

Apprentissage de la déduction

Jacques CHAYÉ,

Poitiers.

Un regard un peu rapide sur le renouveau actuel de l'enseignement des mathématiques dans le premier cycle pourrait laisser croire que non seulement les méthodes et les contenus, mais encore les objectifs de cet enseignement n'ont plus guère de points communs avec ceux d'autrefois. Certes, il ne faut

pas minimiser les « révisions déchirantes » qui ont dû et qui doivent encore être faites, mais il serait abusivement simpliste de prétendre par exemple que l'apprentissage de la déduction est tombé en désuétude! Il est vrai que les clichés sur « la géométrie, école privilégiée de la déduction » ou sur « la classe de Quatrième, âge du déductif » sont passés de mode, mais l'éducation du raisonnement n'en demeure pas moins une des préoccupations de l'enseignement modernisé de la mathématique.

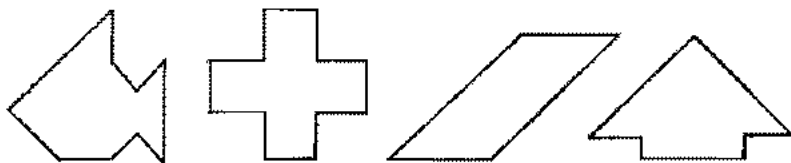
Le présent article se propose, sans indication précise de niveau ou de classe, de montrer comment une préparation logique et une préparation psychologique étroitement mêlées peuvent contribuer à former chez le jeune élève le goût de la déduction et le sens de la rigueur; pour des raisons de commodité nous utiliserons une certaine progression éclairée à chaque étape d'exercices pratiqués en 1969-70 dans une classe du premier cycle : ce découpage un peu artificiel est à interpréter avec beaucoup de souplesse.

• Indépendamment de tout enseignement mathématique, l'enfant même très jeune est capable d'une certaine déduction lorsqu'il se trouve, à l'occasion d'un jeu par exemple, amené à opérer un choix ou imaginer une stratégie; mais habituellement il n'en prend pas conscience car il est uniquement motivé par le résultat à atteindre et ses « raisonnements » plus ou moins explicités ne lui apparaissent pas comme une aide dans sa recherche.

Certains « casse-tête » sont assez précieux à ce sujet, car pour les résoudre, la seule intuition est insuffisante, ce qui conduit l'enfant à procéder par élimination; il le fait souvent de façon très « locale » et désordonnée; il est alors opportun de lui faire découvrir les avantages de la réflexion.



On trouve par exemple dans le commerce, des boîtes constituées de sept plaquettes représentées ci-dessus, à l'aide desquelles il est demandé de reconstituer certaines figures comme les suivantes :



Immédiatement, des incompatibilités, des impasses apparaissent; le joueur en déduit que seules certaines positions sont possibles et de proche en proche il obtient la solution ou les solutions.

Ce genre d'activités encourage l'étude méthodique et réfléchie; ce ne sont pas encore des mathématiques, mais il n'est pas mauvais que l'enfant soit passé par ce stade pour acquérir le goût de la recherche raisonnée.

D'un niveau plus élevé, la pratique du jeu de dames ou celle du jeu d'échecs est dans cette optique très recommandable, mais elle n'a pas pour tous le même attrait.

* Sans vouloir tuer l'intuition il est nécessaire d'apprendre aux jeunes élèves à se méfier de l'évidence. A cet effet, de nombreux paradoxes pourront épisodiquement leur être présentés; ils constitueront une motivation supplémentaire au raisonnement; citons, parmi bien d'autres, l'exemple suivant : une bouteille et son bouchon coûtent ensemble 11 F, la bouteille coûte 10 F de plus que le bouchon, combien coûte la bouteille? (réponse irréfléchie : 10 F; réponse exacte à laquelle permet d'aboutir un petit raisonnement : 10 F 50 centimes).

• Dans le même ordre d'idée, on peut remarquer que l'enfant se satisfait souvent de quelques vérifications pour établir une loi générale; des exercices de mise en garde seront d'un grand profit.

Exemple : soit $f(n) = n^2 - n + 41$.

Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, etc.

Les nombres obtenus sont-ils premiers?

On trouve : $f(0) = 41$, $f(1) = 41$, $f(2) = 43$, $f(3) = 47$, $f(4) = 53$, $f(5) = 61$, ...

Tous ces nombres sont premiers et la propriété « marche » jusqu'à 40 compris; pourtant il est immédiat de vérifier que $f(41)$ n'est pas premier.

A ce propos il faut veiller à ne pas donner aux élèves l'impression que pour certaines questions, comme par exemple l'associativité d'une opération, on se contente de quelques contrôles avant d'affirmer une règle dans toute sa généralité; il est important de préciser que les sondages ne sont faits que pour faire découvrir la propriété ou pour donner bon espoir quant à sa validité, ils ne dispensent pas, soit d'une preuve par exhaustivité dans le cas fini (pas trop grand!), soit d'une démonstration à l'aide de variables. Si on est obligé d'admettre la propriété parce que le niveau de la classe ne permet pas d'en établir la preuve il faudra le dire expressément; si enfin la « propriété » est en fait choisie comme un axiome de la structure étudiée, le cas est totalement différent puisqu'il n'est pas question de contrôles à l'intérieur de la structure elle-même, mais d'expériences portant sur le domaine concret à mathématiser, elles n'ont aucun caractère de preuves. C'est bien là que réside la plus grande difficulté des présentations axiomatiques de la géométrie, car malgré les précautions oratoires qui pourront être prises il n'est pas sûr que les élèves saisissent la différence entre les lois de la géométrie physique constatées expéri-

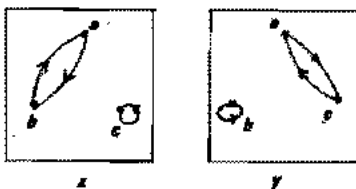
mentalement et les axiomes choisis dans la théorie pour mathématiser la situation (choisis non parce qu'ils ont été prouvés, mais parce qu'ils constituent une description assez adéquate du support concret).

• La lassitude ou l'ennui que peut procurer la démonstration par exhaustivité d'une propriété dans un cas fini même peu élevé fournit l'occasion de rechercher une preuve plus économique et élégante.

Prenons par exemple le cas de l'associativité de l'addition ou de la multiplication dans les entiers modulo 3 ou modulo 4; l'épuisement de tous les cas nécessiterait le contrôle de 27 ou 64 égalités, alors que la démonstration classique ou une préfiguration même approximative de celle-ci apportera un soulagement indéniable et l'impression de disposer d'un outil très fort.

• Avant tout exemple de démarche axiomatique des exercices préparatoires seront utilement proposés, pour lesquels l'utilisation systématique de certaines règles permet une étude rapide et complète.

Exemple : soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble de trois éléments; soient x et y les deux bijections de E représentées ci-contre et soit i la bijection identique de E ; construire la table de composition des six bijections : $i, x, y, x \circ y, y \circ x, x \circ y \circ x$.



La construction des 36 diagrammes sagittaux n'est pas du tout nécessaire; la situation est complètement décrite par exemple par les règles suivantes :

- l'opération est associative (propriété démontrée antérieurement d'une façon générale),
- l'élément i est neutre,
- $x \circ x = y \circ y = i$,
- $x \circ y \circ x = y \circ x \circ y$.

Les enfants ne découvriront pas immédiatement le résultat tel qu'il vient d'être énoncé, mais il est possible de les amener à utiliser au moins partiellement ces règles pour la construction de la table; on peut ensuite revenir sur l'exercice ou sur un cas isomorphe.

• Un point de vue plus abstrait consiste à s'imposer les quatre règles ci-dessus pour l'ensemble : $\{i; x; y; x \circ y; y \circ x; x \circ y \circ x\}$ muni d'une loi notée \circ , soit à partir d'une situation qui en donne l'idée, soit au contraire avant d'en chercher une interprétation.

Détaillons dans cet esprit un autre exercice (qui d'ailleurs conduit au

même groupe S_3) : soit G un ensemble de six éléments e une opération $*$ dans G ; on suppose que :

- l'opération est associative,
- l'élément i de G est neutre,
- les éléments a et b de G vérifient :

$$a * a * a = i, \quad b * b = i, \quad b * a = a * a * b,$$

- les trois autres éléments de G peuvent s'écrire respectivement :

$$a * a, \quad a * b, \quad b * a.$$

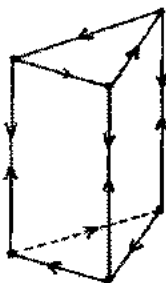
Construire la table de l'opération $*$ dans G .

Les règles sont aisées à appliquer et les enfants se piquent au jeu; par exemple, pour « calculer » le composé de b par $a * a$ ou celui de $b * a$ par a , on écrira, en tenant constamment compte de l'associativité :

$$\begin{aligned} b * a * a &= a * a * b * a \\ &= a * a * a * a * b \\ &= i * a * b \\ &= a * b. \end{aligned}$$

Ici, contrairement au cas de la géométrie, le caractère axiomatique apparaît nettement, ce qui n'empêche pas que les interprétations concrètes de cette structure soient multiples, citons par exemple la suivante :

Une « mouche savante » se déplace d'un sommet à un autre sur le prisme ci-dessous, en suivant les instructions qui lui sont données :



Instruction a : quel que soit le sommet où elle se trouve, la mouche doit se déplacer horizontalement en décrivant une seule arête dans le sens de la flèche.

Instruction b : la mouche doit changer de niveau en décrivant une arête verticale.

Pour aller d'un point à un autre, plusieurs suites d'instructions sont possibles; on peut chercher les plus simples puis constater que la suite de

deux instructions simples peut souvent elle-même être simplifiée. Finalement les instructions réduites sont au nombre de six et leur « succession » est décrite comme dans le groupe précédent par des règles qui permettent de construire la table de Pythagore, de résoudre des « équations », de « simplifier » des instructions, etc.

Le passage *situation concrète-mathématisation* et le passage dans l'autre sens *structure mathématique-interprétation* sont toujours possibles et souhaitables dans de tels exemples.

• C'est donc à apprendre à appliquer la règle du jeu et à en donner le goût que tendaient les exercices précédents mais, conjointement, l'apprentissage de la déduction doit comporter l'acquisition d'un certain bagage logique propre à garantir le bien-fondé des raisonnements formulés; insistons seulement sur trois points :

1° le langage et la pensée ensemblistes sont de précieux auxiliaires pour cette formation logique; soit $P = \{x/x \in E/p(x)\}$ et $Q = \{x/x \in E/q(x)\}$, rappelons le parallélisme :

$x \in \bigcup_x P$	$\neg p(x)$
$x \in P \cap Q$	$p(x) \wedge q(x)$
$x \in P \cup Q$	$p(x) \vee q(x)$
$x \in \bigcup_x P \cup Q$	$p(x) \Rightarrow q(x)$
$x \in \bigcup_x (P \Delta Q)$	$p(x) \Leftrightarrow q(x)$
$P = E$	$\forall x, p(x)$
$P \neq \emptyset$	$\exists x, p(x)$
$P \subset Q$	$\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$
$P = Q$	$\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)$

2° les notions de conséquence, de réciproque, d'équivalence, sont à inculquer dès que possible. Il est important que l'élève sache faire la distinction entre le cas où une proposition est une conséquence d'une autre, sans qu'il y ait réciprocity et le cas où il y a équivalence. On objectera que le discours, l'écriture, la lecture, s'effectuent dans le temps « en sens unique », mais précisément, plus on attendra pour apprendre à raisonner par équivalence (lorsque c'est possible) plus l'étape sera difficile à franchir et les rébarbatifs raisonnements par analyse et synthèse (?) sont de ce point de vue de piètres serviteurs. Il est faux de dire qu'un enfant de Cinquième ou de Quatrième ne peut pas faire la distinction entre les deux cas :

« $x + 2 > 3$ revient au même que $x > 1$ »

« si $x + 2 > 3$ alors $x > 0$ »;

de même, il sait très bien que $A = B$ n'est pas synonyme de $A \subset B$.

3° l'usage de propositions quantifiées et de leurs négations est un aspect important de cette formation logique; les propriétés éventuelles des relations dans un ensemble (réflexivité, symétrie, etc.) ou des lois de composition interne (commutativité, associativité, etc.) sont autant d'occasions de se familiariser avec ces notions par la recherche d'exemples et de contre-exemples.

* * *

Nous avons essayé d'analyser les moyens d'amener progressivement l'enfant de la déduction primitive, inconsciente, fragmentaire et inorganisée à la déduction mathématique proprement dite. Une préoccupation dont nous n'avons pas encore parlé et qui, quoique un peu en marge du sujet, est pourtant une des composantes non négligeable de l'art de la démonstration, est la mise en forme du raisonnement; celle-ci est nécessaire à la communication et elle contribue en outre à clarifier la structure de la déduction elle-même.

Lorsque pour la première fois les élèves ont à prouver une propriété dont la démonstration est un peu ramifiée, il peut être utile pour les guider de leur soumettre un schéma visualisant l'organisation du raisonnement.

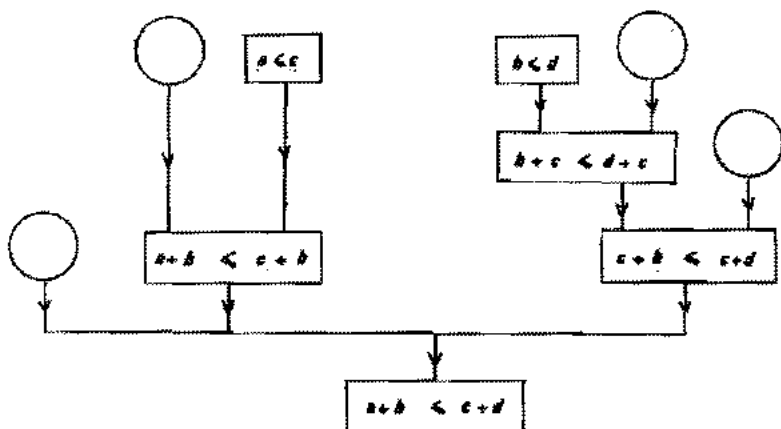
Exemple : pour démontrer que, quels que soient les décimaux a, b, c, d ,
 « si $a < c$ et $b < d$, alors, $a + b < c + d$ »

sachant déjà que :

1. quels que soient les décimaux x, y, z ,
 si $x > y$, alors, $x + z > y + z$

2. l'addition des décimaux est commutative.

3. la relation $<$ dans l'ensemble des décimaux est transitive. On demande, de compléter le schéma suivant en indiquant dans les cases rondes le numéro de la propriété utilisée :



Cependant, il faudra tôt ou tard que l'élève sache de lui-même, exposer clairement les tenants et les aboutissants d'un problème mathématique.

Utilisera-t-il alors les symboles logiques des connecteurs et des quantificateurs dans sa rédaction? Peu importe, pourvu que, s'il s'en sert, il le fasse à bon escient et que, s'il ne s'en sert pas, sa pensée soit juste et limpide.

Dans ces conditions, l'enseignement des mathématiques aura atteint un de ses buts : contribuer efficacement à l'éducation du jeune citoyen en lui apprenant à formuler des jugements réfléchis, rigoureux et compréhensibles.