Rubrique des problèmes de l'A.P.M.

Il est créé dans le Bulletin une rubrique des problèmes. Cette rubrique est pour le plaisir, celui qui nous fait choisir les mathématiques à vingt ans, et non directement pour notre enseignement.

Le niveau ne doit pas excéder celui des classes préparatoires ou des deux premières années de Faculté. Un certain caractère d'originalité dans l'énoncé est souhaité, ce qui exclut, en particulier, les applications immédiates de théorèmes classiques.

Si l'auteur d'un énoncé n'est pas en mesure d'en donner la solution, il doit accompagner son envoi du maximum d'information concernant le problème afin d'aider les responsables de la rubrique. Le Bulletin publie les meilleures solutions.

Énoncé et solutions sur feuilles séparées et tapées à la machine S.V.P. N'oubliez pas de signer. Toute correspondance concernant la rubrique est à adresser à :

Gérard Letac, Rubrique des problèmes, I.U.T. de Clermont
B.P. 29. 63-Aubière

Énoncés.

Les solutions des problèmes suivants doivent nous parvenir avant le 15 avril 1971.

Énoncé n° 6: E. Ehrhart, École militaire de Strasbourg.

Soit $n = a^4 + b^4$, où a et b sont des entiers positifs premiers entre eux.

1° Montrer que n est égal à 1 ou à 2, *modulo* 16.

2° Est-il exact qu'à l'éventuel facteur 2 près, tout diviseur premier de n est égal à 1, modulo 8?

Énoncé n° 7: Roch Laframboise, Collège de Watawata, Québec.

Soit la fonction $f(x) = \log(e^{x_1} + \dots + ex_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Si $k = (k_1, \dots, k_n)$ et $h = (h_1, \dots, h_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ sont fixés, avec $|h_i - h_j| \leqslant 1$ et $|h_i| \leqslant 1$ pour tous i et j, alors :

$$\max_{x \in R^n} |f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)| < 1$$

Énoncé n° 8: Marcel Soum, Lycée d'Arcachon.

Construire un triangle ABC connaissant les pieds A_1, B_1, C_1 des trois bissectrices intérieures (resp. extérieures).

Solutions.

Énoncé n° 1 : G. Letac, I.U.T. de Clermont (*Bulletin* n° 274).

Montrer qu'il faut ajouter au moins n puissances entières de 2 ($1 = 2^0$ y compris) pour obtenir un multiple de 2^n-1.

Solution : J. Dufresnoy, Faculté des Sciences de Bordeaux.

Soit p_i le reste de la division de 2^i par 2^n-1. On voit immédiatement que $p_{i+n} = p_i$, il en résulte que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_{k+h} = \sum_{p=0}^{n-1} p_p = \sum_{p=0}^{n-1} 2^p = 2^n-1$$

Nous allons démontrer que si $\sum \alpha_k 2^k$ est divisible par 2^n-1, alors $\sum \alpha_k \geqslant n$. En effet, l'hypothèse entraîne $\sum_k \alpha_k 2^{k+h}$ divisible par 2^n-1, donc $\sum_k \alpha_k p_{k+h}$ divisible par 2^n-1, donc $\sum_k \alpha_k p_{k+h} \geqslant 2^n-1$. Additionnons membre à membre ces inégalités pour $h = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; après division par 2^n-1, il vient $\sum \alpha_k \geqslant n$.

Autres solutions de : J. Bernard (Lycée d'Abberville), J.-L. Calmels (Lycée de J.-F. Aurillac), D. Legrand (Faculté des Sciences de Bordeaux), Claude Mounet (Faculté des Sciences de Reims), R. Prudhomme (Faculté des Sciences de Lille), R. Ralle (C.E.S. de Sevran) et l'auteur.