Continuité et limite à partir des transformations géométriques

Stefan TURNAU,
École Normale Supérieure de Cracovie (Pologne).

L'idée fondamentale de cet exposé est la suivante. Nous essayons de trouver une approche des notions de continuité et de limite d'une fonction, approche qui mette en relief des notions plus générales, sans les introduire formellement.

Nous partirons de la notion de continuité d'une transformation géométrique, la transférerons à une transformation déterminée par une fonction numérique dans le plan, pour obtenir la définition de sa continuité. Enfin, de la continuité nous passerons à la limite.

A. Continuité d'une transformation dans le plan.

Exemple 1 (1). Soit la transformation t, qui transforme le carré ABCD en le « carré troué » MNPQ, de la façon suivante :

$$t(X) = \begin{cases} S_{AD}(X), \text{ pour } X \in \Delta ADE \\ S_{BC}(X), \text{ pour } X \in \Delta BCE - \{E\} \\ S_{AB}(X), \text{ pour } X \in \Delta ABE - (AC \cup BD) \\ S_{CD}(X), \text{ pour } X \in \Delta CDE - (BD \cup AC) \end{cases}$$

où S_x signifie symétrie par rapport à x.

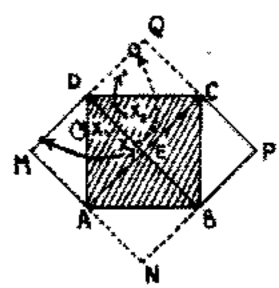

FIG. 1.

(1) L'idée de cet exemple nous a été suggéré par M^me^ Krygowska.

La transformation t peut être facilement présentée sur un modèle de papier.

On pose le problème suivant. Si $X' = t(X)$, les images de points de ABCD, voisins de X, sont-ils voisins de X'?

Le travail se déroule en trois étapes :

1° Les élèves trouvent deux sortes de points : ceux comme X_1 ou X_2, où la figure ne se déchire pas, et ceux comme X_3, où elle se déchire;

2° On demande une description précise de ces deux « sortes » de points; les élèves la donnent (probablement avec une intervention du maître) en s'aidant d'un voisinage rond;

3° On formule la définition de la continuité d'une transformation t au point X :

a) On dit, que le voisinage v du point $X' = t(X)$ est t-hospitalier pour le point X, si

$$\exists w \in V(X) \quad t(w \cap D_t) \subset v$$

en posant V(X) = ensemble des voisinages ronds de X, D_t = domaine de t.

b) On dit que t est continue en X, si et seulement si tout voisinage v de $X' = t(X)$ est t-hospitalier pour X.

On dit, que t est déchirable en X, si au moins un voisinage de X' n'est pas t-hospitalier pour X.

Les deux étapes de la définition ont été aménagées pour éviter les difficultés provoquées par la présence de deux quantificateurs dans un énoncé.

La définition ayant été formulée, ce sera instructif de considérer un des points A, B, C, D.

Les élèves peuvent constater aussi que la transformation réciproque de t est continue en tout point de son domaine, ce qui les stupéfiera.

Exemple 2. *Toute homothétie du plan est continue en tout point.*

Démonstration 1, « géométrique ».

Soit O le centre, $s \neq 0$ le rapport de l'homothétie h, $X' = h(X)$ et $v \in V(X')$. On cherche $w \in V(X)$ tel que $h(w) \subset v$. Mais cette condition est équivalente à $w \subset h^{-1}(v)$. En raison des propriétés de l'homothétie, $h^{-1}(v) \in V(X)$; or, on peut prendre $w = h^{-1}(v)$. Alors :

$$\exists w \in V(X) \quad h(w) \subset v.$$

Démonstration 2 « algébrique ».

La signification des lettres étant la même, nous avons les descriptions algébriques suivantes des objets considérés :

$$X : (x, y),\ X' : (x', y'),\ O : (0, 0)$$
$$h \begin{cases} \xi' = s\xi \\ \eta' = s\eta \end{cases}$$
$$v : (x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2 < \rho^2,\ \rho > 0$$
$$w : (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < r^2,\ r > 0.$$

Cela vaut la peine d'ajouter, que la relation $\subset$ correspond maintenant à l'implication entre les inéquations. La traduction algébrique de notre problème s'énonce ainsi : on cherche r tel que la condition obtenue par élimination de ξ, η du système

$$\begin{cases} \xi' = s\xi \\ \eta' = s\eta \\ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < r^2 \end{cases} \qquad (1)$$

implique

$$(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2 \leqslant \rho^2. \tag{2}$$

Lorsque (1) implique

$$(sx - \xi')^2 + (sy - \eta')^2 \leqslant (sr)^2,$$

ou

$$(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2 \leqslant (|s|r)^2, \tag{3}$$

il est évident que pour $r \leqslant \frac{\rho}{|s|}$ $(3) \Rightarrow (2)$. Alors $\exists r$ $(3) \Rightarrow (2)$.

B. ***Continuité d'une certaine transformation géométrique déterminée par une fonction*** **f; continuité d'une fonction numérique.**

Soit $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $f\langle A \rangle = B$; à A et B correspondent les ensembles a et b inclus dans les axes du repère choisi; à f correspond la transformation f^*, définie d'une façon évidente.

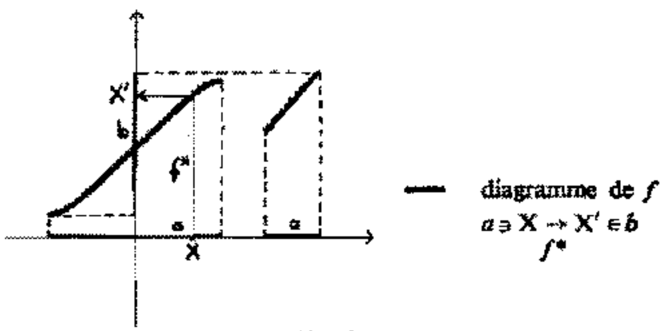

FIG. 2.

On peut étudier la continuité de f^*, selon la définition précédente.

Exemple 3. Soit

$$f : x \to \begin{cases} 0 \text{ pour } x \leqslant -3 \\ x + 3 \text{ pour } -3 < x \leqslant -1 \\ 0 \text{ pour } -1 < x < 0 \\ 1 \text{ pour } x = 0 \\ 2x \text{ pour } 0 < x < 1 \\ x^2 + 1 \text{ pour } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Il est bien évident que cette étude sera la plus intéressante pour les points -1 et 0, puis peut-être 1 et -3.

On prend alors un voisinage du point $f(-1)$, quelconque mais plutôt petit, et on regarde où les images des voisinages du point (-1) [plus exactement : les parties de ces voisinages incluses dans le domaine de f] pénètreront-elles. Il est facile de constater qu'aucune de ces images n'est incluse dans le voisinage choisi, puisque $f(x) = 0$ pour n'importe quel x peu supérieur à -1. La transformation f^*, ainsi que la fonction f, n'est pas continue en -1.

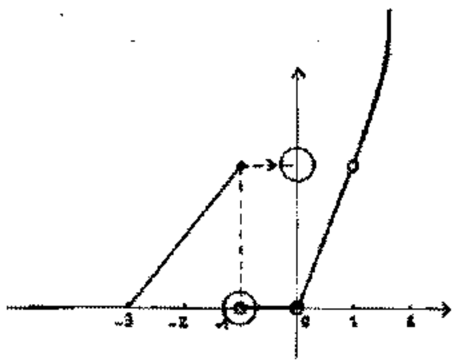

FIG. 3.

Une étude semblable aux points 0, — 3, éventuellement en d'autres points du domaine de f, conduit les élèves à la conclusion que la fonction f est continue en tous les points de son domaine (y compris — 3) sauf — 1 et 0; 1 est en dehors du domaine, f n'y est pas continue.

Le domaine de la fonction f^* de notre exemple ne comprend pas de points isolés; cela n'arrive pas dans les applications élémentaires. Si on admet un tel point, soit x_1, on pourra trouver un voisinage de x_1 libre d'autres points du domaine de f^*. Il est bien évident que l'image de ce voisinage de x_1 pénètrera dans chaque voisinage de $f^*(x_1)$. Or, la transformation f^* (et la fonction f) est continue en tout point isolé. En particulier une suite, dont le domaine se compose exclusivement de points isolés, est une fonction continue partout.

Exercices : examen de fonctions élémentaires différentes quant à leur continuité.

C. La limite.

Problème nouveau, concernant les fonctions considérées dans l'exemple 3 et dans les exercices : est-il possible de changer la valeur de la fonction en un point de discontinuité s'il en existe, ou d'ajouter une valeur nouvelle si elle n'existe pas, de telle façon, que la fonction obtenue soit continue en ce point?

Les élèves constatent, que ce « truc » est possible pour la fonction de l'exemple 3 aux points 0 et 1, et impossible au point — 1.

Dans le cas du point 1, alors que la fonction n'a pas de valeur, on dit que la fonction a été prolongée de façon continue.

Dans les cas de points 0 et 1 on dit, que 0 (resp. 2) est la limite de f en 0 (resp. 1).

On appelle limite de la fonction f en x_0 un nombre l tel que la fonction

$$\bar{f} : x \to \begin{cases} f(x) \text{ pour } x \neq x_0 \\ l \text{ pour } x = x_0 \end{cases}$$

est continue en x_0.

S. T.