0 & ab \leqslant 0 \end{array}\right\} \text{règles des signes.}$$

Rappelons que l'addition, la multiplication et l'ordre sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ font de ce dernier un anneau totalement ordonné.

***Remarque :***

*La première présentation, donnée ci-dessus, de l'ensemble des décimaux suit de près la lettre du programme officiel. Certains préfèreront la seconde présentation qui semble plus claire et plus simple.*