Matériaux pour un dictionnaire

J.-M. CHEVALLIER

L'article ci-dessous n'est pas consacré essentiellement à des questions de vocabulaire ou d'écriture ; je prie les lecteurs habituels de cette rubrique de m'en excuser. D'une part, j'ai eu beaucoup de travail avec la mise au point de la nouvelle « Notice lexicographique » *incluse dans le présent numéro ; d'autre part, je n'ai certes pas fait vœu de ne jamais parler d'autre chose que de langage, mais je ne tiens pas non plus à ce que ma prose se répande dans les diverses rubriques du* Bulletin. *Cette solution un peu boiteuse m'a paru être le moindre mal.*

Aimez-vous l'intrinsèque ?

En publiant dans le numéro spécial 269-270 l'article « Physique mathématique en Sixième », je ne doutais pas que la considération des grandeurs physiques allait provoquer ce qu'on appelle des mouvements divers. Conformément à mon attente, les réactions chez les lecteurs se partagent entre l'adhésion et l'opposition — en France comme à l'étranger. Adhésion bien sûr chez tels collègues qui, s'étant inquiétés en commission Lichnerowicz de savoir « à quel moment les élèves rencontreraient la notion de grandeur », se sont attiré la réponse : « Jamais, c'est une notion périmée ». C'est dire, par là même, que plusieurs membres, et non des moindres, de ladite commission sont des opposants notoires; de même, notre collègue polonaise, M^me^ Krygowska, au cours d'exposés faits à l'I.R.E.M. de Paris, a exprimé son désaccord.

Faire la sourde oreille aux critiques n'est jamais raisonnable, surtout quand elles proviennent de personnes d'une compétence aussi sûre. L'emploi systématique de relations d'équivalence entre des « grandeurs » telles que longueurs, aires, etc., historiquement justifié chez les bâtisseurs de la géométrie grecque, les a entraînés dans des difficultés et dans des détours — souvent ingénieux et à certains égards profitables — que néanmoins le recours au nombre réel permet de court-circuiter. Cet aspect de la thèse adverse me paraît pleinement justifié et nul, je pense, n'est enclin à reprendre à son compte toutes les méthodes des Grecs. Mais il ne serait guère venu aux Grecs, de leur côté, l'idée d'opposer physique et mathématique, sinon peut-être pour donner « tort » à l'univers sensible et « raison » à la géométrie, laquelle *était* la réalité. Formée à la science expérimentale, la conception moderne est autre : je pense que mon article du n° 269-270 ne laisse subsister aucun doute là-dessus.

Que le centimètre soit un objet physique, et non mathématique, d'accord. Tirons même de là, si l'on veut, ce corollaire que les gens qui parlent du centimètre ne sont pas professeurs de mathématiques : leur nom importe peu, pourvu que *quelqu'un* en parle aux élèves. Qui? Comment sera-t-il formé? Aura-t-il autant de scrupules que nous? Cela est une autre histoire qui nous emmènerait trop loin. (Disons seulement qu'il est inquiétant qu'on n'ait pas saisi plus fermement l'occasion d'inscrire de façon cohérente la rénovation — nécessaire — de l'enseignement mathématique dans une refonte, tout aussi nécessaire, de l'enseignement scientifique et technique. De cette inconséquence, nous ne sommes pas, nous mathématiciens, plus coupables que d'autres, mais personne, je le crains, n'est absolument innocent).

Donc, quelqu'un, dès l'enseignement élémentaire, va parler aux élèves du centimètre : dans le meilleur cas, il cherchera à « mathématiser la situation », c'est-à-dire à appliquer ses longueurs, grâce à leur mesure en centimètres, dans un ensemble numérique. Mais, ce faisant, il aura considéré ses longueurs en général et le centimètre en particulier comme des classes d'équivalence — expérimentales, s'entend — sur lesquelles on peut opérer des « additions », des « multiplications » à multiplicateurs numériques, etc. Ce serait malhonnête de le cacher, surtout à soi-même, car plus on en sera conscient, mieux on fera le départ entre ce qui est mathématique et ce qui ne l'est pas. Et ce qui est mathématique peut déjà être très bon, même à ce niveau.

On me dira : sans doute, il faut un peu se salir les mains au début avec des objets physiques, mais après nous serons des purs. Soit, laissons la physique et prenons le nouveau programme de Quatrième : on s'y est donné, je pense, assez de mal pour libérer la « droite » de l'intuition sensible. Or, à travers toutes les bijections qu'on voudra, qu'est finalement un *vecteur*, sinon la classe d'équivalence des couples de réels (u, X) tels que $uX = u'X'$?

Mais à quoi bon prendre tant de peine, puisque $\mathbb{R}$ est *déjà* un espace vectoriel? Tout simplement parce qu'on voulait conférer à ces *vecteurs* un caractère « géométrique », « intrinsèque », que la « coordonnée » X à elle seule est impuissante à leur assurer en l'absence de la « base » u. Cette démarche est exactement celle que l'on adopte lorsqu'on dit que les couples physiques $(cm, 1)$ et $(mm, 10)$ sont équivalents, ou, pour parler comme tout le monde (ou presque), que $1\ cm = 10\ mm$. Pourquoi donc s'en cacher?

Pas question, par conséquent, de se priver des bienfaits du nombre réel, qui nous a donné des moyens d'action dont nos ancêtres grecs ne disposaient pas; mais il serait ridicule que la hantise du nombre réel nous en rende esclaves. Un exemple? A vouloir s'accrocher aux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, chacun aura bientôt sa fonction sinus personnelle, et nous nous voilerons la face devant l'écriture *sin* 45° (nous serons les seuls, bien entendu), alors qu'il suffit d'un minime effort d'imagination pour admettre que les couples $(d, 45)$, $(gr, 50)$, $\left(rd, \frac{\pi}{4}\right)$ sont équivalents et que c'est *cette classe d'équivalence « intrinsèque »* — cette « phase » (1) si l'on veut — que l'application *sinus* envoie sur $1/\sqrt{2}$ (cela n'exclut pas la possibilité de l'abréviation courante $sin\ \frac{\pi}{4}$). On ne fait pas tant de simagrées avec les fonctions *Sin* et *Cos*; il est vrai qu'elles ont la chance, elles, que l'ensemble de départ n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}$, quand on les munit de leurs « additions » respectives.

Le temps où la Sagesse sortait tout armée du cerveau de Zeus est révolu : il nous faut forger, polir et aiguiser ses armes. Au risque de me répéter, je persiste à croire que *l'opération externe* est ici l'instrument de choix. Faire opérer une structure mathématique S dans un ensemble « concret » E, c'est, d'une part se donner la possibilité

(1) Ce n'est pas parce que j'ai proposé « phase » que j'y tiens particulièrement. Mais je m'inquiète de voir les commentaires sur le programme de Première imposer en quelque sorte l'appellation *argument* pour cette notion dans le louable dessein de la distinguer de l'*angle*. Je présume que l'« argument d'un complexe » cessera l'an prochain d'être l'« angle d'une similitude »; on jongle vraiment avec le vocabulaire.

de faire de la physique dans E (ce qui n'est pas négligeable en soi), d'autre part se prémunir contre toute confusion entre les deux domaines. Mais notre « impérialisme » y trouve aussi son compte, car, pour peu qu'intervienne indépendamment une mathématisation de E, nous nous trouvons avoir du même coup fabriqué une structure mathématique S' qui a toutes chances d'être un outil plus puissant que S.

C'est bien pourquoi, tout compte fait, ces « oppositions » ne doivent pas nous inquiéter outre mesure. Si la frontière entre le « concret » et l' « abstrait » est déjà difficile à tracer, que dire de celle qui sépare l'intrinsèque du non-intrinsèque? C'est surtout une question de niveau de langage. Mais par là même c'est une question non triviale de pédagogie.