Fonctions trigonométriques

H. Bouteiller
(Lycée de Brive)

L'élève de Terminale *A3-4* ou *B* étudie la fonction Log x définie par l'intégrale $u = \int_1^x \frac{dt}{t}$ et sa fonction réciproque $x = e^u$. Son condisciple de *C* ou *E* peut employer *la même méthode* pour réviser les fonctions trigonométriques.

1. Nombre π.

Considérons, dans le plan métrique, le quart de cercle unité, graphique de $r(t) = \sqrt[2]{1-t^2}$, $t \in [0, 1]$; on a $r'(t) = \frac{-t}{\sqrt[2]{1-t^2}}$, $\sqrt{1+r'^2} = \frac{1}{\sqrt[2]{1-t^2}}$ pour $t \in [0, 1[$. Soit $x \in [0, 1[$, découpons le segment $[0, x]$,

$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = x$ et marquons les points $M_i(t_i, r(t_i))$; alors par le théorème de la moyenne

$$r(t_{i+1}) - r(t_i) = (t_{i+1} - t_i) r'(c_i) \qquad t_i < c_i < t_{i+1}$$

La ligne polygonale $M_0M_1, \ldots, M_n$ a pour longueur $\sum_{i=0}^{n-1} [(t_{i+1}-t_i)^2 + (r(t_{i+1})-r(t_i))^2]^{1/2}$,

c'est-à-dire $\qquad L = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t_{i+1}-t_i)}{\sqrt[2]{1-c_i^2}}$.

Ceci conduit à étudier la fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ pour $t \in [0, 1[$; dans cet intervalle

$0 \leqslant 1+t < 2$, $\quad$ donc $\quad \sqrt{1-t} \leqslant \sqrt{1-t^2} < \sqrt{2}\sqrt{1-t}$ $\quad$ et $\quad \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}} < f(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-t}}$.

L étant une valeur approchée de $l(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, il semble raisonnable d'appeler longueur de l'arc $\widehat{AM}$ le nombre $l(x)$.

Comme $l'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est positif dans $[0, 1[$, $l(x)$ est une fonction monotone croissante stricte dans cet intervalle et puisque

$$\frac{\lambda(x)}{\sqrt{2}} < l(x) \leqslant \lambda(x) \qquad \text{où} \qquad \lambda(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2-2\sqrt{1-x}$$

on voit que $l(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1, cette limite est inférieure à $2 = \lim\limits_{x\to 1} \lambda(a)$; on pose $\frac{\pi}{2} = \lim\limits_{x\to 1} l(x) = l(1)$ d'où $2\sqrt{2} < \pi < 4$.

Cette notation sera justifiée un peu plus loin.

2. Trigonométrie du premier quadrant.

$u = l(x)$ est une bijection de $[0, 1[$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$; $l'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(l^{-1})'(u) = \sqrt{1-x^2}$ sont continues sur ces intervalles; on prolonge par continuité (ce difféomorphisme) aux fermés :

$$l(1) = \frac{\pi}{2}, \qquad 1 = l^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad l'(1) = +\infty, \qquad (l^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Pour $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on pose :

$$\left[\begin{array}{l} \sin u = l^{-1}(u), \qquad \cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right), \qquad \operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u}, \qquad \operatorname{cotg} u = \frac{1}{\operatorname{tg} u} \\ e(u) = \cos u + i \sin u \end{array}\right]$$

(tout cela s'illustre sur le quart de cercle du B.E.P.C. : si $A = M_0(1, 0)$, on a $\widehat{AM} = u$ et $e(u)$ est l'affixe de M).

Ainsi :

$$\sin 0 = \cos\frac{\pi}{2} = 0, \ \cos 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \ e\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u + i\cos u, \ e(0) = 1, \ e\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

$(\sin u)' = \sqrt{1-\sin^2 u}$, $(\sin u)'' = -\sin u$, $(\cos u)' = -\sqrt{1-\cos^2 u}$, $(\cos u)'' = -\cos u$ il en résulte

$$e''(u) = -e(u) \qquad \text{d'où} \qquad e(u)e'(u) + e'(u)e''(u) = 0$$

puis $e^2(u) + e'^2(u) = \text{Cte} = e^2(0) + e'^2(0) = 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En considérant

$$e'(u) = -\sqrt{1-\cos^2 u} + i\sqrt{1-\sin^2 u} = \pm i(\cos u + i \sin u) = \mp \sin u \pm i \cos u$$

on voit qu'il faut prendre $[e'(u) = ie(u)]$, on en déduit :

$(\sin u)' = \cos u$, $\qquad (\cos u)' = -\sin u$, $\qquad \sin^2 u + \cos^2 u = 1 = |e(u)|$

$(\operatorname{tg} u)' = 1 + \operatorname{tg}^2 u$, $(\operatorname{cotg} u)' = -1 - \operatorname{cotg}^2 u$.

3. Extension à $\mathbb{R}$.

Les points $k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, forment une graduation de $\mathbb{R}$, posons $\left[e\left(u+k\frac{\pi}{2}\right)=i^k e(u)\right.$ (enroulement du fil sur le cercle unité), pour $u=0$ et $k=1$, $e\left(\frac{\pi}{2}\right)=ie(0)$ est vérifié. Pour $k=4h+2$, $e(u+(2h+1)\pi)=-e(u)$; pour $k=4h$, $e(u+2h\pi)=e(u)$; donc $e(u)$, sin u, cos u sont périodiques de période 2π; $e'\left(u+k\frac{\pi}{2}\right)=i^k e'(u)=ii^k e(u)$ donc $e'\left(u+k\frac{\pi}{2}\right)=ie\left(u+k\frac{\pi}{2}\right)$, c'est-à-dire $e'(v)=ie(v)$ pour tout $v\in\mathbb{R}$. Prenons alors $h(u)=e(u_1+u)e(-u)$ où u_1 est fixé, il vient $h'(u)=0$, d'où $h(u)=\text{Cte}=h(0)=e(u_1)$; ainsi $e(u_1+u)e(-u)=e(u_1)$. Pour $u_1=0$ cette relation donne $e(u)e(-u)=e(0)=1$ d'où $e(-u)=1/e(u)=\overline{e(u)}$, on en déduit d'une part

$$\cos(-u)=\cos u,\ \sin(-u)=-\sin u,$$

d'autre part $[e(u_1,+u_2)=e(u_1)e(u_2)]$. L'exploitation paisible de ces résultats fournit le formulaire complet de la trigonométrie et les graphiques des fonctions trigonométriques.

Lorsque φ et ψ sont différentiables on sait que $(\psi\circ\varphi)'(w)=\psi'(u)\varphi'(w)$, où $w\overset{\varphi}{\mapsto}u\overset{\psi}{\mapsto}(\psi\circ\varphi)(w)$. Habituellement w est en :

degré, minute ou seconde, alors $u=\frac{\pi}{180}w$, $\frac{\pi}{180.60}w$, $\frac{\pi}{180.3600}w$

grade, décigrade ou centigrade, alors $u=\frac{\pi}{200}w$, $\frac{\pi}{2\,000}w$, $\frac{\pi}{20\,000}w$

On en déduit $\varphi'(w)=\frac{\pi}{180},\dots,\frac{\pi}{20\,000}$ selon le cas pour la dérivation dans les systèmes usuels et leurs inverses pour le calcul des primitives.

La définition des fonctions réciproques Arc sin x, Arc cos x, Arc tg x ne présente pas de difficulté; sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ Arc sin x coïncide avec $l(x)$.

Comme $(\text{Arc tg } x)'=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\dots+(-1)^n x^{2n}+\omega(x)$ avec

$$\omega(x)=\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$$

on a, puisque $\omega(x)$ est continue :

$$\text{Arc tg } x=x-\frac{x^3}{3}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\Omega(x)$$

où $\Omega(x)=\int_0^x\omega(t)dt$. On vérifie que si $\alpha=\text{Arc tg }\frac{1}{5}$ on a $4\alpha=\text{Arc tg }\frac{120}{119}$ d'où $\pi=16\text{ Arc tg }\frac{1}{5}-4\text{ Arc tg }\frac{1}{239}$. En prenant seulement $x-\frac{x^3}{3}$ on trouve déjà $\pi\simeq 3{,}14$, ce qui justifie la notation $\frac{\pi}{2}=l(1)$.

Pour les équations fondamentales, on peut d'abord considérer $e(u_1)\overset{?}{=}e(u_2)$, c'est-à-dire $e(u)\overset{?}{=}1$ pour $u=u_2-u$. Il suffit d'étudier cette équation pour $0\leqslant u<2\pi$, 0 est solution évidente et unique car pour $0<u\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\sin u>0\Rightarrow e(u)\neq 1$; pour $\frac{\pi}{2}<u<\frac{3\pi}{2}$,

$\cos u < 0 \Rightarrow e(u) \neq 1$; enfin pour $\frac{3\pi}{2} \leqslant u < 2\pi$, $\sin u < 0 \Rightarrow e(u) \neq 1$. Ainsi :

$$e(u_1) = e(u_2) \Leftrightarrow u_2 = u_1 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Soit alors :

1) $\sin u_1 \overset{?}{=} \sin u_2$, on a $\cos u_1 = \pm \cos u_2$, d'où $e(u_1) = e(u_2)$ ou $e(u_2) = e(\pi - u_1)$, ainsi $u_2 = u_1 + 2k\pi$ ou $u_2 = \pi - u_1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos u_1 \overset{?}{=} \cos u_2$, on a $\sin u_1 = \pm \sin u_2$, d'où $e(u_2) = e(\pm u_1)$, ainsi

$$u_2 = \pm u_1 + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

3) $\mathrm{tg}\ u_1 \overset{?}{=} \mathrm{tg}\ u_2 \Leftrightarrow [\sin 2u_1 \overset{?}{=} \sin 2u_2$ et $\cos 2u_1 \overset{?}{=} \cos 2u_2]$, d'où $2(2u_1) = 2(2u_2)$, ainsi

$$u_2 = u_1 + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Les inéquations fondamentales sont plus délicates, on peut utiliser les graphiques des fonctions et illustrer sur le cercle trigonométrique; alors :

— Pour $a \in [-1, 1]$:

$$\sin x \leqslant a \Leftrightarrow -\pi - \mathrm{Arc}\sin a \leqslant x \leqslant \mathrm{Arc}\sin a \quad (2\pi)$$
$$\sin x \geqslant a \Leftrightarrow \mathrm{Arc}\sin a \leqslant x \leqslant \pi - \mathrm{Arc}\sin a \quad (2\pi)$$
$$\cos x \leqslant a \Leftrightarrow \mathrm{Arc}\cos a \leqslant x \leqslant 2\pi - \mathrm{Arc}\cos a \quad (2\pi)$$
$$\cos x \geqslant a \Leftrightarrow -\mathrm{Arc}\cos a \leqslant x \leqslant \mathrm{Arc}\cos a \quad (2\pi)$$

— Pour $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{tg}\ x \leqslant a \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x \leqslant \mathrm{Arc}\ \mathrm{tg}\ a \quad (\pi)$$

$$\mathrm{tg}\ x \geqslant a \Leftrightarrow \mathrm{Arc}\ \mathrm{tg}\ a \leqslant x < \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$$

N.B. — *On peut regretter que la notation e(u) ne soit pas très répandue dans l'enseignement secondaire : peut-on espérer qu'elle soit au moins tolérée ? Peut-on espérer enfin qu'un léger aménagement des programmes de 1re C.E. (Notion de primitive, interprétation géométrique. Définition et représentation géométrique d'un nombre complexe) permette un jour de sortir du bourbier ?*