4

dans nos classes

Un aspect de la combinatoire

Maurice GLAYMANN
Directeur de l'I.R.E.M. de Lyon

Introduction.

Je me propose de montrer ici ce que peut apporter la combinatoire au niveau du premier cycle. Je me limiterai à un seul aspect du problème : l'étude de quelques dénombrements dans le cadre des nouveaux programmes.

Cependant, il faut attirer l'attention sur le fait que la combinatoire, qui est l'étude des *ensembles finis*, peut fournir une matière importante dans la prochaine étape de la réforme. En effet, la combinatoire est peut-être un domaine où il est possible d'initier l'enfant au raisonnement mathématique : un problème de combinatoire consiste dans un premier temps à démontrer l'*existence* (ou la non-existence) d'un ensemble fini de cardinal n ayant certaines propriétés; en cas d'existence, à dénombrer et classer tous les ensembles répondant au problème. Cette étude peut toujours commencer par une expérimentation pour les petites valeurs de n. Dès que n est trop grand, l'expérimentation s'arrête et il faut faire intervenir le *raisonnement* et éventuellement la *construction d'une méthode déductive.*

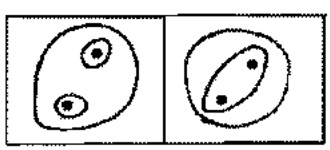
Voici un exemple caractéristique.

E est un ensemble à n éléments : déterminez le nombre B_n des partitions de E.

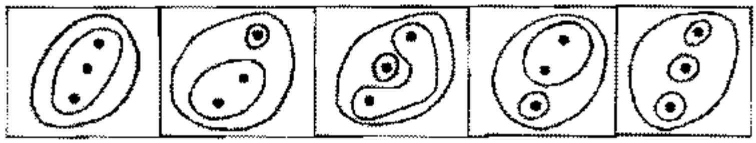
Il est immédiat que :

pour $n = 1$ $B_1 = 1$

pour $n = 2$ $B_2 = 2$



pour $\quad n = 3 \quad B_3 = 5$



Il est encore possible d'expérimenter pour $n = 4$, on trouvera 15 partitions; mais au-delà de 4, la situation devient beaucoup trop complexe; seule une démarche déductive permettra de résoudre ce problème dans le cas général (voir § 4).

Dans la suite de cet exposé, nous utiliserons les notations suivantes :

E est un ensemble fini; $|E|$ désigne son cardinal;

si $|E| = n$, on parlera du n-ensemble E.

1. Applications d'un ensemble E vers un ensemble F.

$\mathcal{A}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications de E vers F. Si E est un n-ensemble et F un p-ensemble, *quel est le cardinal* de $\mathcal{A}(E, F)$?

Ce problème est simple.

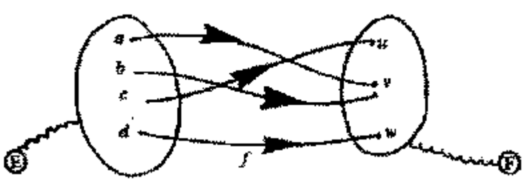
Voici une solution qui utilise les matrices booléennes.

A chaque application

$$f : E \to F$$

nous pouvons associer une matrice booléenne $B(n, p)$ à n lignes et p colonnes; sur chaque ligne se trouve un élément 1 et un seul, les autres éléments étant 0.

Exemple :



A l'application f, associons la matrice

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le problème revient à dénombrer les matrices booléennes $B(n, p)$.

Sur chaque ligne d'une telle matrice nous pouvons placer l'élément 1 en p places différentes; comme nous avons n lignes, il s'ensuit que

(1) $$|\mathcal{A}(E, F)| = p^n$$

2. Injections de E vers F (avec $|E| \leqslant |F|$).

$\mathfrak{J}(E, F)$ désigne l'ensemble des injections de E vers F.

Quel est le cardinal de $\mathfrak{J}(E, F)$?

Ici encore nous pouvons étudier l'ensemble des matrices booléennes associées aux injections.

Sur la première ligne, nous avons p choix pour l'élément 1; sur la seconde ligne, nous avons $(p-1)$ choix pour l'élément 1; etc...

Il y a $(p-n+1)$ choix pour l'élément 1 de la $n^{\text{ème}}$ ligne.

Il en résulte que

(2) $$|\mathfrak{J}(E, F)| = p(p-1)\ldots(p-n+1) \qquad \text{avec} \qquad n \leqslant p$$

En particulier, si $|E| = |F| = n$, on trouve $n!$.

C'est le nombre des *bijections* de E vers F.

Nous verrons plus loin comment dénombrer les *surjections* de E vers F (dans le cas où $|E| \geqslant |F|$).

3. Les nombres de Stirling.

La formule (2) nous invite à étudier les polynômes de la forme

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$$

où n est un *naturel* non nul.

Un tel polynome est appelé *polynôme factoriel.*

Posons

(3) $$x^{(n)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$$

c'est un polynôme de degré n; désignons par S_n^k le coefficient de x^k :

(4) $$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} S_n^k x^k$$

En particulier

$$x^{(1)} = x = S_1^1 x$$
$$x^{(2)} = x(x-1) = S_2^1 x + S_2^2 x^2$$

Les nombres S_n^k sont appelés *nombres de Stirling de première espèce.*

Il est facile de déterminer les premiers nombres de Stirling de première espèce :

$$S_1^1 = 1$$
$$S_2^1 = -1 \qquad S_2^2 = 1$$

et de trouver une relation de récurrence; en effet, en partant de l'égalité :

(5) $$x^{(n+1)} = (x-n)x^{(n)}$$

nous obtenons par identification :

(6) $$\boxed{S_{n+1}^k = S_n^{k-1} - n\, S_n^k}$$

avec, pour $k>n$

$$S_n^k = 0 \qquad \text{et} \qquad S_n^0 = 0$$

Les nombres S_n^k possèdent des propriétés intéressantes; en particulier, quel que soit n

$$S_n^n = 1$$

et pour $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n} S_n^k = 0$$

Cependant, *on ne connaît pas d'expression donnant S_n^k en fonction de n et de k.*
La relation (6) permet de calculer de proche en proche les nombres S_n^k.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	—1	1				
3	2	—3	1			
4	—6	11	—6	1		
5	24	—50	35	—10	1	
6	—120	274	—225	85	—15	1

Nous pouvons alors introduire les nombres de Stirling de seconde espèce. n étant un naturel non nul, posons :

(7) $$x^n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_n^k x^{(k)}$$

où $x^{(k)}$ est le polynôme factoriel de degré k.

En particulier :

$$x = \sigma_1^1 x^{(1)} = \sigma_1^1 x$$
$$x^2 = \sigma_2^1 x^{(1)} + \sigma x_2^{2(2)} = \sigma_2^1 x + \sigma_2^2 x(x-1)$$

Les nombres σ_n sont les nombres de Stirling de seconde espèce :

$$\sigma_1^1 = 1$$
$$\sigma_2^1 = 1 \qquad \sigma_2^2 = 1$$

Ils vérifient la relation de récurrence :

(8) $$\boxed{\sigma_{n+1}^k = \sigma_n^{k-1} + k\,\sigma_n^k}$$

avec pour $k>n$

$$\sigma_n^k = 0 \qquad \text{et} \qquad \sigma_n^0 = 0$$

En particulier, quel que soit n,

$$\sigma_n^n = 1$$

La relation (8) permet de calculer de proche en proche les nombres σ_n^k :

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	31	90	65	15	1

Remarques :

1° Contrairement aux nombres de Stirling de première espèce, on connaît une expression des nombres de Stirling de seconde espèce; on démontre que :

$$\boxed{\sigma_n^k = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} C_k^j j^n} \tag{9}$$

2° V_n désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ est une *base* de V_n.
De même, $\{1, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\}$ est une autre *base* de V_n.
Il en résulte que si l'on désigne par S_n la matrice (S_p^k) et par σ_n la matrice (σ_p^k), ces deux matrices sont *inverses* l'une de l'autre.

Exemples ;

pour $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Partitions d'un ensemble.

k-partition d'un n-ensemble.

$F = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, b\}$ est un $(n+1)$-ensemble.

$E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ est un n-ensemble.

Pour $k \leqslant n$, désignons par Π_n^k l'ensemble des partitions de E en k classes.

Quel est le cardinal p_n^k de Π_n^k?
Désignons par Π_{n+1}^k l'ensemble des k-partitions de l'ensemble F.
Nous pouvons distinguer deux types :

α) les éléments de Π_{n+1}^k pour lesquelles *b est à lui seul une classe ;*

β) les autres éléments de Π_{n+1}^k.

Faisons alors abstraction de l'élément b de F :

— les k-partitions du type α correspondent à Π_n^{k-1},

— les k-partitions du type β correspondent à Π_n^k.

A chaque élément de Π_n^{k-1}, il correspond un élément de Π_{n+1}^k.
A chaque élément de Π_n^k, il correspond k éléments de Π_{n+1}^k.
Il en résulte que :

(10) $$\boxed{p_{n+1}^k = p_n^{k-1} + k\, p_n^k}$$

Comme d'autre part

$$p_1^1 = 1 \qquad p_2^1 = p_2^2 = 1$$

ces nombres p_n^k ne sont autres que les nombres de Stirling de seconde espèc :

(11) $$\boxed{p_n^k = \sigma_n^k}$$

On en déduit alors que le nombre B_n de partitions d'un n-ensemble est

(12) $$\boxed{B_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_n^k}$$

appelé nombre de *Bell.*

Nous avons ainsi entièrement résolu le problème posé dans l'introduction.
Nous trouvons en particulier :

$$B_1 = 1 \qquad B_4 = 15$$
$$B_2 = 2 \qquad B_5 = 52$$
$$B_3 = 5 \qquad B_6 = 203$$

5. Surjections de E vers F (avec $|E| > |F|$).

$S(E, F)$ désigne l'ensemble des surjections de E vers F.

Si E est un n-ensemble et F un k-ensemble, avec $n \geqslant k$, quel est le cardinal $s_{n,k}$ de $S(E, F)$?

Soit $s : E \to F$ une surjection de E vers F et $s^{-1} : F \to E$ la réciproque de s.

Posons :

$$F = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$$

l'ensemble

$$P = \{s^{-1}\{b_1\}, \ldots, s^{-1}\{b_k\}\}$$

est une k-partition de E.

A chaque k-partition de E, il correspond $k!$ surjections de E vers F; il en résulte que :

(13) $$\boxed{s_{n,k} = k!\,\sigma_n^k}$$

Compte tenu de (8), on en déduit :

(14) $$\boxed{s_{n+1,k} = k(s_{n,k-1} + s_{n,k})}$$

avec pour $k > n$ $s_{n,k} = 0$.

En particulier

(15) $$\boxed{s_{n,n} = n!}$$

C'est le nombre des bijections de E vers F avec $|E| = |F| = n$.

D'autre part, quel que soit n,

$$s_{n,1} = 1$$

Voici les premières valeurs de $s_{n,k}$:

n \ k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	2				
3	1	6	6			
4	1	14	36	24		
5	1	30	150	240	120	
6	1	62	540	1 560	1 800	720

Donnons, pour terminer, un résultat intéressant :

E est un n-ensemble.

F est un p-ensemble.

X est une k-partie de F ($k \leqslant p$).

$s : E \to X$ est une surjection.

Il existe $k!\,\sigma_n^k$ telles surjections.

Il existe C_p^k k-parties de F.

Il existe donc $C_p^k\,k!\,\sigma_n^k$ surjections de E vers les k-parties de F.

L'ensemble de ces surjections est l'ensemble des applications de E vers F($k \in [1, p]$).

Il en résulte que :

$$p^n = \sum_{k=1}^{p} C_p^k\,k!\,\sigma_n^k$$

Bibliographie.

[1] Barbut (M.). — Mathématiques des Sciences humaines. I. Combinatoire et Algèbre, P.U.F.

[2] Berge (C.). — Principes de combinatoire, Dunod.

[3] Bourbaki (N.). — Livre I. Théorie des ensembles. Chapitre III : Ensembles ordonnés. Cardinaux. Nombres entiers.

[4] COMTET (L.). — Analyse combinatoire. Tomes 1 et 2, P.U.F.
[5] FRASNAY (C.). — Problèmes combinatoires. *Bull. A.P.M.* 271.
[6] JOURDAN (C.). — Calculus of finite differences. Chelsea Publ.
[7] PAPY. — Mathématique moderne 5. Arithmétique.
[8] ROSENSTIEHL (P.) et MOTHES (J.). — Mathématique de l'Action, Dunod.
[9] RYSER. — Mathématiques combinatoires, Dunod.
[10] ROUMANET (A.). — Une classe de Mathématique : Motivations et méthodes. Actes du 1er Congrès International de l'Enseignement Mathématique, Lyon, 24-30 août 1969. D. Reidel Publishing Cº, Dordrecht, Holland.
[11] WHEELER. — Notes on Mathematics in Primary School, Cambridge.