1

Études

Une petite aventure mathématique

Georges GLAESER,
Directeur de l'I.R.E.M. de Strasbourg.

Rares sont les témoignages du mathématicien sur l'enchaînement d'idées qui l'ont conduit à une découverte. Un tel texte serait instructif pour le professeur dont la mission est d'entraîner ses lycéens à l'imagination et à la curiosité. Mais la compréhension des thèmes de recherche contemporaine suppose des connaissances de base qu'il faudrait assimiler avant d'être en mesure de suivre le cheminement heuristique de la pensée lors de la solution.

Dans mon programme de recherche de l'an dernier s'insère un résultat partiel qui, isolé de son contexte, peut être exposé en n'exigeant que des connaissances très élémentaires de l'auditoire. Il s'agit d'un problème sur la géométrie des ensembles finis de l'espace euclidien. Sa solution constitue une aventure mathématique que je vais tenter de relater en restituant son déroulement dans le temps.

Plusieurs années de maturation plus ou moins inconsciente ont abouti, après un mois de réflexion plus systématique, à une conjecture précise : puis, après six semaines de « bricolage » actif et désordonné, la solution a jailli en moins d'une heure; après quoi la vérification minutieuse, la rédaction et les exposés oraux en séminaire, ont traîné assez longtemps...

Lorsqu'on connaît la réponse à une question, il est pénible d'avouer que certaines idées, évidentes *a posteriori*, ont mis beaucoup de temps à germer et à se préciser. Mais, par définition, un chercheur est grossièrement ignorant *avant* et un peu plus savant *après :* c'est cette transformation que je vais essayer de décrire.

1. Une situation très vague.

La différence des valeurs que peut prendre une fonction f continûment dérivable en deux points A et B d'un espace euclidien s'obtient en intégrant sa différentielle le long d'une courbe joignant B à A. Et l'on peut écrire des majorations telles que :

$$|f(A) - f(B)| \leq (\mathrm{Max}\,\|\mathrm{grad}\, f\|) \times \text{longueur } \widehat{AB}.$$

Lorsqu'on veut étudier des expressions analogues, qui sont des combinaisons linéaires des valeurs de f en plusieurs points, on essaie de joindre ces points par diverses courbes le long desquelles on effectue l'intégration : cette jonction peut s'effectuer *a priori* de nombreuses façons, que l'on cherchera à optimiser.

Depuis dix ans, j'ai maintes fois essayé de préciser la géométrie des ensembles finis, en liaison avec cette situation. Je me souviens d'avoir proposé à un jeune agrégé qui voulait s'essayer à la recherche pendant les vacances d'examiner la question suivante : « Étant donné un ensemble fini de villes, étudier un réseau routier dont la longueur totale soit la plus petite possible, permettant de joindre ces villes entre elles. »

Cet étudiant m'a, par la suite, remis une rédaction de quelques pages réunissant les remarques simples que l'on peut faire sur un tel réseau (*). Mais ce thème de recherche ne semblait pas offrir d'autres débouchés et n'a constitué qu'un exercice de débutant.

Plusieurs de mes publications antérieures abordent des questions analogues.

2. La situation se précise.

L'an dernier j'ai fini par comprendre qu'il fallait affecter les points A_i de coefficients réels λ_i, dont la somme $\Sigma\lambda_i$ est nulle, et considérer les formes linéaires qui associent à une fonction f la somme $\Sigma\lambda_i f(A_i)$.

Un ami topologiste m'a révélé qu'un tel système pondéré de points s'appelle une 0 — *chaîne d'augmentation nulle.*

Et finalement, le contexte suggérait d'examiner le cas où f est une *fonction lipschitzienne* (**).

Pour évaluer la « grandeur » d'une 0 — chaîne $\gamma = (A_i, \lambda_i)$ d'augmentation nulle, l'analyse fonctionnelle invite à lui associer la norme :

$$(1) \qquad N(\gamma) = \mathrm{Sup}\,|\Sigma\lambda_i f(A_i)|$$

(*) Ce problème a fait l'objet de la note C. R. Académie des Sciences, 31 janvier 1938, pp. 310-312 de G. Choquet.

(**) Une fonction numérique f définie sur un espace métrique E est *lipschitzienne* s'il existe un coefficient K (de Lipschitz) tel que, pour tout couple de points M. N de E,

$$|f(M) - f(N)| < K\,\mathrm{dist}\,(M, N).$$

où f décrit l'ensemble $\mathcal{B}$ des fonctions telles que $\left|\dfrac{f(A) - f(B)}{||AB||}\right| \leq 1$, pour tout couple de points distincts du plan euclidien.

Mais le calcul de $N(\gamma)$ s'obtient indirectement, en faisant intervenir un ensemble $\mathcal{B}$ de fonctions-tests.

Problème. Est-il possible d'évaluer $N(\gamma)$ en n'effectuant que des mesures « géométriques », c'est-à-dire en ne faisant intervenir que les distances mutuelles entre les points A_i et la valeur des coefficients λ_i?

J'ai obtenu une autre expression, susceptible d'être comparée à $N(\gamma)$, en reformulant le problème dans un autre langage.

Pour cela j'ai rebaptisé P_i (resp C_j) ceux des points A_i qui étaient affectés de coefficients positifs α_i (resp négatifs $-\beta_j$).

Les points P_i (resp C_j) sont des *producteurs* (resp *consommateurs*) qui produisent (resp consomment) une marchandise en quantité α_i (resp β_j). La marchandise produite est entièrement consommée (puisque $\Sigma\lambda_i = 0$). Il s'agit de trouver *l'itinéraire optimal* pour transporter la marchandise des producteurs aux consommateurs : le long d'un chemin P_iC_j (nécessairement rectiligne), on transporte une quantité $\lambda_{ij} \geq 0$ de marchandise. (On a évidemment $\alpha_i = \sum\limits_j \lambda_{ij}$ et $\beta_j = \sum\limits_i \lambda_{ij}$.)

Le coût du transport, correspondant à cet itinéraire, est représenté par la somme :

$$(2) \qquad T(\gamma) = \sum_{i,j} \lambda_{ij}||P_iC_j||.$$

3. La conjecture.

Il est plausible qu'un rapport existe entre $T(\gamma)$ et $N(\gamma)$. Mais plusieurs semaines, occupées à manipuler ces grandeurs, me furent nécessaires pour oser formuler la conjecture surprenante « *$T(\gamma)$ et $N(\gamma)$ sont égales* ».

Six semaines plus tard, cette conjecture devenait un théorème. (Bien entendu, je n'ai pas fait que cela pendant ces six semaines, mais j'y revenais plusieurs fois par jour, pour ne pas parler des insomnies nocturnes.)

Dès que cette conjecture fut claire et crédible dans mon esprit, j'allais consulter divers ouvrages de base sur la théorie des graphes : j'y trouvais des références sur mon problème de transport, très populaire en « Programmation linéaire ».

En particulier, je relus le petit fascicule que Paul Appell avait publié dans le « Mémorial des Sciences Mathématiques » intitulé « Le problème des remblais et des déblais » et qui m'avait amusé au temps où je préparais la licence. J'y appris que ce problème avait été abordé par Gaspard Monge en 1781! Mais surtout, ce livre attira mon attention sur une remarque très utile, qui est immédiate à démontrer :

(3) « Il est suffisant d'envisager le cas où le nombre n des points P_i est égal à celui des C_j et où tous les α_i et β_j sont égaux. »

(En effet, si P_1 est un producteur pour lequel $\alpha_1 = 2$, il est possible de le remplacer par deux points très voisins de P_1 affectés chacun du coefficient 1, sans commettre une erreur appréciable.)

Cette remarque me permit de me borner à envisager ce cas simple. Auparavant, je me souviens d'avoir passé plusieurs heures à tracer des figures aux crayons de couleurs, choisissant arbitrairement des données et cherchant à deviner l'allure de l'itinéraire optimal, sous l'œil intéressé de mon jeune fils qui gribouillait aussi « comme papa »!

Le problème du transport est aujourd'hui classique pour les usagers de l'ordinateur : je pris contact avec un centre de calcul pour que l'on me fournît des échantillons nombreux d'itinéraires optimaux, notamment dans l'espace à trois dimensions, afin de guider mon intuition; ce genre de mathématiques expérimentales m'avait réussi dans le passé, mais cette fois je ne pus obtenir les premiers résultats numériques que quinze jours après avoir résolu mon problème!

On notera que j'avais adopté une attitude très active vis-à-vis du problème, dessinant, calculant, examinant de nombreux cas particuliers. Mon bureau fut rapidement jonché de feuilles portant des bribes de calcul, notamment des inégalités telles que :

$$\|P_1C_1\| + \|P_2C_2\| + \|P_3C_3\| \leq \|P_1C_3\| + \|P_2C_3\| + \|P_3C_1\|$$

qui exprimaient que, dans la situation (3), l'itinéraire qui relie chaque P_i au C_i de même indice est optimal.

Un progrès décisif vint de ma lassitude à traîner ces longues inégalités : j'adoptais quelques notations plus condensées.

Définitions : Un *chemin d'indices* (d'origine i_0 et d'extrémité i_k) est une suite finie d'indices $(i_0, i_1, \ldots, i_k)$ (tous inférieurs à n) et un *circuit d'indices* est un chemin dont l'origine est égale à l'extrémité. Posant, pour tout chemin d'indices $(i_0, i_1, \ldots, i_k)$,

$$\delta(i_0, i_1, \ldots, i_k) = (\|P_{i_0}C_{i_1}\| - \|P_{i_0}C_{i_0}\|) + (\|P_{i_1}C_{i_2}\| - \|P_{i_1}C_{i_1}\|) \cdots$$

j'aboutis à la caractérisation suivante des itinéraires optimaux :

Proposition : Une condition nécessaire et suffisante pour que l'itinéraire

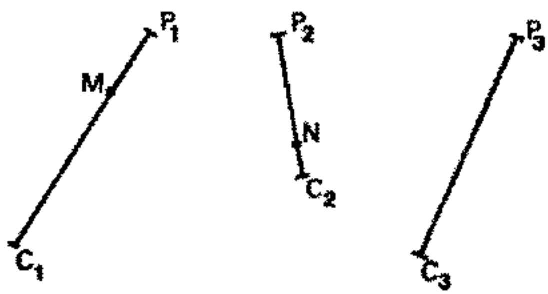
(4) $[P_1C_1], [P_2C_2], \ldots, [P_nC_n]$ (sous les hypothèses (3))

soit optimal est que, pour tout circuit d'indices $(i_0, i, \ldots, i_0)$, on ait :

$$\delta(i_0, i, \ldots, i_0) \geq 0.$$

Pour démontrer la conjecture, il suffisait de construire une fonction $f \in \mathcal{B}$ telle que, pour tout couple $[P_iC_i]$ prélevé dans un itinéraire optimal, $f(P_i) - f(C_i) = ||P_iC_i||$. Une telle fonction est nécessairement affine (de pente -1) le long du segment $[P_iC_i]$.

Si l'on connaissait les valeurs $X_i = f(P_i)$, on pourrait reconstituer la fonction le long du segment $[P_iC_i]$.



Il suffirait alors de vérifier que la condition de Lipschitz est satisfaite pour tout couple de points M et N prélevés sur deux segments distincts pour que l'on puisse prolonger la fonction à tout l'espace euclidien ambiant (en vertu d'un théorème classique de Mac-Shane, bien connu de ceux qui manipulent les fonctions lipschitziennes).

Bref, six semaines après avoir formulé la conjecture, je prouvais que le théorème se réduisait à la solution du système d'inégalités suivantes :

(5) $\quad X_i - X_j \leq \delta(i, j)$ (où i et j sont des indices $\leq n$).

4. La démonstration.

Parvenu à ce point, tout le reste se dénoua très vite, un dimanche soir entre 21 heures et 22 heures, pendant l'audition d'un concert de chambre à la radio !

Toute solution du système (5) satisfait, *ipso facto*, à d'autres inégalités, telles que :

$$(X_i - X_k) + (X_k - X_j) \leq \delta(i, k) + \delta(k, j) = \delta(i, k, j),$$

et en particulier

$$X_i - X_j \leq \delta(i, \ldots, j)$$

pour tout chemin d'indices, d'origine i et d'extrémité j. Il est alors naturel d'étudier la borne inférieure

$$\Phi(i, j) = \operatorname{Inf}(\delta(i, \ldots, j)).$$

Or, cette borne inférieure est *toujours finie !*

(Et ce résultat me parut très encourageant.)

En fait, cette borne inférieure est atteinte pour un chemin d'indices $(i, \ldots, j)$, dont tous les indices sont distincts (et il n'y a qu'un nombre fini de tels chemins).

En effet, si un chemin d'indices répète deux fois l'indice ℓ, la contribution du circuit $\underbrace{\ell, \ldots, \ell}$ dans $\delta(i, \ldots \underbrace{\ell, \ldots \ell}, \ldots j)$ est positive, en vertu de (4).

Ceci posé (réminiscence de situations analogues), on vérifie immédiatement que $\Phi(i, j)$ satisfait à l'inégalité du triangle

$$\Phi(i, j) \leq \Phi(i, k) + \Phi(k, j),$$

et que l'on satisfait au système (5) en posant

$$X_i = \Phi(i, 1).$$

Le théorème est démontré.

5. La vérification.

Je suis personnellement enclin aux exaltations abusives... Comme disait Kroutchev, « il ne faut pas se hâter de chanter cocorico avant d'avoir pondu un œuf ».

Aussi, ayant repris mon calme, je consacrais beaucoup de temps la semaine suivante à examiner minutieusement chaque maillon du raisonnement, à écrire plusieurs rédactions vérificatrices avant d'exposer oralement le résultat en séminaire.

Avant de publier (*) le théorème dans son contexte, il faudra encore que je décante le texte, que je débarrasse l'exposé des considérations heuristiques superflues qui n'intéresseront pas les spécialistes, pour ne garder que la démonstration sous un aspect plus formalisé. Il n'est pas d'usage de mentionner dans une revue scientifique la durée des investigations. « Le temps ne fait rien à l'affaire! »

Cependant, dans tous les cas de recherche de longue haleine dont j'ai connaissance, le scénario semble être le même. Une très longue maturation inconsciente (dont l'auteur perd généralement le souvenir), une période de « bricolage » intensif, suivi d'une illumination soudaine!

Après quoi, une vérification méticuleuse s'impose.

6 Épilogue.

Après lecture de ce texte, P. Cartier m'a indiqué une démonstration beaucoup plus courte, basée sur le théorème de Hahn-Banach. Elle met en œuvre une méthode qui permet de résoudre beaucoup de problèmes analogues, et en particulier certains que je ne savais pas encore résoudre.

Il est fréquent qu'une « aventure mathématique » se termine par un tel épisode, décevant, en apparence, pour celui qui, ayant longtemps cherché, trouve son effort court-circuité. En fait, il n'y a pas lieu de s'en chagriner : c'est uniquement ainsi — à la sueur de sa propre recherche — que l'on apprend vraiment des mathématiques!

(*) Séminaire Goulaouic-Schwartz École Polytechnique, 1970-1971). Exposé 16.