Sommaire

50e année - N° 279 - Mai-Juin 1971

Le Bulletin contient, en plus, cinq fiches de « la mathématique parlée par ceux qui l'enseignent » : *adjacent, noyau, secteur*.

Introduction

La Réforme dans le premier cycle, deuxième étape.

Bien que de conception différente, ce Bulletin *est le prolongement de celui (n° 269-270) consacré à la Sixième. Il y a deux ans les nouveaux programmes de Sixième et de Cinquième marquaient une véritable innovation, à la fois dans le contenu et dans les implications pédagogiques. L'enthousiasme des enseignants pour la réforme transparaissait dans les articles et il en est résulté un* Bulletin *vivant, plein d'humour et agréable à lire. Ce* Bulletin *sur la Quatrième n'aura malheureusement peut-être pas toutes ces qualités, son but essentiel étant d'aider les enseignants à préparer leur cours conformément aux nouveaux programmes établis par la Commission ministérielle présidée par Lichnerowicz. Rappelons que l'A.P.M.E.P., reconnaissant dans les nouveaux programmes un progrès par rapport aux anciens et considérant l'intérêt immédiat des enseignants, a fini par appuyer les travaux de cette commission et a décidé la parution de ce* Bulletin.

Les programmes de Sixième et de Cinquième ont un caractère essentiellement expérimental : apprentissage du langage ensembliste à partir de manipulations concrètes, activités physiques de mesurage, retour sur les entiers naturels, construction, toujours expérimentale, des entiers relatifs, calcul algébrique dans $\mathbb{Z}$...*; par contre les programmes de Quatrième présentent un caractère plus théorique faisant intervenir pour une plus large part la déduction. C'est pourquoi nous avons voulu donner de nombreux articles uniquement mathématiques permettant aux enseignants de se familiariser avec les nouveaux programmes et de les dominer ; de nombreux expérimentateurs relatent leur enseignement en*

Quatrième et en tirent des conclusions qui profiteront ainsi à tous, ils donnent également beaucoup d'exemples de ce qu'ils ont réalisé dans leurs classes expérimentales.

Afin de permettre à nos collègues de disposer aisément de toute la documentation souhaitable nous publions la dernière version des Programmes établie par Commission Ministérielle (la parution officielle au B.O. *n'étant pas faite à la date de rédaction de ce* Bulletin) *et nous avons réparti les différents articles en quatre chapitres. A savoir :*

Chapitre 1 : *Les Décimaux et les Réels.*

Chapitre 2 : *La Géométrie.*

Chapitre 3 : *Comptes rendus d'expériences.*

Chapitre 4 : *En marge du Programme, les problèmes de fond.*

La Rédaction remercie chaleureusement les Collègues qui lui ont fourni ces matériaux et lui ont fait confiance pour leur aménagement. Pour faciliter la tâche du lecteur elle présente, en tête de chaque chapitre, une brève analyse dont elle assume naturellement la responsabilité.

C'est l'existence d'une large expérimentation qui a permis de compléter et d'éclairer les articles de fond par des articles plus pédagogiques et plus proches des réalités de l'enseignement. Cela prouve qu'une réforme ne peut être entreprise et continuée valablement que si elle est précédée et accompagnée d'une expérimentation ; or il semble bien que l'administration de l'Éducation Nationale veuille freiner, voire arrêter, l'expérience pédagogique en Mathématiques. Il faudra réclamer la poursuite des expériences car ces nouveaux programmes ne peuvent être qu'une étape, le dernier chapitre explique pourquoi.

P. BUISSON.

FAITES CONNAITRE A TOUS LES COLLÈGUES ENSEIGNANT EN CLASSE DE QUATRIÈME L'EXISTENCE DE CE BULLETIN SPÉCIAL.

Pour se le procurer :

le commander (en joignant un chèque d'un montant de 10 F, au compte de A.P.M.E.P., Paris 5708-21) à :

M. BLONDEL,
154, avenue M.-Cachin, 92-Chatillon-sous-Bagneux.

Programme pour la classe de Quatrième

Il est rappelé que les professeurs ont toute liberté pour choisir l'ordre dans lequel les différentes parties du programme sont étudiées.

L'importance de chacune d'elles et le temps à y consacrer ne sont pas proportionnels à la longueur de leur libellé : les questions qui ne figuraient pas dans les programmes antérieurs, ou qui n'y figuraient pas sous la même forme, ont fait, en général, l'objet d'une rédaction plus détaillée.

I. — Relations.

Révision des notions présentées dans les classes antérieures et compléments : produit cartésien, relation, application, composition des applications, bijection d'un ensemble sur un ensemble et bijection réciproque.

Notion de groupe : définition (on la dégagera des exemples du programme).

II. — Nombres décimaux relatifs et approche des réels.

1. *Groupe des puissances de dix.*

Nombres décimaux relatifs écrits $a.10^p$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$ et sous forme de nombres à virgule : addition, multiplication, ordre, valeur absolue. Résumé des propriétés fondamentales de l'ensemble ainsi structuré des décimaux relatifs.

2. *Calculs approchés.*

a) Encadrement d'un nombre décimal par des intervalles des types

$$[a.10^p, (a+1)10^p[, \qquad]a.10^p, (a+1)10^p], \qquad [a.10^p, (a+1)10^p]$$

avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Sur des exemples : encadrement d'une somme, d'un produit.

b) Exercices de détermination, pour un décimal strictement positif d donné et pour un entier relatif n donné, du nombre décimal $x.10^n$, avec $x \in \mathbb{N}$, tel que soient vérifiées les inégalités $0 \leqslant d.x.10^n \leqslant 1 < d(x+1).10^n$.

c) Exercices de détermination, pour un décimal strictement positif d donné et pour un entier relatif n donné, du nombre décimal $y.10^n$ avec $y \in \mathbb{N}$, tel que soient vérifiées les inégalités : $[y.10^n]^2 \leqslant d < [(y+1).10^n]^2$.

d) Suites décimales illimitées, nombres réels, encadrements d'un nombre réel.

3. *Énumération des principales propriétés* qui structurent l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels : addition, $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif; multiplication, associativité, distributivité par rapport à l'addition; ordre et valeur absolue.

On admettra que pour tout nombre réel a différent de 0 il existe un nombre réel a^{-1} et un seul tel que $aa^{-1} = 1$. Pour tout couple de nombres réels (a, b) avec $a \neq 0$, il existe un nombre réel unique x, appelé quotient de b par a, et noté ba^{-1} ou $\frac{b}{a}$ tel que $ax = b$. Exercices simples de calcul sur de tels quotients.

Sur des exemples numériques, équations et inéquations du premier degré à une inconnue.

Usage des exposants entiers : groupe des puissances d'un nombre réel non nul.

Calculs approchés sur les nombres réels.

4. *Exemples de fonctions polynomes* (applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Degré. Exercices de calcul sur les polynomes.

Produits $(x + a)^2$, $(x - a)^2$, $(x + a)(x - a)$. Exercices de factorisation.

III. — Géométrie de la droite.

A la fin de l'année scolaire, la géométrie, née de l'expérience, devra apparaître aux élèves comme une véritable théorie mathématique; c'est-à-dire que des faits ayant été admis (axiomes), d'autres en sont déduits (théorèmes). Mais il est absolument indispensable que de nombreuses manipulations, des exercices pratiques utilisant les instruments de dessin aient précédé à la fois l'énoncé des axiomes et tout raisonnement. Le but de l'enseignement des mathématiques dans cette classe est de faire comprendre aux élèves ce que sont des démonstrations et de leur apprendre à en rédiger; les prémisses devront donc être précisées avec soin. On pourra adopter comme axiomes ceux qui sont indiqués dans les commentaires; mais d'autres choix demeurent légitimes.

1° *Droite.* Distance de deux points sur une droite, repères normés d'une droite. Abscisse d'un point M dans un repère normé; notation $\overline{MM'}$.

Changement de repères normés sur une droite.

Expression de la distance de deux points en fonction de leurs abscisses dans un repère normé.

Changement d'unité.

2° *Ordre sur une droite.* Droite orientée (ou axe). Demi-droite. Segment. Milieu de deux points. Exercices sur les barycentres de deux points.

IV. — GÉOMÉTRIE PLANE.

1° *Droites du plan.* Détermination d'une droite par deux points. Droites parallèles. Le parallélisme est une relation d'équivalence; définition d'une direction de droites comme classe d'équivalence.

Projection, de direction donnée, du plan sur une droite, d'une droite sur une droite.

Énoncé de Thalès. Rapport de projection, pour une direction donnée, d'un axe sur un axe.

2° *Triangle.* Applications de l'énoncé de Thalès au triangle.

Projection sur une droite : de milieux, de barycentres. Construction graphique du barycentre de deux points donnés, affectés de coefficients donnés.

Symétrie par rapport à un point (symétrie centrale) : image d'une droite.

Parallélogramme propre ou aplati (défini par l'existence d'un centre de symétrie). Parallélisme des droites portant les côtés d'un parallélogramme propre; réciproque. Projection d'un parallélogramme; réciproque.

3° *Équipollence de bipoints.* C'est une relation d'équivalence. Vecteurs et translations, addition des vecteurs et composition des translations.

Direction d'un vecteur non nul.

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Propriétés.

Deux vecteurs de directions distinctes étant donnés, tout vecteur en est combinaison linéaire d'une manière et d'une seule. Repères du plan; coordonnées cartésiennes par rapport à un repère.

Exercices de calcul vectoriel; médianes d'un triangle.

Annexe au programme de Quatrième.

Géométrie de la droite.

On appelle *droite* un ensemble D d'éléments dits points, muni d'une bijection g de D sur $\mathbb{R}$ et de toutes celles f qui s'en déduisent de la manière suivante : a étant un nombre réel arbitraire, on a :

soit
$$f(\mathrm{M}) = g(\mathrm{M}) + a$$

soit
$$f(\mathrm{M}) = -g(\mathrm{M}) + a$$

La famille des bijections f s'appelle une structure euclidienne.

Si M, M' sont deux points de D, le nombre positif

$$d(\mathrm{M}, \mathrm{M}') = f(\mathrm{M}') - f(\mathrm{M})$$

ne dépend pas du choix de f et par suite ne dépend que de la structure euclidienne de D; $d(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$ est *la distance* des deux points M et M'.

Pour une bijection f, soit A et B les points d'images respectives 0 et 1 ($f(\mathrm{A}) = 0$, $f(\mathrm{B}) = 1$). On a :

$$d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 1.$$

On établit qu'il existe une bijection $r \mapsto f_r$ entre l'ensemble des couples $r = (A, B)$ (avec $d(A, B) = 1$) et l'ensemble des bijections envisagées de D sur $\mathbb{R}$; r est dit un *repère normé* de la droite D, $f_r(M)$ est l'abscisse du point M dans le repère r.

Géométrie plane.

Les résultats suggérés au paragraphe 1 peuvent être pris de la manière suivante comme axiomes :

On considère un ensemble P dont les éléments sont appelés points et un ensemble non vide H de parties propres de P qui sont supposées être des *droites*. On dit que P est un plan (mathématique) quand les axiomes suivants sont satisfaits :

1° Par deux points distincts passe une droite et une seule.

2° Pour toute droite D et tout point M n'appartenant pas à D, il existe une droite et une seule contenant M et n'ayant pas de point commun avec D (Euclide).

3° Étant donnée une projection non constante p d'un axe A sur un axe A', il existe un nombre réel k (ne dépendant que de A, A' et p) appelé *rapport de projection* tel que pour tout couple de points (M, N) de A on ait :

$$\overline{p(M)p(N)} = k\overline{MN} \text{ (Thalès).}$$

Tous les autres résultats du programme peuvent être déduits de ces axiomes.

Programme pour la classe de Troisième

Il est rappelé que les professeurs ont toute liberté pour choisir l'ordre dans lequel les différentes parties du programme sont étudiées.

L'importance de chacune d'elles et le temps à y consacrer ne sont pas proportionnels à la longueur de leur libellé : les questions qui ne figuraient pas dans les programmes antérieurs, ou n'y figuraient pas sous la même forme, ont fait, en général l'objet d'une rédaction plus détaillée.

Les élèves ont déjà appris, en Quatrième, ce qu'est une démonstration. Cet effort sera poursuivi, à propos des questions d'algèbre et de géométrie propres à cette classe, dans le même esprit qu'en Quatrième.

On pourra adopter comme axiomes pour la géométrie ceux qui sont indiqués dans les commentaires; mais d'autres choix demeurent légitimes.

I. — Nombres réels, calculs algébriques, fonctions numériques.

1° Rappel des propriétés de l'addition, de la multiplication et de l'ordre définissant $\mathbb{R}$ comme corps totalement ordonné.

Somme, produit, quotient de nombres réels exprimés sous la forme $\frac{b}{a}$ (où a et b sont des nombres réels et $a \neq 0$).

Un nombre r est dit rationnel s'il existe deux entiers $a \neq 0$ et b tels que $ar = b$. Corps des nombres rationnels. Exercices de calcul dans ce corps.

2° On admettra que l'application $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ est surjective. Étant donné un nombre réel positif ou nul a, le symbole $\sqrt{a}$, ou $a^{1/2}$, désigne le nombre réel positif ou nul b, appelé racine carrée de a, tel que $b^2 = a$.

Utilisation de tables pour le calcul de valeurs approchées de $a^{1/2}$.

Racine carrée d'un produit de nombres réels, de l'inverse d'un nombre réel strictement positif.

3° Exemples de fonctions polynomes. Exercices de calcul sur des fonctions rationnelles.

Fonction linéaire et fonction affine. Exemples de fonctions en escalier et de fonctions affines par intervalles; représentation graphique.

4° Mise en équations de problèmes variés, mathématiques ou non.

Exemples conduisant à une ou deux équations ou inéquations du premier degré à une ou deux inconnues, à coefficients numériques. Représentation graphique des solutions d'une équation ou d'une inéquation du premier degré à deux inconnues.

II. — Plan euclidien.

1° Introduction de la notion d'orthogonalité de droites, de directions de droites. Projection orthogonale sur une droite. Rapport de projection orthogonale d'un axe sur un axe. Symétrie de ce rapport.

2° Distance $d(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ de deux points du plan. Norme d'un vecteur. Inégalité triangulaire. Deux points distincts M, N étant donnés, étude de l'ensemble des points Q tels que $d(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = d(\mathrm{M}, \mathrm{Q}) + d(\mathrm{Q}, \mathrm{N})$.

Pour tout triangle (A, B, C), la condition $d(\mathrm{A}, \mathrm{C})^2 = d(\mathrm{A}, \mathrm{B})^2 + d(\mathrm{B}, \mathrm{C})^2$ équivaut à l'orthogonalité des droites AB et BC (Pythagore).

Repères orthonormés. Expression de la distance de deux points.

Structure de plan euclidien sur $\mathbb{R}^2$ (on pourra l'admettre partiellement ou totalement).

III. — Géométrie plane euclidienne.

1° Ensemble des points équidistants de deux points distincts donnés (médiatrice).

Distance d'un point à une droite.

2° Cercle et disque. Intersection d'un cercle et d'une droite, d'un disque et d'une droite; tangente à un cercle. Par trois points non alignés passe un cercle et un seul.

3° Isométries du plan euclidien ; ce sont, par définition, les bijections du plan euclidien sur lui-même qui conservent la distance. Exemples : translations, symétries centrales, symétries orthogonales.

Image d'une droite par une isométrie. Toute isométrie conserve l'orthogonalité et le parallélisme des droites.

Groupe des isométries. Exemples simples de composée d'isométries. Détermination d'une isométrie par l'image d'un repère orthonormé donné, par l'image d'un triangle donné.

Toute isométrie conserve le rapport de projection orthogonale de deux axes; réciproque. Angle géométrique, défini comme classe d'équivalence de couples isométriques de demi-droites de même origine.

4° Symétries d'un cercle. Arcs isométriques d'un cercle. Repérage d'un point M d'un demi-cercle de diamètre AB par la mesure de l'arc AM (on admettra l'existence et l'unicité de la mesure des arcs de cercle, la mesure du demi-cercle étant fixée). Emploi de cette mesure pour définir l'écart angulaire de deux directions orientées ou de deux demi-droites.

Usage des tables trigonométriques en degrés et en grades; cosinus, sinus, tangente d'un écart angulaire.

5° Isométries laissant globalement invariante la réunion de deux demi-droites de même origine (bissectrice), la réunion de deux droites.

Exercices sur le triangle isocèle, le losange, le rectangle, le carré.

Annexe au programme de Troisième.

On peut traiter le (II, 1°) en introduisant les définitions et axiomes qui suivent :

On considère un plan P (au sens de la géométrie de Quatrième). *L'orthogonalité* entre directions de droites de P est une application ω de l'ensemble des directions de droites de P dans lui-même qui jouit pour toute direction δ des deux propriétés suivantes :

1° Elle ne laisse aucune direction invariante : $\omega(\delta)$ est toujours distinct de δ.

2° L'image de l'image de δ est δ elle-même : $\omega(\omega(\delta)) = \delta$.

Deux droites sont orthogonales (ou perpendiculaires) si leurs directions sont orthogonales.

Le plan P est un *plan euclidien* si l'orthogonalité jouit de la propriété suivante.

3° Pour tout couple (A, A') d'axes du plan P, le rapport de projection orthogonale de A sur A' est égal à celui de A' sur A.

On peut en déduire — et on peut aussi admettre — que ce rapport est en valeur absolue inférieur ou égal à 1.

Tous les autres résultats du programme peuvent être déduits de ces axiomes.

1

Les décimaux et les réels

Jusqu'à présent la démarche suivie dans l'enseignement était historique : construction du corps des fractions, puis introduction des nombres algébriques, en particulier les racines carrées, et enfin quelques mots sur les nombres transcendants. En particulier, on étendait la notion de nombre sans toujours bien montrer comment on pouvait étendre les opérations à ces nombres. Dans les nouveaux programmes la démarche suivie est bien différente : étude précise de l'anneau ordonné des décimaux et introduction des nombres réels à partir d'encadrements de décimaux, c'est-à-dire comme décimaux « illimités » ; cette introduction sera utile au physicien qui fait ses calculs dans l'anneau des décimaux et non dans le corps des fractions ; de plus, contrairement à ce que prétendent certains détracteurs de la réforme, elle nécessite davantage de calculs numériques à la main et à la machine. Cette nouvelle présentation est incompatible avec l'ancienne car, par exemple 1/3 et $\sqrt{2}$ ont le même statut de nombre réel non décimal, alors que $\sqrt{2}$ est traditionnellement présenté comme un réel non rationnel ; la distinction entre nombres rationnels et non rationnels ne se fera qu'en classe de Troisième.

Il n'est absolument pas question de faire en Quatrième une véritable construction du corps des réels, celle-ci se faisant habituellement en première ou deuxième année d'études universitaires. Les articles que nous proposons vont du commentaire détaillé du programme proposant une présentation possible en Quatrième à des exposés plus théoriques donnant une construction du corps des réels.

L'une des innovations du programme de Quatrième est l'étude détaillée de l'ensemble des nombres décimaux. L'article qui suit, indique deux présentations distinctes, possibles, et adaptables dans une classe de Quatrième.

Nombres décimaux

Véronique GAUTHRON,
(*I.R.E.M. de Paris*).

Les propriétés de $\mathbb{Z}$ qui en font un anneau commutatif totalement ordonné (voir appendice) ainsi que la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ sont supposées connues (cf. Programme de Cinquième).

I. — Le groupe G des puissances de 10.

Rappels : si x et n sont des nombres entiers positifs, on connaît la notation

$$x^n = \underbrace{x \times x \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$$

et on voit facilement que

$$\forall x \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall n' \in \mathbb{N}^*, \; x^n \times x^{n'} = x^{n+n'} \qquad (1)$$

on convient de poser

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, \; x^0 = 1$$

Cette convention est compatible avec les relations (1).

Définition des puissances de 10.

Dans le cas particulier $x = 10$ (base de la numération), on va définir les « nombres » 10^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$ généralisant les entiers 10^n pour $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble considéré est celui des symboles 10^n pour $n \in \mathbb{Z}$; on définit sur cet ensemble une loi de composition interne, notée $\times$, de la façon suivante :

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m} \qquad (n \in \mathbb{Z}, \; m \in \mathbb{Z})$$

Si $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, nous retrouvons les relations (1), ce qui nous permet d'identifier, pour $n > 0$, le symbole 10^n avec l'entier 10^n défini précédemment, et pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, la loi $\times$ avec la multiplication entre entiers.

Notation : si $n \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$, alors $n = -n'$, avec $n' \in \mathbb{N}^*$.

On écrit souvent $\frac{1}{10^{n'}}$ au lieu de 10^n.

La loi qu'on vient de définir est une loi de groupe commutatif.

Cette propriété va découler de ce que $\mathbb{Z}$ est un groupe commutatif pour l'addition :

— La loi est commutative :

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{Z}\quad 10^m \times 10^n = 10^{m+n}$$

et

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m}$$

or dans $\mathbb{Z}$, $m + n = n + m$

— La loi est associative :

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \forall p \in \mathbb{Z}, \text{ alors}$$
$$(10^m \times 10^n) \times 10^p = 10^{(m+n)+p}$$
$$10^m \times (10^n \times 10^p) = 10^{m+(n+p)}$$

or dans $\mathbb{Z}$, $(m + n) + p = m + (n + p)$.

— L'élément $10^0 = 1$ est élément neutre :

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ 1 \times 10^m = 10^{0+m} = 10^m$$

— Tout élément a un inverse :

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on connaît l'élément $-n \in \mathbb{Z}$ tel que $n + (-n) = 0$ donc $10^n \times 10^{-n} = 10^0 = 1$.

10^{-n} est l'inverse de 10^n pour la loi $\times$.

Nous appellerons G le groupe des puissances de 10.

Remarque : nous avons ainsi défini un isomorphisme de groupe entre $\mathbb{Z}$ muni de l'addition et le groupe G, à savoir l'application φ de $\mathbb{Z}$ dans G défini par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \varphi(n) = 10^n \in G$$

Cette application vérifie en effet évidemment :

$$\varphi(m + n) = \varphi(m) \times \varphi(n)$$

et elle est bijective d'après la définition même de G.

Ordre total sur le groupe G.

On connaît l'ordre naturel sur $\mathbb{Z}$;

On définit une relation $<$ dans G par $10^m < 10^n \Leftrightarrow m < n$ dans $\mathbb{Z}$.

— C'est un ordre total : cela découle de la structure d'ordre total de $\mathbb{Z}$:

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $10^n \leqslant 10^n$ car $n \leqslant n$

$\forall m \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(10^m \geqslant 10^n$ et $10^n \leqslant 10^m) \Rightarrow 10^m = 10^n$ (car on voit qu'alors $m = n$)

$\forall m, n, p \in \mathbb{Z}$, $(10^m \leqslant 10^n$ et $10^n \leqslant 10^p) \Rightarrow 10^m \leqslant 10^p$.

— Cet ordre est compatible avec la structure de groupe de G.

En effet, si $10^m \leqslant 10^p$, cela exprime que $m \leqslant p$, donc $\forall n \in \mathbb{Z}$, $m + n, \leqslant p + n$ (structure de groupe ordonné de $\mathbb{Z}$); c'est-à-dire $10^{m+n} \leqslant 10^{p+n}$.

Conséquences directes :

$\forall m', m, n', n \in \mathbb{Z}$, $(10^m \leqslant 10^n$ et $10^{m'} \leqslant 10^{n'}) \Rightarrow 10^{m+m'} \leqslant 10^{n+n'}$

— Lien avec l'ordre de $\mathbb{Z}$.

Si m et n sont des entiers positifs, nous avons identifié les éléments 10^m et 10^n de G aux entiers 10^m et 10^n.

La relation d'ordre que nous avons définie est compatible avec cette identification, puisque, si $m, n \in \mathbb{Z}$ et $m \leqslant n$, les entiers 10^m et 10^n sont tels que $10^m \leqslant 10^n$.

Cela découle de ce que $\mathbb{Z}$ est un anneau ordonné, c'est-à-dire que la structure de groupe ordonné de $\mathbb{Z}$ est compatible avec la multiplication (voir appendice).

II. — Les nombres $a \cdot 10^p$ ($a \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$).

Rappels : si $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$, on connaît l'entier $a \times 10^p$. L'écriture d'un entier sous la forme $a . 10^p$ n'est pas unique. En effet, considérons deux nombres entiers écrits sous la forme $a . 10^p$ et $b . 10^q$; supposons par exemple que $p \leqslant q$, alors ces deux entiers sont égaux si et seulement si $b = a . 10^{p-q}$.

Construction :

On considère l'ensemble des symboles $a \times 10^p$ ($a \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$).

Cela revient en fait à considérer l'ensemble des couples (a, p), mais l'écriture $a \times 10^p$ est plus parlante.

Munissons cet ensemble de la relation suivante :

$$a . 10^p \,\mathcal{R}\, b . 10^q \Leftrightarrow (p \geqslant q \text{ et } b = a . 10^{p-q}) \text{ ou } (q \geqslant p \text{ et } a = b . 10^{q-p}).$$

La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence :

Seule la transivité n'est pas tout à fait évidente :

Si $a . 10^p \,\mathcal{R}\, b . 10^q$ et $b . 10^q \,\mathcal{R}\, c . 10^r$, nous devons examiner les six cas possibles suivant l'ordre des trois nombres p, q, r.

Supposons par exemple $q < p < r$

alors $b = a.10^{p-q}$ et $b = c.10^{r-q}$

or $p - q < r - q$

d'où $c = a.10^{r-p}$ et $a.10^p \mathcal{R}\, c.10^r$.

Les autres cas se traitent de la même façon.

L'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\mathbb{R}$ *s'appelle ensemble des nombres décimaux, et se note* $\mathbb{D}$.

On notera un élément de l'ensemble des décimaux de la même façon qu'un de ses représentants, soit $a.10^p$, ce qui permet d'écrire :

$$a.10^p = b.10^q \Leftrightarrow (p \geqslant q \text{ et } b = a.10^{p-q}) \text{ ou } (q \geqslant p \text{ et } a = b.10^{q-p})$$

Si $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$, l'élément $a.10^p$ de $\mathbb{D}$ sera identifié avec l'entier $a \times 10^p$.

Si $a = 1$ et $p \in \mathbb{Z}$, l'élément 1.10^p de $\mathbb{D}$ sera identifié avec l'élément 10^p de G.

Nous allons maintenant munir l'ensemble $\mathbb{D}$ d'une structure d'anneau commutatif totalement ordonné.

Addition.

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$, la distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{Z}$ nous permet d'écrire l'égalité suivante entre éléments de $\mathbb{Z}$:

$$a.10^p + b.10^p = (a + b)\ 10^p$$

Nous sommes conduits à poser dans $\mathbb{D}$, pour $a, b, p \in \mathbb{Z}$:

$$a.10^p + b.10^p = (a + b)\ 10^p \qquad (2)$$

Soient maintenant deux éléments quelconques de $\mathbb{D}$, $a.10^p$ et $b.10^q$

On a par exemple $p < q$

alors $b.10^q = (b.10^{q-p})\ 10^p$

et on a :

$$a.10^p + b.10^q = a.10^p + (b.10^{q-p})\ 10^p = (a + b.10^{q-p})\ 10^p$$

Il faut montrer que le résultat ne dépend pas du représentant choisi : il suffit de le vérifier sur la relation (2) :

si $a.10^p = a'.10^{p'}$

$b.10^p = b'.10^{p'}$ supposons par exemple $p \geqslant p'$

alors $a' = a.10^{p-p'}$

$b' = b.10^{p-p'}$

donc $(a' + b')\ 10^{p'} = (a + b)\ 10^p$.

L'addition fait de $\mathbb{D}$ un groupe commutatif :

Associativité : elle découle de l'associativité dans $\mathbb{Z}$; en effet, trois éléments quelconques de $\mathbb{D}$ peuvent s'écrire : $a.10^p$, $b.10^p$ et $c.10^p$ (avec le même p), et on a bien :

$$(a.10^p + b.10^p) + c.10^p = a.10^p + (b.10^p + c.10^p) = (a + b + c)\ 10^p$$

Commutativité : de même :

$$a.10^p + b.10^p = b.10^p + a.10^p = (a + b)\ 10^p$$

car, dans $\mathbb{Z}$, $a + b = b + a$.

L'élément $0 = 0.10^p$ (p quelconque) est élément neutre car

$$0 + a.10^p = (0 + a).10^p = a.10^p$$

Symétrique :

L'élément $(-a).10^p$ est le symétrique de $a.10^p$

car $$a.10^p + (-a).10^p = 0.10^p = 0.$$

Multiplication.

Si $(a, b) \in \mathbb{Z}$ et $p\ q \in \mathbb{N}$, la commutativité de la multiplication définie dans $\mathbb{Z}$ fait que :

$$a.10^p \times b.10^q = (a \times b).10^{p+q}$$

Nous définirons donc une multiplication dans $\mathbb{D}$ par :

$$a,\ b,\ p,\ q \in \mathbb{Z} \qquad a.10^p \times b.10^q = (a \times b).10^{p+q}$$

Montrons que le résultat ne dépend pas des représentants choisis.

Si $$a.10^p = a'.10^{p'}$$
$$b.10^q = b'.10^{q'}$$

avec, par exemple $p > p'$ et $q < q'$

alors $$a' = a.10^{p-p'} \qquad b = b'.10^{q'-q}$$

et $$a\ b.10^{p+q} = a\ b'.10^{p+q'} = (a.10^{p-p'})\ b'.10^{p'+q'} = a'\ b'.10^{p'+q'}$$

Remarquons que si $a = b = 1$, on retrouve bien la multiplication qu'on avait définie dans le groupe G.

L'associativité et la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{D}$ découlent des propriétés analogues de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}$ (vérification immédiate).

Distributivité par rapport à l'addition :

$$a.10^p \times (b.10^q + c.10^q) = a.10^p \times (b + c)\ 10^q = a\ (b + c)\ 10^{p+q}$$

et $$a.10^p \times b.10^q + a.10^p \times c.10^q = ab.10^{p+q} + ac.10^{p+q}$$
$$= (ab + ac).10^{p+q}$$

La distributivité dans $\mathbb{D}$ découle alors de celle dans $\mathbb{Z}$.

Relation d'ordre sur $\mathbb{D}$.

Comme on a vu que deux éléments quelconques de $\mathbb{D}$ peuvent s'écrire $a.10^p$ et $b.10^p$ (avec le même p), il suffit de pouvoir comparer deux tels éléments, et de montrer que la structure ainsi définie est compatible avec l'égalité $a.10^p = a'.10^{p'}$.

Or, si a, $b \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$, on remarque que dans l'ordre naturel de $\mathbb{Z}$, on a :

$$a.10^p \leqslant b.10^p \Leftrightarrow a \leqslant b \qquad (3)$$

Nous sommes conduit à poser, pour tout a, b, $p \in \mathbb{Z}$,

$$a.10^p \leqslant b.10^p \Leftrightarrow a \leqslant b$$

Compatibilité :

Si $\quad a.10^p = a'.10^{p'}$

et $\quad b.10^p = b'.10^{p'}$

avec par exemple $p \leqslant p'$, alors $a = a'.10^{p'-p}$ et $b = b'.10^{p'-p}$ et la relation (3) montre que $a \leqslant b \Leftrightarrow a' \leqslant b'$.

Le fait que la relation ainsi définie sur $\mathbb{D}$ est une relation d'ordre résulte sans difficulté de ce que la relation $a \leqslant b$ est un ordre sur $\mathbb{Z}$.

Montrons par exemple l'antisymétrie :

si $\quad a.10^p \leqslant b.10^p$ et $b.10^p \leqslant a.10^p$, cela veut dire :

$\quad a \leqslant b$ et $b \leqslant a$ (ordre dans $\mathbb{Z}$)

d'où $\quad a = b$ (antisymétrie de l'ordre dans $\mathbb{Z}$)

d'où $\quad a.10^p = b.10^p$ (égalité dans $\mathbb{D}$).

L'ordre est total puisqu'on sait comparer deux éléments quelconques de $\mathbb{D}$.

Si $p \in \mathbb{N}$, les éléments $a.10^p$ et $b.10^p$ ont été identifiés avec des éléments de $\mathbb{Z}$; dans ce cas, l'ordre dans $\mathbb{D}$ est le même que l'ordre dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que :

$a.10^p \leqslant b.10^p$ d'après l'ordre de $\mathbb{D} \Leftrightarrow a.10^p \leqslant b.10^p$ d'après l'ordre de $\mathbb{Z}$;

D'autre part, deux éléments de la forme 1.10^p et 1.10^q de $\mathbb{D}$ ont été identifiés avec les éléments 10^p et 10^q de G.

Or $10^p \leqslant 10^q$ d'après l'ordre de $G \Leftrightarrow p \leqslant q$

mais alors $\quad 1.10^q = (10^{q-p})\ 10^p$ (égalité dans $\mathbb{D}$)

et comme $\quad 10^{q-p} \geqslant 1$ (ordre de $\mathbb{Z}$), cela équivaut à

$\quad 1.10^p \leqslant 1.10^q$ d'après l'ordre $\mathbb{D}$;

donc $1.10^p \leqslant 1.10^q$ (d'après l'ordre de $\mathbb{D}$) $\Leftrightarrow 10^p \leqslant 10^q$ (d'après l'ordre de G).

Remarquons enfin que, si $a.10^p \in \mathbb{D}$, alors

$$a.10^p \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant 0$$

Lien de l'ordre avec les opérations sur $\mathbb{D}$.

(1) Si α, β, γ sont des éléments de $\mathbb{D}$, on peut les écrire :

$$\alpha = a.10^p \qquad \beta = b.10^p \qquad \gamma = c.10^p$$

$$\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow a \leqslant b$$

or $\qquad a \leqslant b \Leftrightarrow a + c \leqslant b + c$ (ordre de $\mathbb{Z}$)

donc

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{D}, \qquad \alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$$

On en déduit que :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{D},$$

$$(\alpha \leqslant \beta \quad \text{et} \quad \gamma \leqslant \delta) \Leftrightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \delta$$

(2) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$ et $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$

alors on peut écrire $\qquad \alpha = a.10^p$ avec $a \geqslant 0$

$\qquad \beta = b.10^p$ avec $b \geqslant 0$

donc $a\,b \geqslant 0$ d'après les propriétés de l'ordre de $\mathbb{Z}$ finalement

$$\forall \alpha \in \mathbb{D}, \qquad \forall \beta \in \mathbb{D}, \qquad (\alpha \geqslant 0 \text{ et } \beta \geqslant 0) \Rightarrow \alpha\beta \geqslant 0$$

On en déduit que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{D} \ \ \forall \beta \in \mathbb{D} \ \ \forall \gamma \in \mathbb{D}, \quad (\alpha \geqslant 0 \text{ et } \beta \geqslant \gamma) \Rightarrow \alpha\beta \geqslant \alpha\gamma$$

en effet, $\beta \geqslant \alpha \Rightarrow \beta - \alpha \geqslant 0$, d'après (4),
donc $\alpha(\beta - \gamma) \geqslant 0$ d'après (5), d'où $\alpha\beta \geqslant \alpha\gamma$.

Remarque : si $\alpha \leqslant 0$ et $\beta \geqslant \alpha$, alors $\alpha\beta \leqslant \alpha\gamma$.
En effet, $(-\alpha)$ est $\geqslant 0$, et on utilise la formule (6).

Valeur absolue.

On connaît l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$

$$a \in \mathbb{Z} \mapsto |a| \in \mathbb{N} \text{ (où } |a| = \sup(a, -a))$$

On définit de même une application de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}^+$ (c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathbb{D}$ qui sont positifs ou nuls) de la façon suivante :

si $\qquad \alpha \in \mathbb{D}$ on écrit $\alpha = a.10^p$

et on pose $\qquad |\alpha| = |a|\ 10^p$.

Compatibilité :

Si $\alpha = a.10^p = a'.10^{p'}$ alors par exemple $a = a'.10^{p'-p}$
a et a' sont des entiers de même signe donc $|a| = |a'|\ 10^{p'-p}$
et finalement $|a|\ 10^p = |a'|\ 10^{p'}$.

L'application $\alpha \to |\alpha|$ a les propriétés d'une valeur absolue :

* $\forall \alpha \in \mathbb{D}$, $|\alpha| \geqslant 0$ car si $\alpha = a.10^p$, $|a| \geqslant 0$ dans $\mathbb{Z}$
* $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ car si on écrit $\alpha = a.10^p$,
  $\alpha = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow |a| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = 0$
* $\forall \alpha \in \mathbb{D}$, $\forall \beta \in \mathbb{D}$, $|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$

car si $\alpha = a.10^p$ et $\beta = b.10^q$, alors $|\alpha\beta| = |ab|.10^{p+q} = |a|\,|b|.10^{p+q}$
donc $|\alpha\beta| = |a|.10^p.|b|.10^q$

* $\forall \alpha \in \mathbb{D}$, $\quad \forall \beta \in \mathbb{D}$, $\quad |\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$ (triangle)

en écrivant $\alpha = a.10^p$ et $\beta = b.10^p$ (le même p) cela découle de l'inégalité analogue pour la valeur absolue dans $\mathbb{Z}$.

III. — Écriture d'un élément de $\mathbb{D}$ sous forme de nombre à virgule.

Nous allons écrire un élément de $\mathbb{D}$ sous la forme d'un nombre décimal en base 10.

Soit $\alpha = a.10^p$ un élément de $\mathbb{D}$.

1° Si $p \geqslant 0$. $a.10^p$ est un entier, qu'on sait écrire en base 10 : on écrit $|\alpha| = |a|.10^p$, et on fait précéder cette écriture du signe — si $\alpha < 0$. On peut éventuellement faire précéder l'entier $|\alpha|$ d'un nombre quelconque de zéros, et le nouveau symbole représente le même nombre.

2° Si $p < 0$ alors posons $q = -p$; $q > 0$.

On écrit alors a en base 10, en le faisant précéder du nombre nécessaire de zéros, puis on compte q chiffres à partir de la droite et on place une virgule. On peut alors ne pas écrire les zéros qui se trouvent à la droite de la virgule et tels qu'il n'y ait pas de chiffres différents de zéro à leur droite.

Exemple : $30.10^{-3} = 0{,}030$ et $30.10^{-3} = 0{,}03$ etc.

$-5.10^{-3} = -0005.10^{-3}$ et $-5.10^{-3} = -0{,}005$.

Compatibilité :

Si $a.10^p = b.10^q$, alors par exemple $a = b.10^{p-q}$; l'écriture de a en base 10 s'obtient à partir de celle de b en ajoutant p-q zéros à droite; la méthode précédente permet alors d'écrire le même nombre à virgule.

Technique des opérations.

Addition :

La définition $a.10^p + b.10^p = (a + b)\ 10^p$ donne la méthode : on écrit les nombres avec autant de chiffres après la virgule (éventuellement en ajoutant des zéros à la droite de l'un d'eux), puis on ajoute les entiers obtenus en supprimant les virgules, et dans le résultat on place la virgule en laissant le même nombre de chiffres sur la droite :

$$0{,}5 + 3{,}25 = 0{,}50 + 3{,}25 = 3{,}75$$

Multiplication :

La définition $a.10^p \times b.10^q = ab.10^{p+q}$ nous donne encore la technique : on multiplie les entiers obtenus en supprimant les virgules, et dans le résultat on place la virgule en laissant sur la droite un nombre de chiffres égal à la somme des nombres de chiffres de chaque facteur placés après la virgule :

$$30 \times 0{,}5 = 15{,}0 = 15$$
$$1{,}3 \times 0{,}02 = 0{,}026$$

Relation d'ordre.

Il résulte de la définition de l'ordre dans $\mathbb{D}$ que pour comparer deux nombres à virgule, on les écrit avec le même nombre de chiffres après la virgule, puis on compare les entiers obtenus en supprimant la virgule.

Remarque : pour comparer deux entiers positifs ayant le même nombre de chiffres (et on peut toujours se ramener à ce cas), on utilise l'ordre lexicographique (cf. un dictionnaire), c'est-à-dire :

Si α s'écrit en base 10 $a_1\ a_2\ \ldots\ a_n$ (les a sont des chiffres)
et si β s'écrit $b_1\ b_2\ \ldots\ b_n$
et si de plus $\alpha \neq \beta$, alors

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \exists\, i \in \{1, 2, \ldots n\}\,;\ a_i < b_i \text{ et } a_\alpha = b_\beta \text{ pour } \alpha < i.$$

Il en résulte en particulier que si deux nombres à virgule sont tels que les entiers obtenus en supprimant les chiffres après la virgule sont différents, le plus grand des nombres est celui correspondant au plus grand des entiers en question.

IV. — Encadrements.

1) Intervalles.

Si α et β sont deux décimaux tels que $\alpha < \beta$, on peut considérer les ensembles :

$$I_1 = (x \in \mathbb{D}\,;\ \alpha \leqslant x < \beta) \quad \text{qu'on note } I_1 = [\alpha, \beta[$$
$$I_2 = (x \in \mathbb{D}\,;\ \alpha < x \leqslant \beta) \quad \text{qu'on note } I_2 =]\alpha, \beta]$$

Propriété :

I_1 et I_2 sont deux ensembles infinis de $\mathbb{D}$. Montrons par exemple que I_1 est infini.

* Premier point de vue : en notant $\alpha = a.10^p$ et $\beta = b.10^p$ (avec le même p) alors le nombre $\gamma = (5a + 5b)10^{p-1}$ est tel que : $\alpha < \gamma < \beta$ donc $\gamma \in I_1$.

En effet, $\alpha < \beta \Leftrightarrow a < b$, donc $10a < 5a + 5b$, d'où $\alpha < \gamma$ et on montre de même que $\gamma < \beta$.

* Deuxième point de vue : écriture décimale : montrer sur des exemples qu'en ajoutant des chiffres à la droite de l'écriture décimale de α si $\alpha > 0$, on trouve un décimal δ tel que $\alpha < \delta < \beta$.

Exemple : $\alpha = 32,548$ $\beta = 32,672$

alors $\delta = 32,5487$ répond à la question

donc $\delta \in I_1$.

Dans ces deux cas, on a trouvé un nombre compris strictement entre α et β, en recommençant, on trouve un nombre entre α et γ (resp γ et β), et ainsi de suite; donc I_1, est infini.

Cas particulier : $\alpha = a.10^p$ $\beta = (a + 1)\,10^p$

alors I_1 est exactement formé des nombres décimaux de la forme :

$$x = (a.10^{p-q} + a')\,10^q$$

avec $q < p$ et $0 \leqslant a' < 10^{p-q}$

on trouve I_2 de façon analogue.

2) Encadrements.

Si $\alpha \in \mathbb{D}$ et $d \in \mathbb{D}$, $d > 0$, on appelle encadrement de α à d près un intervalle de l'un des types :

$$I_1 = [\beta, \gamma],\ I_2 = [\beta, \gamma[,\ I_3]\,\beta, \gamma] \text{ ou } I_4 =]\,\beta, \gamma[$$

tel que $\gamma - \beta = d$ et que α appartienne à cet intervalle.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{D}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on peut trouver $a \in \mathbb{Z}$, unique,

tel que $\alpha \in I_{p,\alpha} = [a.10^p, (a + 1)\,10^p[$

Soit en effet $\alpha = b.10^q$.

On peut toujours supposer $q \leqslant p$; en effet, si $q < p$, alors

$$\alpha = b.10^q = (b10^{q-p})10^p \quad \text{et} \quad b10^{q-p} \in \mathbb{Z}$$

Il existe alors un entier a, unique, tel que :

$$a.10^{p-q} > b < (a + 1)10^{p-q}$$

donc $\alpha = b10^q \in I_{p,\alpha} = [a10^p, (a + 1)10^p[$

$I_{p,\alpha}$ s'appellera l'encadrement naturel de α à 10^p près par défaut.

En notation de nombre à virgule, on obtient le nombre $a.10^p$, à partir de l'écriture de α, en supprimant les p-q chiffres qui sont sur la droite, quitte à remplacer par des zéros ceux qui se trouvent à gauche de la virgule.

Exemples :

encadrement naturel de $\alpha = 32{,}5$ à 10 près : $[30{,}40[$
encadrement naturel de $\beta = 43{,}572$ à 10^{-2} près : $[43{,}57,\ 43{,}58[$
encadrement naturel de $\gamma = 35{,}2$ à 10^{-2} près : $[35{,}20,\ 35{,}21[$
encadrement naturel de $\delta = -3{,}7$ à 10^{-1} près : $[-3{,}7,\ -3{,}6[$

Remarque : si $q < p$, alors $I_{q,\alpha} \subset I_{p,\alpha}$
et on voit facilement que $\bigcap_{p\in Z} I_{p,\alpha} = \{\alpha\}$;
donc $\bigcap_{p\in Z} I_{p,\alpha}$ n'est pas un encadrement de α, puisqu'il n'a qu'un seul élément.

Encadrement d'une somme et d'une différence.

Les propriétés de groupe de D font que :

$$\left.\begin{array}{r}\alpha \in [d_1,\ d_2[\\ \text{et}\ \beta \in [\beta_1,\ \beta_2[\end{array}\right\} \Rightarrow \ \alpha + \beta \in [\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2[$$

Donc, d'encadrements de α et β à d près, on peut déduire un encadrement de $\alpha + \beta$ à $2d$ près (car, si $\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1 = d$, alors

$$(\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1) = 2d).$$

Remarquons cependant que, des encadrements naturels de α et β à 10^p près, on ne peut pas déduire un encadrement naturel de la somme, même à 10^{p-1} près.

Pour la différence, il faut faire un peu plus attention :

si $\quad \alpha \in [\alpha_1,\ \alpha_2[$
et $\quad \beta \in [\beta_1,\ \beta_2[$
alors $\quad \alpha - \beta \in [\alpha_1 - \beta_2,\ \alpha_2 - \beta_1\ [\ \subset [\alpha_1 - \beta_2,\ \alpha_2 - \beta_1[$

(donner surtout des exemples).

Encadrement d'un produit.

Soit $\quad \alpha \in [a.10^p,\ (a+1).10^p[$
et $\quad \beta \in [b.10^p,\ (b+1).10^p[$

Supposons d'abord $a \in N$ et $b \in N$
alors $\quad \alpha\beta \in [ab.10^p,\ (ab + a + b + 1)\ 10^p[$

On voit qu'un encadrement à 10^p près de α et β ne fournit qu'un encadrement à $(a + b + 1)\ 10^p$ près de $\alpha\beta$; on obtient un résultat analogue en supposant a ou b négatifs.

Exemple :

Si $\quad \alpha \in [1111{,}1, \quad 1111{,}2[$

$\quad \beta \in [0{,}2, \quad 0{,}3[$

on en déduit que $\alpha\beta \in [222{,}22, \quad 333{,}36[$

Il est opportun de remarquer à ce moment que, puisque l'encadrement sert surtout dans la pratique à donner un ordre de grandeur de l'erreur commise en remplaçant α par $a.10^p$, on aura intérêt à écrire simplement, dans l'exemple précédent, $220 \leqslant \alpha\beta < 340$ ou $\alpha\beta \in [220, 340[$

Inverse approché à 10^p près.

Un élément α non nul quelconque de $\mathbb{D}$ n'a en général pas d'inverse dans $\mathbb{D}$; (c'est-à-dire que $\mathbb{D}$ n'est pas un corps).

Montrons par exemple que le nombre 3 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{D}$.

Raisonnant par l'absurde, supposons que $a.10^p$ soit l'inverse de 3

$$3a.10^p = 1$$

On voit que p doit être négatif, sinon 3 diviserait 1 dans $\mathbb{Z}$.

Posons donc $q = -p;\ q > 0$

on aurait alors $3a = 10^q$.

Cette égalité est impossible dans $\mathbb{Z}$, car 3 est un nombre premier qui ne divise pas 10, donc pas non plus 10^q.

On peut d'ailleurs montrer facilement que les éléments inversibles de $\mathbb{D}$ sont les éléments de la forme $a.10^p$ tels que la décomposition de a en facteurs premiers ne comporte que des 2 et des 5.

Nous allons par contre montrer qu'on peut déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{D}$ et $p \in \mathbb{Z}$ donnés, un élément $\beta = b.10^q$ de $\mathbb{D}$ tel que l'on ait : $\alpha.b10^q \leqslant 1 < (b + 1)\ 10^q$.

L'élément $b.10^q$ s'appellera *l'inverse approché de α à 10^q près par défaut.*

Soit donc $\alpha = a.10^p \in \mathbb{D}$; on a vu qu'on peut supposer p aussi petit que l'on veut (en remplaçant le couple (a, p) par un couple équivalent), on peut donc supposer $p + q < 0$; le nombre 10^{-p-q} est donc un entier, et on peut effectuer dans $\mathbb{Z}$ sa division euclidienne par a.

$$10^{-p-q} = a.b + r \qquad 0 \leqslant r < a$$

ou encore $\quad ab \leqslant 10^{-p-q} \leqslant a\,(b + 1)$

soit $\quad (a.10^p)\,(b.10^q) \leqslant 1 < a.10^p\,(b + 1)\ 10^q.$

$b.10^q$ est bien l'élément cherché.

Technique de détermination de β si α est écrit comme nombre à virgule.

Traitons un exemple : inverse de 7,2 à 10^{-3} près :

$$q = -3 \qquad p = -1 \qquad a = 72$$

$$\begin{array}{r|l} 10\,000 & 72 \\ \cline{2-2} 2\,80 & 138 \\ 640 & \\ 64 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \text{d'où } b = 138 \\ \text{et } \beta = 0{,}138 \\ \end{array}$$

Autre présentation des nombres décimaux.

Cette présentation est tout à fait différente de celle qui précède, et on peut difficilement les mélanger : il faut faire un choix au départ.

On suppose toujours connu l'anneau ordonné $\mathbb{Z}$, et un système de numération de $\mathbb{Z}$; sa base qui s'écrit toujours 10, sera dans les applications le nombre de doigts des deux mains.

Nous allons construire un anneau le plus « simple » possible contenant $\mathbb{Z}$ et dans lequel 10 soit inversible.

Partie multiplicative des puissances de 10.

Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ suivant :

$S = \{10^n ;\ n \in \mathbb{N}\}$ (où on a convenu de poser $10^0 = 1$)

S est stable pour la multiplication dans $\mathbb{Z}$,

en effet : $\qquad 10^p . 10^q = 10^{p+q}$

d'autre part, on remarque que $1 \in S$ et que $0 \notin S$.

Équivalence sur $\mathbb{Z} \times S$.

On définit sur $\mathbb{Z} \times S$ la relation suivante :

si $\qquad a, b \in \mathbb{Z}$ et $10^p, 10^q \in S$,

alors $\qquad (a, 10^p)\ R\ (b, 10^q) \Leftrightarrow a.10^q = b.10^p$ (égalité dans $\mathbb{Z}$).

C'est une relation d'équivalence : seule la transitivité n'est pas tout à fait évidente :

si $\qquad a10^p = b10^n$

et $\qquad b10^q = c10^p$

on en déduit $\qquad a10^{p+q} = b10^{n+q}$

et $\qquad b10^{n+q} = c10^{n+p}$

donc $\qquad a10^{p+q} = c10^{n+p}$

et puisque $10^p \neq 0 \quad a10^q = c10^n$, d'où $(a,10^n)R(c,10^q)$

On note une classe d'équivalence $\frac{a}{10^n}$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{a}{10^n} = \frac{b}{10^p} \Leftrightarrow a.10^p = b.10^n$$

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble de ces classes d'équivalence, c'est l'ensemble des décimaux.

Addition.

Si $\frac{a}{10^p}$ et $\frac{b}{10^q}$ sont des éléments de $\mathbb{D}$, nous voulons définir leur somme par :

$$\frac{a}{10^p} + \frac{b}{10^p} = \frac{a10^q + b10^p}{10^{p+q}}$$

Cette définition ne se justifie que si on montre que le résultat est indépendant des représentants $(a, 10^p)$ et $(b, 10^q)$ des classes $\frac{a}{10^p}$ et $\frac{b}{10^q}$; nous allons le vérifier rapidement :

$$\frac{a}{10^p} = \frac{a'}{10^{p'}}, \qquad \text{alors } a.10^{p'} = a'.10^p$$

et si de même $\qquad b.10^{q'} = b'.10^q$

alors on déduit que : $(a10^q + b10^p)10^{p'+q'} = (a'.10^{q'} + b'.10^{p'})10^{p+q}$
ou encore :

$$\frac{a10^q + b10^p}{10^{p+q}} = \frac{a'10^{q'} + b'10^{p'}}{10^{p'+q'}}$$

Remarque : réduction au même dénominateur :
si $\frac{a}{10^p}$ et $\frac{b}{10^q}$ sont deux décimaux, avec par exemple $p \leqslant q$, on peut les réduire en les écrivant : $\frac{b}{10^q}$ et $\frac{a.10^{q-p}}{10^q}$; donc deux décimaux quelconques peuvent s'écrire $\frac{a}{10^q}$ et $\frac{b}{10^q}$; la loi précédemment définie donne alors :

$$\frac{a}{10^q} + \frac{b}{10^q} = \frac{a10^q + b10^q}{10^{2q}} = \frac{a+b}{10^q}$$

Montrons que cette opération fait de $\mathbb{D}$ un groupe abélien.

Une fois qu'on sait réduire des éléments au même dénominateur, l'associativité et la commutativité découlent de celles de $\mathbb{Z}$, l'élément neutre est $\frac{0}{1} = \frac{0}{10^p}$ ($p \in \mathbb{N}$), l'opposé d'un élément $\frac{a}{10^p}$ est $\frac{-a}{10^p}$.

Multiplication.

Nous définissons la multiplication dans $\mathbb{D}$ par : $\frac{a}{10^p} \cdot \frac{b}{10^q} = \frac{ab}{10^{p+q}}$

Cette définition se justifie, car si :

$$\frac{a}{10^p} = \frac{a'}{10^{p'}} \qquad \text{(c'est-à-dire } a10^{p'} = a'10^p\text{)}$$

et :

$$\frac{b}{10^q} = \frac{b'}{10^{q'}} \qquad \text{(c'est-à-dire } b10^{q'} = b'10^q\text{)}$$

alors $ab.10^{p'+q'} = a'b'10^{p+q}$, donc $\frac{ab}{10^{p+q}} = \frac{a'b'}{10^{p'+q'}}$.

L'opération que nous venons de définir est commutative, associative, et possède un élément neutre $\frac{1}{1}$ (vérification immédiate).

Éléments inversibles de $\mathbb{D}$.

Il s'agit de trouver les éléments $\frac{a}{10^n}$ pour lesquels il existe un élément $\frac{b}{10^p}$ tel que $\frac{10^{n+p}}{ab} = \frac{1}{1}$;

ou encore $\qquad ab = 10^n.10^p \qquad$ (égalité dans $\mathbb{Z}$),

ou encore $\qquad ab = 2^{n+p}.5^{n+p}$.

La théorie des nombres premiers montre qu'il est possible de trouver $\frac{b}{10^p}$ si et seulement si la décomposition de $|a|$ en facteurs premiers ne contient que des 2 et des 5.

Les éléments inversibles de $\mathbb{D}$ sont donc ceux de la forme :

$$\frac{\pm 2^\alpha 5^\beta}{10^n} \; (\alpha \in \mathbb{N},\ \beta \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N})$$

Ordre sur $\mathbb{D}$.

Comme on sait réduire deux éléments de $\mathbb{D}$ au « même dénominateur » il suffit de savoir comparer deux éléments de la forme $\frac{a}{10^n}$ et $\frac{b}{10^n}$. Posons donc $\frac{a}{10^n} \leqslant \frac{b}{10^n} \Leftrightarrow a \leqslant b$ dans $\mathbb{Z}$.

Il faut bien entendu vérifier que cette relation ne dépend pas du représentant $(a,10^n)$ de la classe $\frac{a}{10^n}$, ce qui est immédiat car, dans $\mathbb{Z}$, l'ordre vérifie : $a \leqslant b \Leftrightarrow a.10^p \leqslant b.10^p$ (avec $p \in \mathbb{N}$).

On voit aussi facilement que la relation ainsi définie munit $\mathbb{D}$ d'un ordre total.

D'autre part, $\mathbb{D}$ muni de cet ordre est dense, c'est-à-dire que, si $\alpha \in \mathbb{D}$, $\beta \in \mathbb{D}$ et $\alpha < \beta$ (strictement), alors il existe un élément γ de $\mathbb{D}$ situé strictement entre α et β.

En effet si $\qquad \dfrac{a}{10^p} < \dfrac{b}{10^p}$

alors $\qquad 10a < 5a + 5b < 10b$

d'où $\qquad \dfrac{a}{10^p} < \dfrac{5a + 5b}{10^{p+1}} < \dfrac{b}{10^p}$

(remarquons que $\mathbb{Z}$ n'avait pas cette propriété).

Identification de $\mathbb{Z}$ à une partie de $\mathbb{D}$.

Considérons l'application i de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{D}$ définie par :

si $\qquad a \in \mathbb{Z}\ i(a) = \dfrac{a}{1}$

1° *Montrons que c'est un homorphisme d'anneau.*

$$i(a + b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1}$$

donc $\qquad i(a + b) = i(a) + i(b)$

$$i(ab) = \frac{ab}{1} = \frac{ab}{1 \times 1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1}$$

donc $\qquad i(ab) = i(a) . i(b)$

2° *Montrons que* i *respecte l'ordre, c'est-à-dire que :*

$$a \leqslant b \Leftrightarrow i(a) \leqslant i(b)$$

en effet $a \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{a}{1} \leqslant \dfrac{b}{1}$ d'après la définition de l'ordre dans $\mathbb{D}$.

3° *Montrons que* i *est injectif.*

En effet si $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{1}$, cela veutdire $a \times 1 = b \times 1$, soit $a = b$.

Tout ce qui précède nous permet d'identifier $\mathbb{Z}$ à son image par i dans $\mathbb{D}$, donc nous écrirons $3 \in \mathbb{D}$ à la place de $\dfrac{3}{1} \in \mathbb{D}$.

Appendice : Rappels sur les groupes et anneaux ordonnés.

Si un ensemble E est muni d'une part d'une loi de composition interne notée $+$ qui en fait un groupe abélien et d'autre part d'une relation d'ordre notée $\leqslant$, on dit que ces structures font de E un groupe ordonné (ou que la loi de groupe et la relation d'ordre sont compatibles) si, pour tous a, b, c de E on a la relation :

$$(a \leqslant b) \Rightarrow (a + c \leqslant b + c)$$

On en déduit aisément les règles de calcul suivantes :

$(a \geqslant 0 \text{ et } b \geqslant 0) \Rightarrow a + b \geqslant 0$ (0 élément neutre de la loi)

$(a \leqslant 0 \text{ et } b \leqslant 0) \Rightarrow a + b \leqslant 0$

$(a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d) \Rightarrow a + c \leqslant b + d$

Si de plus la relation $\geqslant$ est une relation d'ordre total, alors tout élément est soit $\geqslant 0$ soit $\leqslant 0$, et $(a \geqslant 0) \Leftrightarrow (-a \leqslant 0)$.

Si un ensemble E est muni d'une structure d'anneau et d'une relation d'ordre $\leqslant$, on dit que E est un anneau ordonné s'il vérifie les deux conditions suivantes : 1° l'addition et la relation $\leqslant$ font de E un groupe ordonné; 2° la multiplication les compatible avec la relation $\leqslant$, c'est-à-dire que, pour tout a, b de E, on a : $(a \geqslant 0 \text{ et } b \geqslant 0) \Rightarrow a.b \geqslant 0)$.

On en déduit aisément les règles de calcul suivantes :

$(a \leqslant b \text{ et } c \geqslant 0) \Rightarrow ac \leqslant bc$

$(a \leqslant b \text{ et } c \leqslant 0) \Rightarrow ac \geqslant bc$

$$\left.\begin{array}{ll} a \leqslant 0 \text{ et } b \leqslant 0 & ab \geqslant 0 \\ a \geqslant 0 \text{ et } b \leqslant 0 & ab \leqslant 0 \end{array}\right\} \text{règles des signes.}$$

Rappelons que l'addition, la multiplication et l'ordre sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ font de ce dernier un anneau totalement ordonné.

Remarque :

La première présentation, donnée ci-dessus, de l'ensemble des décimaux suit de près la lettre du programme officiel. Certains préfèreront la seconde présentation qui semble plus claire et plus simple.

Dans l'article ci-dessous notre Collègue indique comment, dans une classe expérimentale, *elle a introduit les réels à partir des décimaux.*

Des décimaux aux réels en classe de quatrième (1)

Magdeleine MOTTE,
Toulon.

Une révision du calcul dans $(\mathbb{D}, +, \times)$ amène naturellement à comparer $(\mathbb{D}, +)$ et $(\mathbb{D}, \times)$ et à chercher les éléments qui ont un inverse. Soit I leur ensemble; tout élément de I s'écrit $2^a.5^b.(0,1)^n$, $(a, b, n) \in \mathbb{N}^3$; on peut l'admettre, ou le prouver en admettant l'unicité de la décomposition d'un naturel en produit de facteurs premiers. Des exercices de calcul sur des décimaux écrits ainsi, ou bien $m.10^n$ ou $p.(0,1)^q$, les exposants étant toujours des naturels, préparent le calcul sur les puissances de 10.

Chemin faisant on trouve de petites déductions intéressantes (car le besoin s'en fait sentir) et faciles à formaliser : le produit de deux décimaux inversibles est inversible; un nombre $m.(0,1)^n$, $(m, n) \in \mathbb{N}_0^2$, est inversible si et seulement si m est inversible.

On cherche la représentation cartésienne de la fonction de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}$: « x a pour inverse y ». Des élèves ont tracé l'hyperbole; les autres protestent : 3, 6, 7, 9 ... n'ont pas d'inverse; il n'y a pas de point sur telle et telle droite...

On ne sait trop si on a des points isolés ou une « courbe trouée » mais sur ceci on est d'accord : il manque une infinité de points.

Simultanément on continue le travail amorcé en Cinquième, l'étude d'autres tables d'opération, et on dégage la notion de groupe dont on a maintenant de nombreux exemples : $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{D}, +)$, $(\mathrm{I}, \times)$, des groupes $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et des groupes de permutations.

On précise et distingue les conventions — écriture additive, multiplicative — et le vocabulaire : multiple (puissance) d'un élément d'un groupe. Sur un exemple fini on dégage le calcul sur les puissances d'un élément d'un groupe. On généralise : pour tout groupe $(G, *)$: $(\forall a, a \in G)$ $(\forall n, n \in \mathbb{N})$: $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$. On introduit les exposants négatifs et on admet, ou prouve, suivant le temps dont on dispose et le niveau de la classe, l'extension aux exposants négatifs, des règles de calcul.

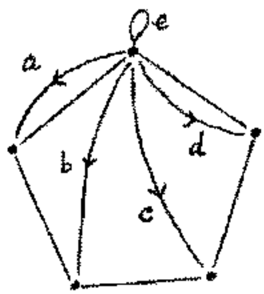
---

(1) Classe expérimentale du Lycée Bonaparte : 1969-70.

On fait alors du calcul numérique utilisant les puissances, positives ou négatives, de 2, 5, 10.

Si on a pu, pendant la période qui vient d'être décrite, obtenir, dans le cadre des exercices et de l'exploration géométrique prolongeant celle amorcée en Cinquième, les groupes de rotations des polygones réguliers, $(G_n, \circ)$, on obtiendra les classes de $\mathbb{Z}$, modulo 5 par exemple, comme classes d'exposants équivalents :

$$a = a^1 = a^6 = a^{11} = \ldots = d^{-1} = a^{-4} = a^{-9} = \ldots$$
$$b = a^2 = a^7 = a^{12} = \ldots = c^{-1} = a^{-3} = a^{-8} = \ldots$$



Les permutations a, b, c, d, e pourront être codées par ces classes et on obtiendra $(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}, +)$ comme traduction en notation additive de $(G_5, \circ)$.

La table de $(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}, \times)$ est suggérée par la table de la loi externe « x ($x \in G_5$) élevé à l'exposant y ($y \in \mathbb{Z}$) donne z ($z \in G_5$) ».

La résolution d'équations dans $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +)$ et $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \times)$ — n donné — amène naturellement les élèves au calcul dans les groupes et les anneaux.

C'est le moment de revenir à $\mathbb{D}$ pour en montrer simultanément l'insuffisance théorique et l'adéquation à tous les problèmes pratiques. Nous l'avons fait à travers l'étude d'une douzaine de fiches dont nous reproduisons ici les quatre premières et la dernière, résumant les autres au passage.

1. — Première fiche : Défauts et mérites de $\mathbb{D}$.

Résous sur $\mathbb{D}$ les équations :

$2.x = 7$	$(-3).x = 6$	$3.x = -4$	$0.x = -2$
$-0,25.x = 3$	$4.x = -9$	$x.(1,25) = -11$	$7.x = -48$
$0,7\ .x = 0,42$	$7.x = 24$	$0,1.x = 0,28$	$13.x = 0$

Dans quels cas l'équation $ax = b$ sur $\mathbb{D}$ a-t-elle une et une seule solution?

2. — Quelques problèmes concrets.

2.1. Soit à partager un mètre de ruban en trois rubans destinés au même usage.

Si le mètre est l'unité, et x la mesure des petits rubans, on doit avoir $3x = 1$. Nous savons que cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{D}$. Il serait pourtant absurde de dire que le partage demandé est impossible et le ruban inutilisable!

Si $x = 0{,}3$, $3x = 0{,}9$ et on perd 1 dm de ruban;

Si $x = 0{,}33$, $3x = 0{,}99$ - - - 1 cm - -

Le partage en trois rubans de 33 cm ou deux rubans de 33 cm et un de 34 cm résout notre problème.

2.2. Considérons le problème d'ajustage suivant : il s'agit de préparer trois tringles en acier de façon que :

(1) leurs longueurs diffèrent de moins de 1 mm;

(2) l'écart entre la somme de leurs longueurs et le mètre soit inférieur à 1 mm.

Quelle solution proposerais-tu sachant que tu aurais à ta disposition un instrument permettant de mesurer avec une précision de 0,1 mm?

3. — Deuxième fiche.

Nous avons vu, en étudiant et représentant graphiquement la fonction de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}$: $x \mapsto x^2$ que le graphique ne possédait pas de points d'ordonnée 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11 .... Rappelons et explicitons notre raisonnement :

— si un de ces nombres était le carré d'un nombre entier nous le verrions sur sa décomposition en produit de facteurs primaires : celle-ci aurait des exposants pairs :

$$n^2 = (2^a.3^b.5^c \ \dots \ p^x)^2 = 2^{2a}.3^{2b}.5^{2c} \ \dots \ p^{2x}.$$

Or 2, 3, 5, 7, 11 sont premiers et $6 = 2^1 \times 3^1$, $8 = 2^3$.

— si un de ces nombres était le carré d'un décimal à virgule il serait lui-même un décimal à virgule.

Autrement dit les équations $x^2 = 2$, $x^2 = 3$, $x^2 = 5$, ..., $x^2 = 11$ n'ont pas de solution dans $\mathbb{D}$.

Par contre, rappelons que $x^2 = 1{,}44$ a deux solutions : $(-1{,}2)$ et $1{,}2$.

4. — Problèmes concrets.

4.1. Mètre en main il t'est facile de te rendre compte de l'étendue que représente l'unité appelée mètre carré; facile aussi de te rendre compte de l'étendue représentée par 2 mètres carrés dès lors que tu prends un domaine rectangulaire (2×1 ou $4 \times 0{,}5$ ou $1{,}25 \times 1{,}6$). Mais si tu veux te représenter un *carré* de 2 m², que fais-tu?

4.2. L'an dernier tu as construit un cube en bristol de 8 cm (0,8 dm) d'arête. Calcule son volume en dm^3, en cm^3, dans le but de le comparer au litre ($1\ l = 1\ dm^3$).

Aide-toi de ce résultat pour me dire quelle mesure je dois indiquer aux élèves pour l'arête pour que le volume soit aussi voisin que possible de 0,5 dm^3. N'oublie pas que je ne puis pas utiliser le dixième de millimètre parce que, *même si* nos instruments permettaient de distinguer deux longueurs diffèrent de 0,1 mm cela ne nous serait d'aucune utilité puisque nos traits de crayon ont de 0,2 mm à 1 mm d'épaisseur et que nos découpages et collages aggravent l'imprécision.

Mais si un papa, ajusteur à l'arsenal, fait pour sa fille un cube en métal il peut s'imposer une arête au dixième de millimètre. Quelle sera cette arête pour que le volume soit aussi voisin que possible de 0,5 dm^3?

5. — Troisième fiche.

Dans les problèmes pratiques précédents nous ne pouvons pas dire que nous obtenons des « valeurs approchées des solutions » puisque celles-ci n'existent pas dans $\mathbb{D}$. Il est plus correct de parler de « solutions approchées ».

Observons ce que nous faisons :

Problème du ruban; nous remplaçons la résolution de l'équation $3.x = 1$ par la résolution de deux inéquations :

$$1 - a \leqslant 3x < 1$$

— où a dépend de nos exigences — précisées par la condition supplémentaire « je n'ai que faire d'un nombre avec 3 chiffres décimaux » autrement dit « je cherche un nombre ayant au plus 2 chiffres décimaux ». « Ne pas perdre plus de 1 cm de ruban » est traduit par :

$$a = 0{,}01$$

Le problème est alors exprimé par

$$\begin{cases} 1 - 0{,}01 \leqslant 3x < 1 \\ x \in \mathbb{D}_2 \text{ (1)} \end{cases}$$

Il a pour solution : 0,33.

Le problème des tiges d'acier; il est exprimé par

$$\begin{cases} 1 - 0{,}001 < 3x < 1 + 0{,}001 \\ x \in \mathrm{D}_4 \end{cases}$$

(1) $\mathbb{D}_2 = \{d / d \in \mathbb{D} \wedge 10^2 d \in \mathbb{Z}\}$.

si l'unité est le mètre et si l'on impose la condition supplémentaire « trois tiges de même longueur ».

Le problème du cube en bristol; il est exprimé par :

$$\begin{cases} |x^3 - 500| \text{ minimum, l'unité étant le centimètre;} \\ x \in \mathbb{D}_1 \end{cases}$$

il a pour solution : 7,9.

Le problème du cube en métal; il est exprimé, avec la même unité par ($|x^3 - 500|$ minimum; $x \in \mathbb{D}_2$); il a pour solution : 7,94.

On calcule, en effet : $7{,}93^3 \simeq 498{,}6$ et $7{,}94^3 \simeq 500{,}5$; on a donc

$$|7{,}94^3 - 500| < |7{,}93^3 - 500|.$$

7,93 et 7,94 sont *des* solutions approchées — la première par défaut, la seconde par excès — du problème théorique résumé par $x^3 = 500$; 7,9 et 8 sont aussi *des* solutions approchées de ce problème.

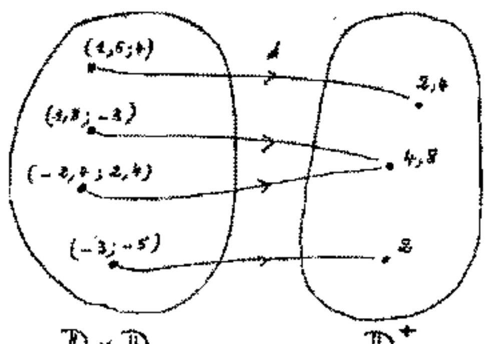
6. — Quatrième fiche.

Pour distinguer ces deux couples de solutions approchées il est commode de considérer les nombres positifs :

$$|7{,}93 - 7{,}94| = |7{,}94 - 7{,}93| = 0{,}01 = 10^{-2}$$
$$|7{,}9 - 8| = |8 - 7{,}9| = 0{,}1 = 10^{-1}$$

On les appelle *distances* des couples (7,93; 7,94) et (7,9; 8).

Définition. — On appelle *distance*, l'application de d de $\mathbb{D}^2$ dans $\mathbb{D}^+$ définie par : $d(x ; y) = |x - y|$.



Le mot « distance » désigne à la fois :

— *l'application d.*

— *les images dans cette application.*

Avec ce vocabulaire nous pouvons dire : 7,9 et 8 sont les solutions approchées, par défaut et par excès, dont la distance est un dixième.

Comment t'expliques-tu le nom de « distance » choisi pour cette application?

Ex. 1. Prépare un tableau cartésien de A × A, :

$$A = [-5{,}8;\ -4{,}7;\ -3{,}1;\ -2;\ -0{,}7;\ 0;\ 1;\ 3{,}5;\ 5]$$

et inscrit dans la case repérée par le couple $(x ; y)$ sa distance.

Tu peux aussi utiliser un repère cartésien et inscrire, à côté du point image du couple $(x ; y)$ la distance de ce couple. Dans ce cas des recherches intéressantes se présentent.

Ex. 2. Calcule $d(x ; x)$; compare $d(x ; y)$ et $d(y ; x)$. Tu sais $d(a ; b) = 0$ que peux-tu en déduire?

Ex. 3. Compare $d(x ; y) + d(y ; z)$ à $d(x ; z)$ pour plusieurs triples (x, y, z). Qu'observes-tu? Essaie d'établir la validité de ton observation pour tout triple.

7. — Cinquième et sixième fiches.

(5e fiche) $\left\{\begin{array}{l}\text{Cadre-résumé des propriétés de } d.\\ \text{Deux autres exercices.}\end{array}\right.$

(6e fiche). L'ensemble des solutions de l'équation $3x = 1$ est l'intersection des ensembles de solutions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des inéquations sur $\mathbb{D}$:

$$(A)\ 3x \leqslant 1, \qquad (B)\ 3x \geqslant 1.$$

Si nous ignorions que cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{D}$ nous pourrions chercher *des* solutions de (A), *des* solutions de (B), en cherchant à diminuer la distance d'un élément de $\mathcal{A}$ à un élément de $\mathcal{B}$.

Exerçons-nous sur l'équation : $(\mathbb{D})$, $x^2 + x = 3$.

... [C'est dans cette fiche qu'on fait remarquer qu'on n'apprécie la précision d'une solution par défaut qu'en l'associant à une solution par excès; que la précision est exprimée par la distance du couple ainsi formé.]

8. — Septième, huitième et neuvième fiches.

(7e fiche). Retour à l'équation : $(\mathbb{D})$, $3x = 1$; suite croissante (décroissante) des solutions approchées par défaut (par excès). On range les uns au-dessus des autres les nombres dont la distance est une unité décimale et on encadre ces couples. Ne gardant que les décimaux encadrés on obtient de nouvelles suites :

s_1 0,3 0,33 0,333 0,333 3 ...
s_2 0,4 0,34 0,334 0,333 4 ...

Introduction du vocabulaire : quotient approché par défaut (excès) à un dixième (un centième, ...) de 1 par 3.

Le nombre 0,33 est le plus grand élément de D_2 dont le triple est inférieur à 1.

(7e et 8e fiches). On retrouve la technique de la division étudiée à l'école primaire.

Il y aurait intérêt à repousser cette étude à plus tard et à passer directement à la 9e fiche ; sinon certains élèves vont oublier la définition des quotients approchés par défaut (excès) à 10^n près et son lien avec les encadrements par des décimaux dont la distance est une unité décimale, pour ne retenir qu'un mécanisme.

Cette remarque m'est suggérée par une constatation un peu décevante faite quelques mois plus tard chez près de la moitié des élèves qui continuent à indiquer correctement un quotient approché par défaut à 10^n près mais :

— buttent sur le quotient approché par excès à 10^n près,

— croient pouvoir déduire la racine carrée approchée par défaut à un centième d'un encadrement comme :

$$1{,}95^2 \leqslant a < 1{,}97^2$$

(9e fiche). Remarques : la suite s_2 est parfaitement connue dès que s_1 est connue.

— s_1 peut être résumée par l'écriture 0,333 ... ou 0,*3* ... appelée ...

— Exercices : donner les suites s_1 et s_2 pour les solutions approchées des équations : $0{,}7 . x = 0{,}48$ $\quad 64 . x = 7$.

— Suites s_1 et s_2 pour $(D) : x^2 = 2$; écriture qui les résume; vocabulaire : racine carrée; racine carrée approchée par défaut (par excès) à 10^n près; symboles $\sqrt{A}$, $A^{\frac{1}{2}}$.

9. — Dixième fiche.

Exercices : recherche de racines carrées et de racines carrées approchées. Usage de la table des carrés de 100 à 10 000.

Retour sur le problème du cube : racine cubique.

10. — Onzième fiche.

Problème. La recherche de valeurs approchées d'un nombre a a donné une suite s_1 et une suite s_2 résumées par la suite décimale illimitée : 10, 271 1 . . . ; la recherche d'un nombre b a donné des suites s'_1 et s'_2 résumées par la suite décimale illimitée périodique : 0,7 . . . . Peux-tu écrire des inégalités vérifiées par le nombre $(a + b)$? Dans quelle information peux-tu les résumer?

[Remarque. Les élèves connaissaient les propriétés de l'ordre sur $\mathbb{D}$.]

11. — Si, dans l'exercice précédent, on remplace $(a + b)$ par $(a - b)$ les calculs sont un peu plus pénibles sans machine. On trouve :

7,14 ...	$< a.b < 8{,}24$	gardons	$7 < a.b < 9$
7,907 9	$< a.b < 8{,}018\ 4$	gardons	$7{,}9 < a.b < 8{,}1$
7,980...	$< a.b < 7{,}991...$	gardons	$7{,}98 < a.b < 8{,}00$
7,98783...	$< a.b. < 7{,}98893...$	gardons	$7{,}987 < a.b < 7{,}989$

Nous avons obtenu des encadrements par des décimaux de distances 2, 2.10^{-1}, 2.10^{-2}, 2.10^{-3}. Nous pouvons cependant en déduire :

$7 < a.b < 8$ (avec la première et la troisième ligne)

$7{,}9 < a.b < 8{,}0$ (avec la deuxième et la troisième ligne)

$7{,}98 < a.b < 7{,}99$ (avec la troisième et la quatrième ligne)

informations résumées par le décimal illimité : 7,98 ...

12. — Les valeurs approchées par défaut et par excès d'un nombre d sont données par la suite décimale illimitée 1,3 . . . . Examine les encadrements de $4d$, puis de $3d$.

14. — Les valeurs approchées par défaut et par excès d'un nombre a sont données par la suite décimale illimitée 2,339 . . . . Compare ce nombre a au nombre décimal $b = 2{,}34$.

***

Remarque. — Quelques autres exercices n'exigeant pas de calculs fastidieux ont été donnés en devoirs; il y aurait eu intérêt à multiplier des exercices comme l'exercice traité du paragraphe 12, après l'introduction des nombres réels pour éviter l'ambiguïté qui s'introduit dans cette dernière fiche, sur l'existence et la nature de ces nombres a et b.

Bien entendu l'étude de ces onze fiches prend un peu de temps; mais on sent bien qu'il s'agit là d'une étape essentielle. Chemin faisant le désir de postuler l'existence d'un inverse pour tout décimal et d'une racine carrée pour tout décimal positif se fait de plus en plus sentir et le professeur n'étonne personne en commençant à parler d'un ensemble de nombres dont l'existence est admise par les mathématiciens pour satisfaire à ces exigences.

C'est pourquoi l'ambiguïté de la fiche 11 n'est pas gênante.

Peu après trois fiches présentent l'ensemble des nombres réels sans dépasser les exigences des élèves :

— $\mathbb{R} \supset \mathbb{D}$; $\quad \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$; $\quad \{0\} = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-$.

— Addition et multiplication prolongent celles des décimaux en faisant de $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_0, \times)$ des groupes abéliens et en conservant la distributivité.

— Existence d'une et une seule racine carrée pour tout réel positif.

— Extension des définitions : $a > b \Leftrightarrow (a - b) \in \mathbb{D}^+$.

— Définition de la valeur absolue : $|a| = \text{Max}\ (a\,;\ -a)$.

***

Remarques sur l'étude des onze fiches.

L'étude des quatre premières a été l'objet d'un travail d'équipes de trois élèves, mené à la demande des élèves d'une manière intensive, sans dispersion sur d'autres sujets, pendant les quatre heures hebdomadaires. Elle a été très animée. Au départ j'ai dû répondre à beaucoup de questions (hésitations sur le système métrique en particulier) mais le travail demandé a été bien compris et les erreurs d'interprétation peu nombreuses.

Ensuite le travail s'est progressivement individualisé : travail par table de deux, puis travail individuel sur les dernières fiches pour me permettre de vérifier l'assimilation.

Je suis convaincue qu'avec cette approche nous avons employé notre temps de façon beaucoup plus profitable qu'avec une construction des rationnels. Il est clair que le temps dont nous disposons impose un choix : en choisissant de construire $\mathbb{Q}$ on remet à plus tard l'introduction du calcul approché et les prémices de l'analyse (« Tôt et progressivement ») et on laisse dans l'ombre la notion de réel, ou bien on la dissimule sous celle des racines carrées.

Nous avons l'avantage de traiter une seule fois le calcul sur les quotients, très rapidement et sans aucune difficulté. Bien entendu le calcul numérique fait alors place à deux sortes d'exercices : ceux où la réduction au même dénominateur est naturelle; ceux où c'est le recours à une valeur approchée décimale. Nos collègues physiciens devraient assez rapidement s'apercevoir d'un changement. En 1974 il sera déjà intéressant de les entendre; à condition qu'ils n'oublient pas que le premier cycle doit rester le lieu où on aborde les notions, techniques et savoir-faire de base, sans prétendre rien achever.

La première partie de cet article se propose de préciser la place de l'enseignement du calcul numérique en Quatrième dans l'ensemble de la formation de l'élève.

La deuxième partie est une esquisse sommaire de la théorie sous-jacente à l'introduction des décimaux et des réels en Quatrième : elle ne fait appel qu'à des connaissances élémentaires sur les ensembles ordonnés, les groupes et les corps.

Les décimaux et les réels en quatrième

E. Dehame,
Poitiers.

1. — Objectifs et méthodes pédagogiques.

Parmi les nombreux objectifs que l'on peut se fixer en enseignant le calcul numérique en Quatrième, nous n'en retiendrons que quelques-uns dont il est inutile de souligner l'importance, tant pour la formation du futur scientifique que pour la formation de l'homme de notre siècle, quelle que soit sa destinée.

1.1. Apprentissage des techniques de calcul numérique en vue des applications.

Dans le monde contemporain, où le nombre envahit tous les domaines de la vie, l'élève doit être familiarisé avec le nombre décimal, car c'est toujours en décimaux que s'expriment les résultats des mesures (physiques ou statistiques), et c'est par le truchement des décimaux que se font les calculs sur les réels.

On devrait pouvoir exiger de l'élève sortant de Quatrième :

a) ***Qu'il connaisse la signification des opérations usuelles sur les décimaux*** (qu'il sache par exemple traduire par des inégalités le fait que 0,53 est le quotient approché à 10^{-2} près par défaut de 7 par 13);

b) ***Qu'il sache pratiquer avec aisance ces opérations*** (par exemple, connaissant le produit de 17 par 42, trouver le produit de 0,017 par 4,2 ou de 17.10^{6} par 42.10^{-2}). Il est à noter que, dans la pratique, on utilise aussi bien la représentation des décimaux par des nombres à virgule que leur représentation par des produits $a.10^p$ ($a \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$) ou encore par des produits du type $a.10^p$ ($1 \leqslant |a| < 10$; $p \in \mathbb{Z}$)

$$412,64 = 41\,264.10^{-2} = 4,126\,4.10^2$$

Il est utile de savoir calculer sur les décimaux sous ces différentes formes et de savoir passer rapidement d'un mode de représentation à un autre.

c) ***Qu'il sache prévoir l'ordre de grandeur d'un résultat.*** Par exemple, si $x = 0,125$, ce qui importe n'est pas de savoir que x^5 a 15 chiffres après la virgule, mais que x^5 est de l'ordre de 2.10^{-5}. Si on cherche la vitesse moyenne d'un avion qui parcourt Paris-Bordeaux en 1 h 10, on peut trouver 500 km/h, mais sûrement pas 50 km/h, ni 5 000 km/h.

La pratique du calcul à la machine est, à cet égard, très éducative, puisqu'elle oblige l'élève à penser à la place de la virgule.

d) ***Qu'il possède une certaine maîtrise du calcul des encadrements, mais surtout, qu'il ne cherche pas à retenir de « recettes » à ce sujet.*** Jusqu'à présent, l'enseignement trop tardif du calcul des encadrements en mathématiques a contraint les professeurs de technologie et de physique à donner aux élèves des « recettes » pour calculer l'incertitude sur une somme ou sur un produit; la mémorisation prématurée de ces recettes a bloqué beaucoup d'entre eux à tel point qu'en classe de Mathémathiques Supérieures ou dans le Premier Cycle des Universités, ils sont encore incapables d'aborder sainement un problème d'analyse numérique.

Puisque les élèves de Quatrième reçoivent parallèlement un enseignement de technologie, il importe de faire très tôt le lien entre le langage du technologue et celui du mathématicien :

« x_0 est une valeur approchée de x à 0,5 près » signifie que

$$x_0 - 0,5 \leqslant x \leqslant x_0 + 0,5$$

En mathématiques, ces dernières inégalités sont, sans aucun doute, des inégalités au sens large (penser aux tables de logarithmes dans lesquelles « $\log x = 0,35274$ à $0,5.10^{-5}$ près » signifie que $\log x \in [0,352735;\ 0,352745]$). Si le technologue préfère les inégalités strictes, on peut convenir que

$$x_0 - 0,5 < x < x_0 + 0,5$$

se lit :

« x_0 est une valeur approchée de x à moins de 0,5 près ». Mais, de toute façon, dans un problème concret, la distinction entre les inégalités larges et les inégalités strictes est illusoire.

En réalité, dans un véritable problème concret, on ne s'intéresse pas aux extrémités de l'intervalle d'encadrement, mais à la probabilité pour que $|x - x_0|$ soit inférieur à un ε donné. Le bagage mathématique des élèves de

Quatrième est encore trop rudimentaire pour qu'on puisse leur faire toucher du doigt le fond du problème; mais ce n'est pas une raison pour bannir les problèmes concrets du cours de mathématiques de Quatrième. Bien, au contraire, des allusions au concret sont indispensables à tous les niveaux de l'enseignement; mais, à un niveau déterminé, on ne peut aborder les problèmes concrets qu'avec les outils dont on dispose à ce niveau, tout en faisant remarquer que ces outils ne sont pas parfaits.

1.2. Apprentissage de la déduction.

Contrairement à une opinion encore très répandue il y a quelques années, l'étude des nombres fournit, mieux encore que l'étude de l'espace, un grand nombre de situations propices au développement de l'esprit déductif.

Mais il serait prématuré, en classe de Quatrième, de donner à l'élève une construction complète des ensembles de nombres où tous les axiomes et toutes les démonstrations seraient explicités (de même qu'il serait prématuré de lui donner une véritable construction axiomatique du plan affine ou du plan euclidien).

La construction que nous proposons dans la deuxième partie de cet article n'est qu'un fil directeur à l'usage du professeur. Celui-ci devra choisir (dans le cadre de la construction que nous proposons ou de toute construction équivalente) les propriétés qu'il admet et celles dont la démonstration est suffisamment simple et suffisamment éducative pour pouvoir être proposée avec fruit aux élèves.

Ce qui importe, c'est qu'à la fin de la Quatrième, l'élève soit capable de ressentir que, dans telle ou telle situation, une démonstration s'impose (nécessité de démontrer une propriété qui n'a été que constatée pour quelques valeurs de n, nécessité de démontrer la réciproque d'un théorème, etc.), et soit capable de faire une démonstration simple à partir de prémisses qu'on lui rappellera si c'est nécessaire.

Voici, par exemple, sous quelle forme la démonstration de la compatibilité de l'ordre et de l'addition dans l'ensemble des décimaux a été proposée aux élèves des classes de Quatrième expérimentale de Poitiers :

Exercice.

On sait que $a > b$; on se propose de comparer $(a + c)$ et $(b + c)$; pour cela on calcule leur différence.

Vous utilisez les propriétés :

① l'addition est associative et commutative.

② pour retrancher un décimal, on ajoute son opposé.

③ la somme d'un décimal et de son opposé est égale à 0.

④ l'opposé de la somme de deux décimaux est égal à la somme de leurs opposés.

⑤ 0 est élément neutre pour l'addition.

Appelons d la différence $(a + c) - (b + c)$.

$$\boxed{d = (a + c) - (b + c)}$$

$$\boxed{d = (a + c) + \text{opp } (b + c)}$$

$$\boxed{d = (a + c) + (\text{opp } b + \text{opp } c)}$$

$$\boxed{d = (a + \text{opp } b) + (c + \text{opp } c)}$$

$$\boxed{d = a + \text{opp } b + 0}$$

$$\boxed{d = a + \text{opp } b}$$

$$\boxed{d = a - b}$$

Vous aviez $d = (a + c) - (b + c)$, vous avez obtenu $d = a - b$; quelle est votre conclusion?

Pouvez-vous répondre à la question posée au début de l'exercice?

Cet exercice, posé en début d'année, n'est qu'un premier stade dans l'initiation à la déduction. Au stade suivant, des démonstrations sont proposées toujours sous la forme d'organigrammes, mais en laissant plus d'initiative à l'élève. Enfin, à un stade ultérieur, il faut initier l'élève à la rédaction d'une démonstration.

1.3. Développement de l'intuition numérique et préparation aux raisonnements d'analyse.

Ce serait une erreur de centrer l'enseignement des mathématiques sur la déduction : l'enseignement de la langue française ne se réduit pas à celui de la grammaire, l'enseignement de la musique ne se réduit pas à celui de l'harmonie. Beaucoup d'idées mathématiques, simples et fécondes, sont accessibles aux élèves bien avant qu'ils ne soient capables de démontrer tous les théorèmes qui, logiquement, leur sont antérieurs.

Plus important que l'apprentissage de la déduction est le développement de *l'intuition numérique*.

C'est cette intuition qui permettra à l'élève d'utiliser avec efficacité ses connaissances mathématiques dans les autres disciplines scientifiques et dans les problèmes posés par la vie courante.

C'est elle qui lui permettra d'aborder dès le second cycle des notions d'*analyse* qui, pour la plupart, n'étaient enseignées autrefois qu'en Terminale ou en Faculté et qui, dans le monde moderne, sont considérées comme les éléments de base de toute culture scientifique : les notions de limite, de continuité, de dérivée, d'intégrale.

En Quatrième, les seules notions préparatoires à l'analyse que l'on puisse introduire sont celles d'intervalle (ouvert ou fermé), de distance, de suite emboîtée d'intervalles. Mais il est possible de trouver des problèmes tout à fait élémentaires et concrets qui font appel à des types de raisonnements propres à l'analyse.

a) **Problèmes de majoration.**

Si on connaît un encadrement d'un décimal x, par exemple :

$$1{,}799 \leqslant x < 1{,}901, \qquad (1)$$

on peut en déduire d'autres encadrements :

$$1{,}79 \leqslant x < 1{,}91 \qquad (2)$$
$$1{,}7 \leqslant x < 2 \qquad (3)$$

Cette majoration de l'amplitude de l'encadrement ne peut pas être faite sans précautions : un élève habitué trop tôt à négliger aurait tendance à remplacer (1) par

$$1{,}8 \leqslant x < 1{,}9$$

Le choix entre les encadrements (1), (2), (3) est guidé par des considérations d'opportunité : précision permise par les instruments de mesure, par la machine à calculer utilisée, commodité des calculs ultérieurs à effectuer à la main, etc. Ce choix exige une démarche de l'esprit, dont tout automatisme est exclu, et qui n'a rien à voir avec la déduction; nous sommes loin de l'enseignement traditionnel de l'algèbre en Quatrième, où alternaient les calculs (automatiques) et les démonstrations; mais nous sommes très près des raisonnements utilisés en physique et aussi en analyse :

Le choix de l'encadrement le plus « raisonnable » d'un résultat numérique est analogue au choix du « meilleur » α correspondant à un ε donné dans une démonstration de continuité et au choix du majorant le plus « commode » dans la démonstration de la convergence d'une série.

b) Problèmes du type : « on donne ε, trouvez α ... ».

1er exemple : le quotient approché à 10^{-6} près par défaut de 652 par 27 est 24,148 148.

Pour que 27 x soit une valeur approchée de 652 à 10^{-2} près, suffit-il de prendre pour x

24,1? 24,14? 24,148? ...

2e exemple : on donne deux décimaux s'écrivant chacun avec un grand nombre de chiffres à droite de la virgule. Combien faut-il conserver de décimales pour obtenir leur produit à 10^{-3} près?

Le premier exemple est une approche expérimentale de la continuité de la fonction $x \mapsto 27\,x$, le second est une approche expérimentale de la continuité de la fonction de deux variables : $(x, y) \mapsto xy$. Mais la notion de continuité ne pourra être explicitée que bien plus tard, quand les élèves sauront manier les quantificateurs.

Le rôle des figures.

Chez beaucoup d'élèves, l'intuition numérique a besoin d'un support graphique.

Pour mettre en évidence des propriétés de $\mathbb{R}$ ne faisant intervenir que l'ordre, on peut se contenter de classer des nombres réels en respectant leur ordre mais sans s'intéresser aux longueurs des intervalles qui les séparent :

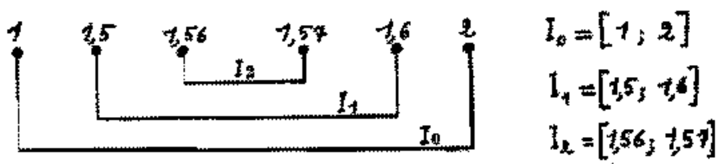


Fig. 1.

Mais, pour les propriétés de $\mathbb{D}$, ou de $\mathbb{R}$, qui font intervenir la structure d'espace métrique (c'est-à-dire la notion de distance), seules les figures à l'échelle sont suffisamment suggestives :

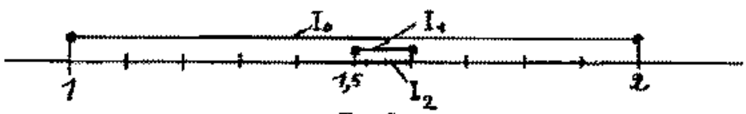


Fig. 2.

Naturellement, on peut reprocher beaucoup de choses aux figures : impossibilité de distinguer les décimaux des réels non décimaux, risque de confusion entre « propriété constatée sur la figure » et « propriété démontrée ». Il faut que les élèves sachent que la figure n'est pas l'objet de l'étude : ce n'est qu'un support pour l'imagination. Elle joue le même rôle que les diagrammes de Venn pour l'étude des ensembles : elle n'a pas plus de valeur mathématique, mais elle a autant de valeur psychologique.

Dans une classe de Quatrième expérimentale, les élèves avaient à encadrer le poids du contenu d'une bouteille connaissant un encadrement du poids de la bouteille pleine et un encadrement du poids de la bouteille vide. Ils n'ont vraiment compris le problème qu'après l'avoir traduit par un graphique, mais il a fallu qu'on leur demande explicitement de tracer ce graphique (ils n'y pensent pas d'eux-mêmes). A un niveau plus avancé, les étudiants éviteraient bien souvent des calculs inutiles s'ils s'astreignaient à faire une figure (ou, tout au moins à essayer de s'imaginer la figure).

Hormis chez quelques sujets exceptionnels qui viennent au monde avec l'intuition numérique, celle-ci s'acquiert par le tracé effectif de nombreuses figures. Ce n'est qu'après en avoir tracé un nombre suffisamment grand que les élèves arriveront à s'imaginer les figures « dans leur tête » sans les tracer effectivement.

La comparaison avec le dictionnaire.

Nous venons de signaler que toute représentation graphique ne peut donner qu'une idée grossièrement approchée de la structure de $\mathbb{R}$. Pour développer l'intuition du nombre réel sans inculquer d'idées fausses, il est nécessaire d'en varier les représentations imagées. Voici une « image » de $\mathbb{R}$ qui, elle non plus, n'est pas parfaite, mais qui, mieux que la figure, rend compte des propriétés d'ordre de $\mathbb{R}$.

On imagine qu'on classe dans un dictionnaire tous les mots (d'un nombre fini de lettres) que l'on peut former avec les 26 lettres de l'alphabet. Puis on intercale dans ce dictionnaire des mots illimités; par exemple entre *bar* et *bas*, on peut intercaler une infinité de mots illimités tels que *baraaa*..., *barcdecdecde*..., ... (remarquez qu'entre *bar* et *bas*, il y avait aussi une infinité de mots limités).

Cette situation présente une grande analogie avec le passage des décimaux aux réels, les mots limités jouant le rôle des décimaux et les mots illimités le rôle des réels non décimaux. Cette analogie serait parfaite si on se bornait aux réels de l'intervalle [0; 1] et si on convenait d'identifier des mots tels que *bas*, *barzzz...* et *basaaa...* (de même qu'on identifie 0,523; 0,522 999... et 0,523 000).

2. — Une théorie élémentaire des décimaux et des réels.

2.1. Introduction des décimaux.

Dans les classes antérieures, la nécessité d'introduire des nombres non entiers a été ressentie par les élèves à propos des problèmes de mesure. Il n'y a pas lieu de revenir sur cette motivation en Quatrième. Le moment est venu de développer chez l'élève le concept abstrait de nombre décimal : si la notion de décimal reste attachée à un exemple concret (celui de la mesure des longueurs par exemple), il sera difficile de concevoir la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un décimal, de ressentir la nécessité d'introduire des nombres non décimaux, etc.

Voici, dans ses grandes lignes, le principe d'une introduction possible des décimaux, introduction qui se veut abstraite, mais très proche des techniques de calcul utiles aux élèves de Quatrième.

a) On considère des symboles tels que :

$$\ldots 000\,018\,206,\ 493\,000\,000$$
$$\ldots 000\,000\,120,\ 000\,000\,000\ldots$$
$$-(\ldots 0\,287\,000\,000,\ 000\,000\,000\ldots)$$
$$-(\ldots\ \ldots 000\,000,\ 000\,724\,000\ldots)$$

Chacun de ces symboles est constitué par une suite de chiffres illimitée vers la droite et vers la gauche, séparée en deux parties par une virgule, et précédée ou non du signe —; les chiffres sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

On identifie les symboles :

$$\ldots 000{,}000\ldots \text{ et } -(\ldots 000{,}000\ldots).$$

L'ensemble ainsi défini se note $\mathbb{D}$ (ensemble des *décimaux*).

b) On identifie les éléments de $\mathbb{D}$ dont tous les chiffres à droite de la virgule sont nuls aux éléments de $\mathbb{Z}$:

$$\ldots 000\,018{,}000\ldots \text{ est identifié à } 18$$
$$-(\ldots 040\,100{,}000\ldots) \text{ est identifié à } -40\,100$$

La paire de symboles $\{\ldots 000{,}000\ldots;\ -(\ldots 000{,}000\ldots)\}$ est identifiée à 0.

c) Dans $\mathbb{D}$, on définit la *multiplication par 10* de la façon suivante (décalage de la virgule d'un rang vers la droite), on pose :

$$(\ldots 0a_n a_{n-1}\ldots a_0,\ a_{-1},\ a_{-2}\ldots a_{-p}0\ldots)\times 10 = 0a_n a_{n-1}\ldots a_0 a_{-1},$$
$$a_{-2}\ldots a_{-n}0\ldots \text{ et, pour tout } x\in\mathbb{D},\ 10.x = x.10.$$

Cette définition généralise la règle bien connue de multiplication d'un entier par 10.

d) De cette définition résulte l'existence d'un élément $\alpha\in\mathbb{D}$ tel que $\alpha.10 = 10.\alpha = 1.$:

$$\alpha = \ldots 000,\ 100\,000\ldots$$

On note $\alpha = 10^{-1}$, et on définit la multiplication par 10^{-1} par décalage de la virgule d'un rang vers la gauche.

On vérifie que 10^2, 10^3, $\ldots$, 10^n admettent respectivement pour inverses α^2, α^3, $\ldots$, α^n (qu'on note aussi 10^{-2}, 10^{-3}, $\ldots$, 10^{-n} et qui s'écrivent $\ldots 0{,}010\,0\ldots$; $\ldots 0{,}001\,00\ldots$; etc.).

On peut ici mettre en évidence les propriétés de groupe commutatif de l'ensemble $\{10^p ;\ p\in\mathbb{Z}\}$ pour la multiplication et les règles de calcul dans ce groupe :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ \forall p\in\mathbb{Z},\ 10^n.10^p = 10^{n+p}$$
$$(10^n)^p = 10^{np}$$

On définit *le produit d'un décimal* x *par* $10^n (n\in\mathbb{Z})$ en itérant n fois la multiplication par 10 si $n > 0$, en itérant $|n|$ fois la multiplication par 10^{-1} si $n < 0$ (décalage de la virgule de n rangs vers la droite ou de $|n|$ rangs vers la gauche).

e) Cette dernière définition permet de mettre, de plusieurs façons, tout décimal sous la forme $a.10^{-n}$ $(a\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N})$
(par exemple, $-(\ldots 027{,}2900\ldots) = -2729.10^{-2} = -27\,290.10^{-3} = \ldots$).

On définit alors *la somme et le produit de deux décimaux quelconques* par les formules :

$$a.10^{-n} + b.10^{-n} = (a+b).10^{-n} \qquad (1)$$
$$a.10^{-n}\times b.10^{-p} = a.b.10^{-(n+p)} \qquad (2)$$

On vérifie que les seconds membres de (1) et (2) ne dépendent pas des représentations choisies dans le premier membre : par exemple, la formule (1) donne :

$$3.10^{-2} + 50.10^{-2} = 53.10^{-2};\quad 30.10^{-3} + 500.10^{-3} = 530.10^{-3};$$

53.10^{-2} et 530.10^{-3} représentent le même élément de $\mathbb{D}$.

On démontre que, muni des lois de composition internes définies par (1) et (2), $\mathbb{D}$ est un anneau commutatif, et que $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{D}$.

f) L'ensemble $\mathbb{D}_+$ des décimaux qui sont représentés par des symboles non précédés du signe — est stable pour l'addition et pour la multiplication. On convient d'écrire :

$$x \leqslant y$$

si et seulement si $y - x$ est un élément de $\mathbb{D}_+$.

On démontre que la relation notée $\leqslant$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{D}$, et que cette relation d'ordre est compatible avec la structure d'anneau de $\mathbb{D}$:

$$\forall a \in \mathbb{D},\ \forall b \in \mathbb{D},\ \forall c \in \mathbb{D},\quad a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c \qquad (3)$$

$$\forall a \in \mathbb{D},\ \forall b \in \mathbb{D},\ \forall c \in \mathbb{D}_+,\quad a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc \qquad (4)$$

Les propriétés des inégalités dont on fera couramment usage dans les problèmes sur les encadrements sont des corollaires de (3) et (4) : addition des inégalités membre à membre, multiplication membre à membre des inégalités entre décimaux positifs.

2.2. Structure d'espace métrique de $\mathbb{D}$.

a) On démontre que la distance de deux décimaux x, y,

$$d(x, y) = |x - y|$$

possède les propriétés suivantes (propriétés caractéristiques des distances) :

$d(x, y)$ est un réel positif (ici un décimal positif) et

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

On dit encore que $\mathbb{D}$, muni de la distance d, est un *espace métrique*.

b) Dans tout espace métrique E, on définit les notions de *boule ouverte* et de *boule fermée :*

Si $a \in$ E et si $r \in \mathbb{R}_+$, la boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble des éléments x de E tels que $d(a, x) < r$; la boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble des éléments x de E tels que $d(a, x) \leqslant r$.

Dans $\mathbb{D}$, la boule ouverte (respectivement fermée) de centre a et de rayon r n'est autre que l'*intervalle ouvert* (respectivement *fermé*) d'extrémités $a - r$ et $a + r$.

L'introduction de ce langage est commode pour établir la liaison entre le langage des encadrements et celui des valeurs approchées : « x_0 est une valeur approchée de x à ε près » signifie que $d(x_0, x) \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire que x est encadré par le couple de décimaux $x_0 - \varepsilon$, $x_0 + \varepsilon$.

c) Dans tout espace métrique E, on définit le *diamètre* d'une partie bornée quelconque A de E : c'est la borne supérieure de $d(x, y)$, x, y étant deux éléments quelconques de A.

Le diamètre d'un intervalle de $\mathbb{D}$ est la distance de ses extrémités.

Cette notion correspond à celle d'*amplitude* d'un encadrement (rappelons que, si on a choisi comme valeur approchée le centre de l'intervalle d'encadrement, l'incertitude est égale à la moitié de l'amplitude de l'encadrement).

2.3. Insuffisance des décimaux.

a) ***Lacunes de nature algébrique.***

Dans $\mathbb{D}$, certaines équations n'ont pas de solutions : $3x = 1$; $x^2 = 2$; $x^2 = -1$; etc.

Cette remarque ne conduit pas à l'introduction de $\mathbb{R}$, mais plutôt à celle de l'ensemble des nombres algébriques ou de certains de ses sous-ensembles (ensemble des rationnels, des réels de la forme $a + b\sqrt{2}$ où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$, des complexes de la forme $a + b\,i$ où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$, etc.).

b) ***Lacunes de nature topologique.***

On appelle suite emboîtée d'intervalles (dans un ensemble totalement ordonné, $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{R}$ par exemple) toute suite $I_0, I_1, \ldots, I_n \ldots$ d'intervalles de cet ensemble telle que

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_{n-1} \supset I_n \supset \ldots$$

Dans $\mathbb{D}$, il existe des suites emboîtées d'intervalles *fermés* dont l'intersection est vide, par exemple :

$$I_0 = [0;\ 1],\quad I_1 = [0{,}3;\ 0{,}4],\quad I_2 = [0{,}33;\ 0{,}34],\quad \ldots,$$
$$I_n = [0{,}333\ldots33;\quad 0{,}333\ldots34]\ (n \text{ chiffres}),\ \ldots$$

On verra ultérieurement (mais pas en Quatrième) que, dans $\mathbb{R}$, cela ne se produit jamais : *toute suite emboîtée d'intervalles fermés de* $\mathbb{R}$ *a une intersection non vide.*

C'est là que réside la raison profonde pour laquelle on est amené à prolonger $\mathbb{D}$ en un ensemble plus riche qu'on appellera $\mathbb{R}$. Cette différence fondamentale entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{R}$ ne peut pas être énoncée dans toute sa généralité en Quatrième. Mais il ne faudra pas manquer de la faire ressentir à propos des exemples proposés par le programme (recherche de l'inverse et de la racine carrée). Ces exemples, étudiés sous leur simple aspect algébrique, ne constitueraient pas une motivation suffisante à l'introduction des réels.

Ce n'est pas la représentation graphique des décimaux par les points d'une droite qui rend intuitive ces lacunes topologiques de $\mathbb{D}$: pour mesurer des longueurs, les décimaux (et même souvent les décimaux d'ordre 2 ou 3) sont largement suffisants. Toute motivation de l'introduction des réels basée exclusivement sur des problèmes de mesure (au sens physique) ne peut que donner des idées fausses ou incomplètes. Ce n'est pas une raison pour renoncer aux figures, mais il faut que l'élève sente qu'au moment où on introduit les réels, on fait un nouveau pas dans l'abstraction, dans l'idéalisation (la comparaison avec le dictionnaire signalée plus haut (1.3) n'est pas déplacée ici, car il s'agit d'un dictionnaire imaginaire, d'un dictionnaire idéal).

2.4. Introduction de l'ensemble ordonné des réels.

a) *Suites décimales illimitées.*

En analysant le critère qui permet de décider si un décimal représenté par une suite illimitée de chiffres est inférieur à un autre décimal, on s'aperçoit que, dans le « dictionnaire » des suites illimitées de chiffres, on peut en intercaler de nouvelles telles que

$\ldots 0\,012{,}325\ 325\ 325\ \ldots$ (période 325)

$-\ (\ldots 0\,000{,}024\ 242\ 424\ \ldots)$ (période 24)

$\ldots 0\,000{,}123\ 456\ 789\ 101\ 112\ \ldots$ (suite des naturels écrits en base 10).

Comme dans les suites illimitées introduites au paragraphe 2.1, tous les chiffres situés à gauche d'un certain chiffre sont nuls; mais ici, il peut y avoir, vers la droite, une infinité de chiffres non nuls.

Nous passons sous silence l'énoncé explicite du critère de comparaison de deux suites décimales illimitées et la démonstration du fait que, dans l'ensemble des suites décimales illimitées, la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total.

On peut remarquer qu'entre deux suites décimales illimitées distinctes, on peut en intercaler une infinité d'autres, sauf dans le cas où l'une d'elles représente un décimal

$$\ldots 0\ 0\ a_n \ldots a_0, a_{-1} \ldots a_{-p}\ 0 \ldots \quad (a_{-p} \neq 0)$$

et où l'autre s'écrit :

$$\ldots 0\ 0\ a_n \ldots a_0, a_{-1} \ldots a_{-p+1}\ (a_{-p} - 1)\ 999\ \ldots \quad \text{(période 9)}$$

Par exemple, entre ... 01,00 ... et ... 00,999 ..., on ne peut intercaler aucune autre suite décimale illimitée. Nous dirons que deux telles suites sont « *consécutives* ».

b) *Nombres réels.*

Dans l'ensemble des suites décimales illimitées, on identifie les suites « consécutives ». On obtient ainsi un nouvel ensemble qu'on note $\mathbb{R}$ (ensemble des *réels*).

En somme, un nombre réel est :

— soit une suite décimale illimitée (précédée ou non du signe —) n'ayant pas pour période 0 ni 9,

— soit une paire de suites décimales illimitées consécutives.

Cette paire de suite est identifiée au décimal représenté par l'une d'entre elles : par exemple :

Le réel $\{\ldots 01{,}00 \ldots ; \ldots 00{,}999 \ldots\}$ est identifié au décimal $\ldots 01{,}00 \ldots$ (c'est-à-dire à l'entier 1).

Donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$.

Pour définir la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$, il est commode de convenir qu'on choisira toujours, pour représenter un réel, une suite décimale n'ayant pas pour période 9; la comparaison de deux réels se ramène alors à la comparaison de deux suites décimales illimitées. La relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$ est une relation d'*ordre total*, qui *prolonge* la relation d'ordre dans $\mathbb{D}$.

On peut démontrer simplement que tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient une infinité de décimaux et une infinité de réels non décimaux ($\mathbb{D}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{D}$ sont *denses* dans $\mathbb{R}$).

On peut aussi (mais c'est moins facile) démontrer les deux théorèmes suivants :

(1) Si une suite *emboîtée* d'intervalles de $\mathbb{R}$, *à extrémités décimales* est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un intervalle de la suite dont le diamètre est $\leqslant 10^{-n}$, l'intersection de tous les intervalles de cette suite est un singleton de $\mathbb{R}$.

(2) Toute suite emboîtée d'intervalles fermés de $\mathbb{R}$ a une intersection non vide.

Le théorème (2), qui ne fait intervenir que l'ordre dans $\mathbb{R}$, est un théorème d'existence.

Le théorème (1) permet de démontrer à la fois l'existence et l'unicité d'un réel; il fait intervenir la notion de distance (mais s'agit de la distance de deux décimaux : la distance de deux réels quelconques n'a pas encore été définie).

C'est ce théorème qui sera utilisé (mais peut-être pas de façon explicite dans nos classes) pour définir la somme et le produit de deux réels.

2.5. Opérations sur les réels.

a) *Encadrements canoniques d'un réel.*

Le réel $x = \ldots 02{,}749\ 749\ 749 \ldots$ (période 749) admet pour encadrements :

$$2 \leqslant x \leqslant 3; \qquad 2{,}7 \leqslant x \leqslant 2{,}8; \qquad 2{,}74 \leqslant x \leqslant 2{,}75; \quad \ldots$$

Les intervalles [2; 3], [2,7; 2,8], [2,74; 2,75], ... de $\mathbb{R}$ forment une suite emboîtée vérifiant les conditions du théorème (I) énoncé ci-dessus (§ 2,4). Ils ont pour intersection $\{x\}$.

Il est commode d'appeler « *encadrements canoniques de* x » les encadrements fournis par ces intervalles.

Un décimal admet deux suites d'encadrements canoniques :

$$2 \leqslant 2{,}1 \leqslant 3; \qquad 2{,}1 \leqslant 2{,}1 \leqslant 2{,}2; \qquad 2{,}10 \leqslant 2{,}1 \leqslant 2{,}11; \ \ldots$$
$$2 \leqslant 2{,}1 \leqslant 3; \qquad 2{,}0 \leqslant 2{,}1 \leqslant 2{,}1; \qquad 2{,}09 \leqslant 2{,}1 \leqslant 2{,}10; \ \ldots$$

qui correspondent aux deux suites décimales illimitées qui le représentent :

$$2{,}1 = 2{,}100\,00 \ \ldots = 2{,}099\,999 \ \ldots$$

b) ***Définition des opérations dans $\mathbb{R}$.***

Étant donnés deux réels x et y définis par des suites décimales illimitées, on peut leur associer des encadrements canoniques :

$$(a_0, b_0), \quad (a_1, b_1), \ \ldots, \ (a_n, b_n) \ \ldots \quad \text{pour } x$$
$$(c_0, d_0), \quad (c_1, d_1), \ \ldots, \ (c_n, d_n) \ \ldots \quad \text{pour } y.$$

On démontre que les intervalles

$$[a_0 + c_0,\ b_0 + d_0],\ [a_1 + c_1,\ b_1 + d_1],\ \ldots,\ [a_n + c_n,\ b_n + d_n],\ \ldots$$

vérifient les conditions du théorème (1). Leur intersection est un singleton de $\mathbb{R}$, soit $\{z\}$. Par définition, z est la *somme* des réels x et y.

Si x et y sont des réels positifs, on démontre que les intervalles

$$[a_0c_0,\ b_0d_0],\ [a_1c_1,\ b_1d_1],\ \ldots,\ [a_nc_n,\ b_nd_n],\ \ldots$$

ont aussi pour intersection un singleton $\{t\}$ de $\mathbb{R}$, et on dit que t est le produit des réels x et y.

On définit ensuite le produit de deux réels de signe quelconque par :

$$(-x)\, y = -(xy) = x\,(-y); \quad (-x)\,(-y) = xy,$$

Des démonstrations (assez laborieuses) permettent de montrer que ces deux opérations définissent sur $\mathbb{R}$ une structure de corps, et que la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ est compatible avec ces opérations.

En particulier, on peut théoriquement démontrer à partir de ce qui précède que tout réel non nul est inversible. Si on prend cette propriété comme axiome, ce n'est pas pour des raisons logiques, mais pour des raisons de commodité (la démonstration est difficile).

L'article précédent donnait des indications adaptées au niveau des élèves; celui qui suit s'adresse au professeur et lui suggère un plan d'étude.

Construction de l'ensemble *R* des nombres réels

C. MORIN,
Montpellier.

Préliminaire.

Il y a de nombreuses façons de construire l'ensemble $\mathbb{R}$. Dans tous les cas, certaines démonstrations sont longues et un peu difficiles. Vous trouverez, dans le plan de travail ci-dessous, une méthode qui peut être enseignée en classe de Quatrième. Évidemment, ce plan s'adresse à des professeurs et il faudrait certainement l'adapter au niveau des élèves. Ceci n'est pas du tout un chapitre du cours de Quatrième. De plus, certains résultats ont dû être admis lorsque les démonstrations étaient un peu trop longues.

Construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ à partir de l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux.

I. Construction.

Nous construirons seulement $\mathbb{R}^+$, ensemble des réels positifs, à partir de $\mathbb{D}^+$, ensemble des décimaux positifs. La construction des réels négatifs ne posant pas de problèmes lorsqu'on a l'ensemble des réels positifs.

Les élèves connaissent l'ensemble des décimaux positifs depuis l'école primaire. Il est nécessaire de le remettre en place et de dresser la liste des propriétés des opérations dans cet ensemble. Dans ce plan, nous supposerons connu l'ensemble $\mathbb{D}^+$.

1. Nécessité d'une extension de $\mathbb{D}$.

a) L'inverse de a dans $\mathbb{D}$ est le nombre x, s'il existe, tel que

$$ax = 1$$

Certains nombres ont un inverse dans $\mathbb{D}$ (ex. : 4, 10, 0,25, etc.), d'autres n'en ont pas.

Montrons, par exemple, que 3 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{D}$;

S'il en avait un, il serait tel que $3x = 1$.

Posons : $x = A, a_1 a_2 \ldots a_n$ a_n étant le dernier chiffre non nul après la virgule. Le dernier chiffre du nombre $3x$ est le dernier chiffre du nombre $3a_n$.

Pour que $3x = 1$, il faut que $3 \times A, a_1 a_2 \ldots a_n = 1, 00 \ldots 0$.

Il faut donc que le dernier chiffre de $3a_n$ soit un 0.

*1. — Vérifiez que $3a_n$ ne se termine jamais par 0, quel que soit a_n. Le nombre 3 n'a donc pas d'inverse dans $\mathbb{D}$.

Il est cependant possible de définir une suite de nombres décimaux :

$$\left.\begin{array}{l} 3 \times 0 = 0 \\ 3 \times 1 = 3 \end{array}\right\} 3 \times 0 < 1 < 3 \times 1$$

$$\left.\begin{array}{l} 3 \times 0{,}1 = 0{,}3 \\ 3 \times 0{,}2 = 0{,}6 \\ 3 \times 0{,}3 = 0{,}9 \\ 3 \times 0{,}4 = 1{,}2 \end{array}\right\} 3 \times 0{,}3 < 1 < 3 \times 0{,}4$$

$$\left.\begin{array}{l} 3 \times 0{,}31 = 0{,}93 \\ 3 \times 0{,}32 = 0{,}96 \\ 3 \times 0{,}33 = 0{,}99 \\ 3 \times 0{,}34 = 1{,}02 \end{array}\right\} 3 \times 0{,}33 < 1 < 3 \times 0{,}34$$

etc.

Nous obtenons ainsi la suite :

$$0 \qquad 0{,}3 \qquad 0{,}33 \qquad 0{,}333 \qquad \text{etc.}$$

Notons qu'une suite de nombres décimaux est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{D}$. Ici :

$$0 \mapsto 0 \qquad 1 \mapsto 0{,}3 \qquad 2 \mapsto 0{,}33 \qquad 3 \mapsto 0{,}333 \qquad \text{etc.}$$

b) Racine carrée.

x est une racine carrée de X dans $\mathbb{D}$ si :

$$x \in \mathbb{D} \qquad x^2 = X.$$

Certains nombres décimaux admettent une racine carrée (ex. : 4, 25, 0,16, etc), d'autres non.

*2. — Montrez (en utilisant un procédé analogue à celui utilisé dans le paragraphe *a)*) que 2 n'a pas de racine carrée dans $\mathbb{D}$.

Il est cependant possible de construire une suite de nombres décimaux :

$$\left.\begin{array}{l} 0 \times 0 = 0 \\ 1 \times 1 = 1 \\ 2 \times 2 = 4 \end{array}\right\} 1 \times 1 < 2 < 2 \times 2$$

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}21 \\ 1{,}2 \times 1{,}2 = 1{,}44 \\ 1{,}3 \times 1{,}3 = 1{,}69 \\ 1{,}4 \times 1{,}4 = 1{,}96 \\ 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25 \end{array}\right\} 1{,}4 \times 1{,}4 < 2 < 1{,}5 \times 1{,}5$$

etc.

Nous obtenons la suite :

1   1,4   etc.

*3. — Avec une machine à calculer, un ordinateur, ou... à la main, cherchez les deux termes suivants.

2. *Interprétation graphique.*

Appelons M le point situé au tiers de la longueur OA_1 ($OA_1 = u$), c'est-à-dire tel que $3OM = OA_1$.

Le point M n'a pas d'abscisse dans D, nous venons de le voir, car son abscisse x, si elle existait devrait vérifier : $3x = 1$.

Mais, nous pouvons encadrer la longueur OM

$$OO < OM < OA_1$$

c'est-à-dire $\quad 0.u < OM < 1.u$

$$OM_1 < OM < OM'_1$$

c'est-à-dire $\quad 0{,}3\ u < OM < 0{,}4\ u$

$$OM_2 < OM < OM'_2$$

c'est-à-dire $\quad 0{,}33.u < OM < 0{,}34\ u$

etc.

Nous obtenons ainsi une suite de segments, M appartenant à chacun d'eux : $[OA_1]$, $[M_1M'_1]$, $[M_2M'_2]$, etc.

Chacun de ces segments est inclus dans tous les précédents et la mesure de leur longueur est arbitrairement petite (ces mesures sont respectivement 1, 0,1, 0,01, etc.).

Une telle suite est appelée « suite de segments emboîtés ».

Cherchons l'intersection de ces segments; nous la noterons :

$$\bigcap_i [M_iM'_i]$$

$$M \in \bigcap_i [M_iM'_i]$$

Supposons qu'un autre point N appartienne aussi à cette intersection, alors on aurait $[MN] \subset \bigcap_i [M_iM'_i]$.

Tous les segments $[M_iM'_i]$ auraient alors une longueur dont la mesure serait supérieure ou égale à celle de $[MN]$.

Ceci est impossible puisque la mesure des segments $[M_iM'_i]$ est arbitrairement petite.

On obtient :

$$\bigcap_i [M_iM'_i] = \{M\}$$

D'une façon générale, soit une suite de segments emboîtés $S_0, S_1, S_2 \ldots S_n$, c'est-à-dire une suite de segments vérifiant :

1) $S_j \subset S_i$ chaque fois que $j \geqslant i$.

2) La mesure de la longueur de S_i est arbitrairement petite.

On montre, comme précédemment, que l'intersection des segments S_i ne peut pas contenir plus d'un point. Cette intersection est donc un singleton ou l'ensemble vide.

Axiome. — L'intersection de tous les segments d'une suite de segments emboîtés est un singleton.

3. But de la construction de $\mathbb{R}$.

Nous voulons donner à tous les points de la droite une abscisse, ce qui n'est pas possible à l'aide de l'ensemble $\mathbb{D}$.

Par exemple, le point M situé au tiers de la longueur OA, devra avoir une abscisse dans notre nouvel ensemble.

Pour construire cet ensemble, nous retiendrons les idées suivantes :

a) Une suite de segments emboîtés $[M_0M'_0]$, $[M_1M'_1]$, $[M_2M'_2]$ ..., $[M_nM'_n]$ ... définit parfaitement un point de la droite : l'élément unique de l'ensemble $\bigcap [M_iM'_i]$.

b) En reprenant l'exemple de la définition du point M situé au tiers de la longueur OA, nous remarquerons que la donnée de la première extrémité du segment $[M_nM'_n]$ définit ce segment. Il suffit par exemple de donner M_3 d'abscisse 0,333 pour savoir que M'_3 sera le point d'abscisse 0,334, etc.

Remarque

Si un point M_n a pour abscisse par exemple 1,2569, le point M'_n aura pour abscisse 1,2570.

La mesure de la longueur $M_nM'_n$ est 10^{-n}.

c) La suite de leurs abscisses :

$$0 \qquad 0{,}3 \qquad 0{,}33 \qquad \ldots$$

devrait donc pouvoir définir un nouveau nombre qui serait l'abscisse de M.

4. Suite décimale illimitée.

a) *Définition*

Nous appellerons « suite décimale illimitée » (application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{D}$) toute suite de nombres décimaux du type :

$$\begin{array}{l} \mathrm{A} \\ \mathrm{A},\ a_1 \\ \mathrm{A},\ a_1a_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{A},\ a_1a_2\ \ldots\ a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

où $\mathrm{A} \in \mathbb{N}$ et où les a_i sont des chiffres.

Chaque nombre est obtenu à partir du précédent en adjoignant un chiffre à sa droite.

Exemples de suites décimales illimitées:

— Premier exemple :

$$\begin{array}{l} 0 \\ 0{,}3 \\ 0{,}33 \\ 0{,}333 \end{array}$$

etc.

$$0{,}333\ \ldots\ 3$$

etc.

— Deuxième exemple :

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1{,}4 \\ 1{,}41 \\ \ldots\ldots \end{array}$$

Nous appellerons $\mathbb{S}$ l'ensemble des suites. Chaque élément de $\mathbb{S}$ est une suite décimale illimitée et nous la représenterons par le symbole :

$$\mathrm{A},\ a_1a_2\ \ldots\ a_n\ \ldots$$

b) *Relation d'équivalence dans* $\mathcal{S}$.

1) Remarque sur deux suites décimales illimitées.

Soit M le milieu de $[A_1A_2]$; M a pour abscisse 1,5.

$M \in [A_1A_2]$ A_1 a pour abscisse 1
$M \in [M_1M]$ M_1 a pour abscisse 1,4
$M \in [M_2M]$ M_2 a pour abscisse 1,49
$M \in [M_3M]$ M_3 a pour abscisse 1,499

etc.

La suite des segments $[A_1A_2]$, $[M_1M]$, $[M_2M]$, $[M_3M]$ etc. est une suite de segments emboîtés. $\bigcap\limits_i [M_iM] = \{M\}$

De même :

$M \in [A_1A_2]$ A_1 a pour abscisse 1
$M \in [MN_1]$ M a pour abscisse 1,5 (N_1 a pour abscisse 1,6)
$M \in [MN_2]$ M a pour abscisse 1,50 (N_2 a pour abscisse 1,51)
$M \in [MN_3]$ M a pour abscisse 1,500 (N_3 a pour abscisse 1,501)

etc.

La suite des segments $[A_1A_2]$, $[MN_1]$, $[MN_2]$ etc. est une suite de segments emboîtés et on a aussi : $\bigcap\limits_i [MN_i] = \{M\}$

Ces deux suites de segments emboîtés définissent donc le même point M de la droite.

Nous serons donc amenés à considérer les deux suites :

1		1
1,4		1,5
1,49		1,50
1,499	et	1,500
.....		.....
1,499...9		1,500...0
.....		.....

comme équivalentes.

2) Définition

s et s' étant des suites décimales, nous dirons que $s\mathcal{R}s'$ pour exprimer que $s = s'$ ou que s et s' sont de la forme :

A, $a_1a_2\ldots a_i\ldots 99\ldots 9$. pour l'une,

A, $a_1a_2\,(a_i + 1)00\ldots 0\ldots$ pour l'autre

ou de la forme A, 9 9...9... pour l'une

A + 1, 00...0...pour l'autre. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathcal{S}$. On le vérifiera facilement.

*3. — Cherchez les classes d'équivalence

5. L'ensemble $\mathcal{S}/\mathcal{R}$ est appelé ensemble $\mathbb{R}^+$ des nombres réels positifs. Nous représenterons encore un réel par le symbole A, $a_1a_2\ldots a_n\ldots$ bien que la suite A; A, a_1; ...; A, $a_1\ldots a_n$; etc. ne soit qu'un représentant d'une classe d'équivalence.

Remarquons toutefois que le cas où une classe a deux représentants est exceptionnel. Généralement, on remplacera les suites du type A, $a_1a_2\ldots a_i\ldots 99\ldots 9.$ par l'autre représentant de la même classe, c'est-à-dire :

$$A,\ a_1a_2\ldots(a_i+1)\ 00\ldots 0\ldots$$

*4. — Montrez que l'ensemble $\mathbb{D}^+$ des décimaux positifs est inclus dans l'ensemble $\mathbb{R}^+$.

6. Valeurs approchées.

Étant donné un réel $x =$ A, $a_1a_2\ldots a_n\ldots$, les nombres décimaux : A; A, a_1; A, a_1a_2; ... ; A, $a_1a_2\ldots a_n$; etc. sont appelés valeurs approchées par défaut du nombre réel x.

A est la valeur approchée à 1 près,

A, a_1 est la valeur approchée à 10^{-1} près.

....

A, $a_1a_2\ldots a_n$ est la valeur approchée à 10^{-n} près.

Pour obtenir les valeurs approchées par excès correspondantes, il suffit d'augmenter d'une unité le dernier chiffre de la valeur approchée par défaut si ce chiffre n'est pas un 9, ou de remplacer ce 9 par un 0 et d'augmenter d'une unité le chiffre précédent.

*5. — Exemple

$x \times 43{,}57913\ldots$

Approximation	Valeurs approchées par défaut	Valeurs approchées par excès
1		
10^{-1}		
10^{-2}		
10^{-3}		
10^{-4}		
10^{-5}		

II. Ordre sur $\mathbb{R}$.

L'ordre sur l'ensemble $\mathbb{R}$ est l'ordre lexicographique.

Soit à comparer les réels s et t:

(On choisit les représentants ne contenant pas que des 9 à partir d'un certain rang).

$$s = \text{A}, \ a_1a_2\ldots a_n\ldots$$
$$t = \text{B}, \ b_1b_2\ldots b_n\ldots$$

Nous dirons que $s \leqslant t$ si l'on se trouve dans l'un des trois cas suivants :

1) $\text{A} < \text{B}$ dans $\mathbb{N}$,

2) $\text{A} = \text{B}$ et $a_i = b_i$ quel que soit $i \leqslant p$ et $a_{p+1} < b_{p+1}$ (dans $\mathbb{N}$),

3) $s = t$ (c'est-à-dire $\text{A} = \text{B}$ et $a_i = b_i$ pour tout i).

*6. — Exercice rédigé.

Montrez que la relation « $\leqslant$ » définie dans $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre.

a) La relation est réflexive : $s \leqslant s$ d'après 3).

b) Montrons que la relation est transitive.

Hypothèse : $s \leqslant t$ et $t \leqslant u$.

$$s = \text{A}, \ a_1a_2\ldots a_n\ldots$$
$$t = \text{B}, \ b_1b_2\ldots b_n\ldots$$
$$u = \text{C}, \ c_1c_2\ldots c_n\ldots$$

si $s = t$, ou $t = u$, on a évidemment $s \leqslant u$.

Examinons les autres cas. On peut avoir :

$\text{A} < \text{B}$ et $\text{B} < \text{C}$

ou $\quad \text{A} = \text{B}$; $a_i = b_i$ jusqu'au rang i; $a_{p+1} < b_{p+1}$

et $\quad \text{B} = \text{C}$; $b_i = c_i$ jusqu'au rang q; $b_{q+1} < c_{q+1}$

ou $\quad \text{A} < \text{B}$

et $\quad \text{B} = \text{C}$; $b_i = c_i$ jusqu'au rang q; $b_{q+1} < c_{q+1}$

ou $\quad \text{A} = \text{B}$; $a_i = b_i$ jusqu'au rang p; $a_{p+1} < b_{q+1}$

et $\quad \text{B} < \text{C}$

Dans le premier cas, on a $\text{A} < \text{C}$, donc $s \leqslant u$.

Dans les deux derniers cas, on a aussi $\text{A} < \text{C}$, donc $s \leqslant u$.

Dans le second cas, on a : $\text{A} = \text{C}$.

$a_i = c_i$ jusqu'au rang p si $p \leqslant q$,

jusqu'au rang q si $p > q$.

Au rang suivant on a :

$a_{q+1} < b_{p+1}$ et $b_{p+1} = c_{p+1}$ $\quad$ donc $a_{p+1} < c_{p+1}$

ou $\quad a_{q+1} = b_{q+1}$ et $b_{q+1} < c_{q+1}$ $\quad$ donc $a_{q+1} < c_{q+1}$

On a donc bien $s \leqslant u$.

c) Montrons que la relation est antisymétrique.

Nous montrerons que si $s \neq t$, on ne peut avoir à la fois $s \leqslant t$ et $t \leqslant s$.

Supposons : $s \neq t$.

Cela signifie : $A \neq B$ ou au moins l'un des chiffres de s est différent du chiffre de même rang de t; appelons a_p et b_p les premiers chiffres vérifiant $a_p \neq b_p$.

Si $A \neq B$, alors $A < B$ ou $B < A$ et pas les deux à la fois. Donc $s \leqslant t$ ou $t \leqslant s$ mais pas les deux à la fois.

Si $A = B$; $a_i = b_i$ jusqu'au rang p; $a_p \neq b_p$.

On a $a_p < b_p$ ou $b_p < a_p$, mais pas les deux à la fois. Donc, on a $s \leqslant t$ ou $t \leqslant s$ mais pas les deux à la fois.

*7. — La relation « $\leqslant$ » dans $\mathbb{R}$ est-elle une relation d'ordre total?

Remarque importante.

Étant donné un réel, il n'a pas de suivant. On ne peut pas parler de deux réels consécutifs. Autrement dit, étant donné deux réels x et y, il existe une infinité de réels z vérifiant : $x \leqslant z \leqslant y$.

*8. — $x = 7{,}45872\ldots\ldots$

$y = 7{,}45863\ldots\ldots$

Comparez x et y, puis trouvez plusieurs réels z compris entre x et y.

III. Structure.

1. Addition. Définition.

Soient deux réels représentés par les suites s et t.

$$s = A,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots$$
$$t = B,\ b_1b_2\ldots b_n\ldots$$

s est la suite de nombres décimaux :

$$A;\quad A,\ a_1;\quad A,\ a_1a_2;\ldots\ A,\ a_1a_2\ldots a_n;\ldots$$

t est la suite :

$$B;\quad B,\ b_1;\quad B,\ b_1b_2;\ldots\ B,\ b_1b_2\ldots b_n;\ldots$$

Formons une suite de nombres décimaux en ajoutant les nombres de même rang des suites s et t:

$$A + B;\ A, a_1 + B, b_1;\ A, a_1a_2 + B, b_1b_2;\ \ldots A, a_1a_2\ldots a_n + B, b_1b_2\ldots b_n;\ldots$$

Cette nouvelle suite de nombres décimaux n'est pas, en général, une suite décimale. Prenons un exemple :

$$s = 4{,}73148\ldots$$
$$t = 3{,}28557\ldots$$

s : 4; 4,7; 4,73; 4,731; 4,7314; 4,73148;...

t : 3; 3,2; 3,28; 3,285; 3,2855; 3,28557;...

nouvelle suite :

7; 7,9; 8,01; 8,016; 8,0169; 8,01705;...

Chaque nombre de cette nouvelle suite n'est pas obtenu à partir du précédent en adjoignant un chiffre à droite.

Nous obtenons une suite u que nous noterons :

$$\begin{array}{l} c_0 \\ c_1,\ c_1^1 \\ c_2,\ c_1^2 c_2^2 \\ c_3,\ c_1^3 c_2^3 c_3^3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_n,\ c_1^n c_2^n c_3^n \ldots c_n^n \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On verra facilement que la suite des nombres naturels $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$ n'est pas décroissante. De plus elle est majorée par $(A + 1) + (B + 1)$. Elle devient donc stationnaire à partir d'un certain rang p. A partir de ce rang, tous les c_i sont égaux à un naturel que nous appellerons c.

(Dans l'exemple donné plus haut, on vérifiera que $c = 8$.)

Dans la suite u, barrons tous les nombres dont la partie entière n'est pas égale à C, c'est-à-dire tous les nombres jusqu'au rang p (non compris).

(Dans l'exemple précédent, on barre 7 et 7,9.)

La suite des premiers chiffres après la virgule : c_1^p, c_1^{p+1}, ... n'est pas décroissante, et majorée par 10. Elle devient donc stationnaire à partir d'un certain rang q.

A partir du rang q, tous les c_1^i sont égaux à un nombre que nous appellerons c_1 (dans l'exemple on vérifiera que $c_1 = 0$). Puis barrons tous les nombres dont le premier chiffre après la virgule n'est pas c_1, c'est-à-dire tous les nombres jusqu'au rang q (non compris). (Dans l'exemple $q = p$ et il n'y a rien à barrer.)

Procédons de la même façon pour obtenir les deuxième, troisième, ..., $n^{\text{ème}}$ chiffres après la virgule.

Nous obtenons ainsi une suite décimale.

$$\begin{array}{l} c \\ c,\ c_1 \\ c,\ c_1 c_2 \\ \ldots\ldots \\ c,\ c_1 c_2 \ldots c_n \\ \ldots\ldots \end{array}$$

Nous appellerons familièrement cette méthode : « méthode de la pêche aux décimales ».

Dans l'exemple précédent, la suite obtenue est :

8
8,0
8,01
8,017
8,0170
......

Cette suite est, par définition, la somme des suites s et t.

Remarque :

Lorsqu'on a fait la somme des valeurs approchées à 10^{-n} près, on est sûr des chiffres jusqu'au rang $n - 1$ à condition que le chiffre de rang n ne soit pas un 9. En effet, dans une addition de deux nombres, la retenue ne peut être supérieure à 1; si le dernier chiffre est inférieur à 9, il ne peut donc fournir une retenue affectant le chiffre de rang $n - 1$.

Dans l'exemple précédent, quand on a trouvé 8,016, on est sûr du 1 (et des chiffres précédents). Par contre, quand on a trouvé 8,0169, on ne peut être sûr du 6.

L'exemple montre d'ailleurs que l'on obtient 7 au rang suivant.

Compatibilité avec la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$.

Étant donné deux suites décimales s et t, nous venons de définir la suite $s + t$. Supposons que s' soit une suite équivalente à s : $s \mathfrak{R} s'$.

On pourrait démontrer qu'alors $(s + t) \mathfrak{R} (s' + t)$.

Si $s = s'$, ceci est évident. Nous traiterons l'autre cas sur un exemple.

*9.

$$s = 14{,}400\ldots0\ldots$$
$$t = 5{,}8282\ldots82\ldots$$

Calculez $s + t$

$$s' = 14{,}399\ldots9\ldots$$

Calculez $s' + t$

Constatez que $(s + t) \mathfrak{R} (s' + t)$.

Nous pouvons définir maintenant la somme de deux réels x et y. s et t étant des représentants de x et y, la somme $x + y$ est le nombre réel dont un représentant est $s + t$.

Remarquons, une fois de plus, que le cas où il y a plus d'un représentant pour un nombre réel est très particulier.

2. *Addition. Propriétés.*

a) Il est évident que l'addition ainsi définie est commutative et que 0 est l'élément neutre. Nous admettrons que l'addition est associative.

b) Régularité :

Tout nombre réel est régulier pour l'addition, c'est-à-dire :

$$a + x = b + x \Rightarrow a = b$$

c) Ordre et addition : on pourrait montrer que

$$a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$$

*10. — En déduire que :

$$(a \leqslant b \wedge c \leqslant d) \Rightarrow (a + c \leqslant b + d)$$

Nous pouvons maintenant construire l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, dans lequel tout nombre admet un opposé. L'ensemble $\mathbb{R}$ est un groupe commutatif.

3. *Multiplication. Définition.*

On utilise un procédé analogue pour définir le produit de deux suites s et t.

s est la suite

$$\mathrm{A}; \quad \mathrm{A}, a_1 \quad ;\ldots; \quad \mathrm{A}, a_1a_2\ldots a_n;\ldots$$

t est la suite

$$\mathrm{B}; \quad \mathrm{B}, b_1 \quad ;\ldots; \quad \mathrm{B}, b_1b_2\ldots b_n;\ldots$$

On fait les produits des nombres décimaux de même rang et on obtient une nouvelle suite v :

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B}; \quad \mathrm{A}, a_1 \times \mathrm{B}, b_1 \quad ;\ldots \mathrm{A}, a_1a_2\ldots a_n \times \mathrm{B}, b_1b_2\ldots b_n;\ldots$$

Cette suite n'est pas, en général, une suite décimale.

*11. — Calculez les quatre premiers nombres de cette suite en prenant pour s et t les suites données lors de la définition de l'addition.

On utilise alors la méthode de « la pêche aux décimales » et on obtient une suite décimale.

$$\mathrm{D}, d_1d_2\ldots d_n\ldots$$

qui est, par définition, le produit des suites s et t.

La remarque qui a été faite pour l'addition n'est pas valable pour la multiplication, évidemment, puisque les retenues peuvent être de 8 et donc affecter plusieurs rangs.

Pour les élèves de Quatrième, on aura peut-être intérêt à calculer les produits des valeurs approchées par défaut, le produit des valeurs approchées par excès, puis à garder les chiffres communs.

En prenant toujours les mêmes suites :

$$4{,}73 \times 3{,}28 = 15{,}5144$$
$$4{,}74 \times 3{,}29 = 15{,}5946$$

On est sûr seulement de 15,5.

Compatibilité avec la relation d'équivalence : il faudrait montrer maintenant que :

$$s\mathcal{R}s' \Rightarrow (s \times t)\,\mathcal{R}\,(s' \times t)$$

Nous pouvons alors définir le produit de deux nombres réels x et y. s et t étant des représentants des nombres x et y, le produit xy est, par définition, le nombre réel dont un représentant est st.

4. *Multiplication. Propriétés.*

a) La multiplication ainsi définie est évidemment commutative et 1 est l'élément neutre. Nous admettrons qu'elle est associative et distributive par rapport à l'addition.

b) *Inverse d'un nombre réel.* Nous admettrons l'existence d'un inverse pour tout élément de $\mathbf{R}^*$.

Méthode de la détermination de l'inverse du nombre réel x.

On cherche le quotient à une unité près par défaut de 1 par la valeur approchée à une unité près par excès de x. On obtient un nombre X_0 ($X_0 \in \mathbb{N}$).

On cherche le quotient à 10^{-1} près par défaut de 1 par la valeur approchée à 10^{-1} près par excès de x. On obtient un nombre X_1 (X_1 est un nombre décimal ayant un chiffre après la virgule).

On cherche le quotient à 10^{-2} près par défaut de 1 par la valeur approchée à 10^{-2} près par excès de x. On obtient un nombre décimal X_2 ayant deux chiffres après la virgule. Et ainsi de suite...

On a alors une suite de nombres décimaux X_0, X_1, X_2, ..., qui n'est pas, en général, une suite décimale. On démontre que cette suite est croissante (au sens large). On utilise la méthode de la « pêche aux décimales » et on obtient un nombre réel y qui est l'inverse de x, c'est-à-dire qui vérifie $xy = 1$ (c'est cela qui est un peu difficile à démontrer).

Exemple. — Cherchez l'inverse de $\sqrt{2}$. $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$

$$1 = 2 \times 0 + 1$$
$$1 = 1{,}5 \times 0{,}6 + r_1$$
$$1 = 1{,}42 \times 0{,}70 + r_2$$
$$1 = 1{,}415 \times 0{,}706 + r_3$$
$$1 = 1{,}4143 \times 0{,}7070 + r_4$$
$$1 = 1{,}41422 \times 0{,}70710 + r_5$$
$$1 = 1{,}414214 \times 0{,}707106 + r_6$$

etc.

On obtient la suite :

$$0;\ 0{,}6;\ 0{,}70;\ 0{,}706;\ 0{,}7070;\ 0{,}70710;\ 0{,}707106;\ \text{etc.}$$

Ce n'est pas une suite décimale. L'inverse de $\sqrt{2}$ est :

$$0{,}70710...$$

c) Régularité.

Tout élément de $\mathbb{R}^*$ est régulier pour la multiplication, c'est-à-dire :

$$(ax = bx) \wedge (x \neq 0) \Rightarrow a = b.$$

d) Ordre et multiplication.

$$a \leqslant b \Rightarrow ka \leqslant kb \quad \text{si} \quad k \in \mathbb{R}^+$$
$$a \leqslant b \Rightarrow ka \geqslant kb \quad \text{si} \quad k \in \mathbb{R}^-$$

IV. Liste des propriétés de $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ obtenu a les propriétés suivantes (que l'on pourrait prendre comme axiomes et qui servirait alors à définir $\mathbb{R}$) :

1) $\mathbb{R}$ est un corps commutatif ordonné.

Cela signifie que $\mathbb{R}$ est un corps commutatif et qu'il existe dans $\mathbb{R}$ une relation d'ordre compatible avec les opérations addition et multiplication. (Ce sont les propriétés *c*) pour l'addition et *d*) pour la multiplication.)

2) $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$. Et les opérations et l'ordre définis sur $\mathbb{R}$ « prolongent » les opérations et l'ordre définis sur $\mathbb{D}$.

3) $\mathbb{R}$ est un espace métrique complet.

$\mathbb{R}$ est un espace métrique, ce qui signifie qu'on peut y définir une distance. La distance de deux réels x et y est la valeur absolue de la différence $x - y$. En ceci, $\mathbb{R}$ ne diffère pas de l'ensemble $\mathbb{D}$ sur lequel on peut aussi définir une distance.

Une suite de segments (intervalles fermés) $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, ... $[x_n, y_n]$, ... est appelé « suite de segments emboîtés » si :

a) $[x_i, y_i] \subset [x_j, y_j]$ dès que $i \geqslant j$.

b) La mesure de ces segments est arbitrairement petite (la mesure de $[x_i, y_i]$ est la distance des nombres x_i et y_i).

Soit $[x_i, y_i]$ une suite de segments emboîtés. Dire que $\mathbb{R}$ est complet signifie que $\bigcap_i [x_i, y_i]$ n'est pas vide (on en déduit que cette intersection est un singleton).

L'ensemble $\mathbb{D}$ n'est pas un espace métrique complet, nous l'avons vu au début de cette étude.

Les deux articles suivants sont plus ambitieux et s'adressent au professeur dans le cadre de la formation permanente ; ils permettront de dominer les programmes de Quatrième. Le premier utilise un langage et des connaissances acquis en Faculté alors que le second est tiré des documents de travail établis par l'I.R.E.M. de Strasbourg pour le recyclage des professeurs de premier cycle.

Les nombres réels dans l'enseignement du second degré

M. Roumieu,
I.R.E.M. de Montpellier.

Une définition solide des nombres réels ne peut être donnée qu'à un niveau avancé des études mathématiques et sans doute pas dans l'enseignement du second degré. Cependant, c'est une notion qui s'introduit naturellement, de façon intuitive — ou naïve — très tôt. Comment parler de la longueur du cercle ou de la diagonale du carré, sans faire appel, au moins implicitement, à la notion de nombre réel?

Les réels sont donc des êtres mathématiques dont l'élève aura pendant longtemps une connaissance plus ou moins vague et très incertaine. Pendant cette longue période, pratiquement toutes les études secondaires, le professeur devra consolider progressivement cette connaissance afin d'amener les élèves à utiliser correctement l'ensemble $\mathbb{R}$.

Les réels ne figurent pas dans les programmes des classes de Sixième et de Cinquième. Cependant, il faudra bien s'en servir, au moins implicitement, ne serait-ce que pour parler de la mesure des longueurs qui, elle, figure dans les programmes.

La longueur d'un objet physique n'est jamais définie *exactement*. Tout ce qu'on peut faire, c'est *encadrer* la mesure de cette longueur par des valeurs approchées par défaut et par excès, qui seront des nombres décimaux.

Le cercle ayant pour diamètre l'unité de longueur est un objet mathématique abstrait et sa longueur est définie exactement. Les élèves en ont une connaissance toute intuitive et la mesure de cette longueur est désignée par π. Il convient de guider et de préciser l'intuition en insistant sur le fait que les nombres décimaux ou fractionnaires ne peuvent fournir que des valeurs approchées de π.

Enfin par des exercices nombreux et variés, on habituera les élèves à choisir judicieusement l'ordre d'approximation (nombre de chiffres significatifs suivant la nature du problème étudié).

En Quatrième, les programmes prévoient une approche intuitive des nombres réels. Dans les classes précédentes, on a utilisé *quelques nombres réels* non décimaux, tels que $\frac{1}{3}$, $\frac{22}{7}$, π, $\sqrt{2}$, ..., etc., dont les élèves ont une connaissance intuitive. Il s'agit maintenant de les amener à une connaissance encore intuitive, mais plus large et plus solide, de l'ensemble $\mathbb{R}$.

Il faut d'abord que les élèves connaissent très bien les propriétés des nombres décimaux, en particulier,

— le fait que la relation d'ordre est lexicographique,

— la continuité de l'addition et de la multiplication, mise en évidence par des calculs de valeurs approchées.

On mettra ensuite en lumière, sur des exemples, la notion de *suite illimitée* des valeurs approchées, par défaut et par excès, de certains nombres réels, en particulier :

— les rationnels pour lesquels la suite des décimales est périodique,

— les nombres tels que $\sqrt{2}$ pour lesquels existe un algorithme connu des élèves, permettant le calcul des décimales successives.

Il est alors possible de présenter à des élèves de Quatrième *une* construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ fondée sur des idées très simples et mathématiquement tout à fait solide. Je reviendrai dans la deuxième partie de cet exposé sur cette construction.

En Seconde, le programme prévoit un « inventaire » des propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$. Il s'agit d'une récapitulation et d'une mise au point, par des énoncés généraux et précis, des propriétés antérieurement mises en évidence, dont les élèves ont une connaissance intuitive plus ou moins sûre. On peut considérer cet inventaire comme une définition axiomatique de $\mathbb{R}$, les axiomes étant largement surabondants, et les questions d'existence et d'unicité restant dans le vague.

Une construction de l'ensemble $\mathbb{R}$.

Rappelons d'abord ce qu'est un groupe abélien totalement ordonné et les propriétés de ces objets dont nous aurons besoin. Dans ce qui suit, G désignera un groupe abélien totalement ordonné.

1. — G est muni d'une addition, notée $+$, qui en fait un groupe abélien.

2. — G est muni d'une relation d'ordre, notée $\leqslant$, qui en fait un ensemble totalement ordonné.

3. — Entre l'addition et la relation d'ordre, existe une relation de compatibilité.

$$(\forall x \in G)\ (\forall y \in G)\ (\forall a \in G)\ x \leqslant y \Leftrightarrow x + a \leqslant y + a$$

Topologie de G.

Soient $x \in G$; $y \in G$. Conformément à l'usage, on définit les *intervalles ouverts* par :

$$]x, \; y[= \{u \in G ; \; x < u < y\}$$
$$]\leftarrow, \; x[= \{u \in G ; \; u < x\}$$
$$]x, \; \rightarrow[= \{u \in G ; \; u > x\}$$

On vérifie facilement que l'intersection de deux intervalles ouverts est, soit vide, soit un intervalle ouvert. Il en résulte qu'on définit une topologie sur G en prenant comme base d'ouverts la famille des intervalles ouverts.

Cette topologie est séparée. En effet, soient $a \in G$; $b \in G$; $a \neq b$.

Si $]a, b[$ est non vide, soit $c \in]a, b[$; les intervalles $]\leftarrow, c[$, $]c, \rightarrow[$ sont des ouverts disjoints qui contiennent respectivement a et b.

Si $]a, b[$ est vide, les intervalles $]\leftarrow, b[$, $]a, \rightarrow[$ sont encore des ouverts disjoints qui contiennent respectivement a, b.

Le groupe G est non discret, si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]0, \varepsilon[$ est non vide. En effet, si G est discret, $\{0\}$ est un ouvert ; donc il existe un intervalle $]\alpha, \beta[$ tel que $\{0\} =]\alpha, \beta[$. Alors $]0, \beta[$ est vide. Réciproquement, si $]0, \varepsilon[$ est vide, $]-\varepsilon, 0[$ aussi et par conséquent on a $\{0\} =]-\varepsilon, +\varepsilon[$.

Exemple.

L'ensemble des nombres décimaux que nous désignerons par $\mathbb{D}$, muni de l'addition et de la structure d'ordre usuelle, est un groupe abélien totalement ordonné non duscret.

Théorème fondamental.

Il existe un objet mathématique et un seul, nommé $\mathbb{R}$, possédant les propriétés suivantes :

— *$\mathbb{R}$ est un groupe abélien totalement ordonné, non discret,*

— *dans $\mathbb{R}$, toute suite croissante et majorée possède une borne supérieure.*

La démonstration comporte naturellement deux parties : existence et unicité. Je m'intéresse surtout à la démonstration de l'existence qui consiste en une construction effective de $\mathbb{R}$. Je présenterai cette construction en essayant de montrer qu'elle est parfaitement adaptable à l'enseignement au niveau de la classe de Quatrième.

Une suite décimale x est définie par une suite $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, telle que $x_0 \in \mathbb{Z}$; $x_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. On définit sur l'ensemble des suites décimales une relation d'ordre qui n'est autre que l'ordre lexicographique :

$$x = x_0, x_1, \ldots, x_n \qquad y = y_0, y_1, \ldots, y_n$$

$$x < y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) \; x_0 = y_0, \quad x_1 = y_1, \ldots, \quad x_{k-1} = y_{k-1} ; \quad x_k < y_k.$$

On vérifie aussitôt que l'ensemble des suites décimales est ainsi totalement ordonné.

Soient x, y, deux suites décimales, $x < y$. Cherchons les suites décimales u telles que $x < u < y$. On est conduit à distinguer le cas particulier suivant :

$$x_0 = y_0\,; \quad x_1 = y_1 \ldots \quad x_{k-1} = y_{k-1}; \quad x_k = y_{k-1}$$
$$x_n = 9 \text{ et } y_n = 0 \text{ pour } n > k.$$

Il n'existe alors aucune suite décimale u telle que $x < u < y$. En dehors de ce cas particulier, il existe une infinité de suites décimales u telles que

$$x < u < y.$$

On peut définir formellement $\mathbb{R}$ comme ensemble-quotient de l'ensemble des suites décimales par une relation d'équivalence. Plus concrètement, un nombre réel est défini par une suite décimale et on convient que deux suites décimales définissent le même nombre réel lorsqu'on est dans le cas *.

On pourrait aussi définir un nombre réel comme suite décimale contenant une infinité de chiffres autres que 9. Mais on se heurte alors à une difficulté pour définir l'addition; en effet, on a :

$$0{,}666\ldots + 0{,}333\ldots = 0{,}999\ldots$$

Soient x une suite décimale définissant un nombre réel X; y, y' deux suites décimales définissant le même nombre Y. Comme $]y, y'[$ est vide, on a simultanément $x < y$ et $x' < y$ ou bien $y < y$ et $y' < x$. Il en résulte que la relation d'ordre définie sur l'ensemble des suites décimales « passe au quotient » et définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ est alors totalement ordonné.

On définit maintenant la topologie de $\mathbb{R}$; c'est la topologie engendrée par les intervalles ouverts $]X, Y[$.

Démontrons maintenant que l'axiome de la borne supérieure est bien vérifié :

Soit (X^n) une suite de nombres réels croissante et majorée. Représentons X^n par une suite décimale

$$x^n = x_0^n,\ x_1^n,\ \ldots x_n^n \ldots$$

en convenant que si X^n et X^{n+1} sont égaux, ils seront représentés par la même suite décimale ($x^n = x^{n+1}$). On a alors $x^{n+1} \geqslant x^n$ pour tout n.

La suite d'entiers (x_0^n) est croissante et majorée. Il existe donc

$$x_0 \in \mathbb{Z} \text{ et } \mathbb{N}_0 \in \mathrm{N} \text{ tels que } x_0^n = x_0 \text{ pour } n \geqslant \mathrm{N}_0.$$

Considérons maintenant la suite $(x_1^n)_n \geqslant \mathrm{N}_0$. Il est facile de voir qu'elle est croissante et majorée par 9. Donc il existe $x_1 \in \{0,1, \ldots 9\}$ et $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$, tels que $x_1^n = x_1$ pour $n \geqslant \mathrm{N}_1$.

La construction se poursuit de manière évidente et on obtient une suite décimale $(x, x_1, \ldots x_n, \ldots)$ définissant un nombre réel X. possédant manifestement les propriétés suivantes :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n < X$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe n tel que $X_n < X < X_n + \frac{1}{10^k}$. Ce qui permet de conclure.

Les nombres décimaux s'identifient naturellement à des nombres réels particuliers, ceux précisément qui sont représentés par deux suites décimales. L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est partout dense dans $\mathbb{R}$.

L'addition est définie de façon naturelle sur $\mathbb{D}$. C'est une application continue de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$. D étant partout dense dans $\mathbb{R}$, on la prolonge par continuité en une application continue de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On doit encore vérifier, ce qui est facile :

— que $\mathbb{R}$ est un groupe abélien,
— que l'addition et la structure d'ordre sont compatibles.

La démonstration de l'existence de $\mathbb{R}$ est alors achevée. Naturellement, il convient de définir encore la multiplication sur $\mathbb{R}$ et de démontrer que $\mathbb{R}$ est un corps commutatif. La multiplication est définie naturellement sur $\mathbb{D}$ et on la prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$. Ses propriétés sont établies sans difficulté. L'algorithme de la division montre aisément que l'équation $ax = b$, $a \neq 0$, a toujours une solution dans $\mathbb{R}$.

Naturellement avec des élèves de Quatrième, il ne saurait être question d'utiliser les notions de limite et de continuité auxquelles j'ai fait appel dans cet exposé. Mais on peut utiliser largement la notion *d'approximation par encadrement* qui permettra de mettre en lumière, sur des exemples, toutes les idées fondamentales.

Pour terminer, je donnerai, très succinctement, une idée de la démonstration d'unicité. A la base de cette démonstration se trouve la propriété suivante :

Soit G un groupe possédant les propriétés figurant dans l'énoncé du théorème fondamental. La division par 2 est possible dans G, c'est-à-dire que pour tout $a \in G$, il existe $x \in G$ tel que $x + x = a$.

Grâce à cette propriété, pour $a \in G$ fixé, on peut définir le sous-groupe D des éléments de G de la forme $\frac{p}{2^k} a$ $(p \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N})$. D est partout dense dans G.

Soit alors G′ un autre groupe possédant aussi les propriétés figurant dans l'énoncé du théorème fondamental. Soit $a' \in G'$. L'application

$$\frac{p}{2^k} a \to \frac{p}{2^k} a'$$

est un isomorphisme de D dans G′, cette application se prolonge par continuité en un isomorphisme de G sur G′.

Construction des réels à partir des décimaux

Bernard KITTEL,
I.R.E.M. Strasbourg.

Les programmes traditionnels du second cycle comportaient l'étude de $\mathbb{Q}$ sous la forme des fractions, puis à partir de $\mathbb{Q}$, la « construction » de $\mathbb{R}$.

Les nouveaux programmes mettent l'accent sur l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$; l'utilisation aisée de $\mathbb{D}$ pour les calculs approchés permet d'introduire les suites décimales et, à partir de là, l'ensemble $\mathbb{R}$ avec sa structure de corps ordonné.

On se propose d'indiquer les étapes successives d'une construction possible du corps ordonné $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{D}$.

I. — Rappels sur l'ensemble des décimaux $\mathbb{D}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on désigne par $\mathbb{D}_n$ l'ensemble des décimaux ayant « n chiffres après la virgule ». C'est l'ensemble des nombres de la forme $a.10^{-n}$ où $a \in \mathbb{Z}$; si $a \geqslant 0$ on dit que $a.10^{-n} \in \mathbb{D}_n^+$, si $a \leqslant 0$, $a.10^{-n} \in \mathbb{D}_n^-$.

On pose $\mathbb{D}_0 = \mathbb{Z}$ et $\mathbb{D} = \bigcup\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{D}_n$.

Clairement $\mathbb{D}_{n+1} \supset \mathbb{D}_n$.

Enfin $\mathbb{D}$ est muni d'une structure d'anneau ordonné qui prolonge celle de $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{D}^+$ et $\mathbb{D}^-$ les décimaux positifs et négatifs.

Cet ensemble $\mathbb{D}$ ne contient pas tous les « nombres »; il est facile de voir qu'il ne contient pas le quotient de 22 par 7, ni « le nombre » d tel que $d^2 = 2$. Ceci motive la construction qui va suivre.

II. — Les développements décimaux.

1. Notions générales sur les suites de décimaux.

On appelle *suite de décimaux* toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{D}$. On note $u = (u_n)\ n \in \mathbb{N}$ ou plus simplement $u = (u_k)$ une telle suite.

On pose les définitions suivantes :

La suite $u = (u_n)$ est croissante lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \geqslant u_n$$

La suite $u = (u_n)$ est *décroissante* lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \leqslant u_n$$

La suite $u = (u_n)$ *converge vers le décimal l* lorsque :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \ \exists\, p(m) \in \mathbb{N}, \ \forall n > p(m) \ |u_n - l| < 10^{-m}$$

Les suites $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ sont *équivalentes* lorsque la suite $d = (u_n - v_n)$ converge vers 0. On écrit $u \,\rho\, v$ pour exprimer que u et v sont équivalentes.

2. Développement décimal.

On appelle *développement décimal positif* une suite de décimaux $d = (d_n)$ telle que :

i) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad d_n \in D_n^+$

ii) le quotient de $10^n d_n$ par 10 est $10^{n-1} d_{n-1}$.

On appelle *développement décimal négatif* une suite de décimaux $d = (d_n)$ telle que la suite $-d = (-d_n)$ soit un développement décimal positif.

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des développements décimaux.

Un développement décimal $d = (d_n)$ pour lequel il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant m \; d_n = d_m$ s'appelle le *développement décimal du décimal* d_m.

Ainsi le développement décimal de 1,25 est

$$d_0 = 1 \qquad d_1 = 1{,}2 \qquad n \geqslant 2 \qquad d_n = 1{,}25$$

Proposition 2-1.

Si d est un *développement décimal positif, alors* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$, $d_{n+k} - d_n < 10^{-n}$.

En effet $d_{n+k} - d_n \leqslant 9(10^{-(n+1)} + 10^{-(n+2)} + \ldots + 10^{-(n+k)}) < 10^{-n}$

Proposition 2-2.

Si d et d' sont deux développements décimaux positifs d et d' ne sont pas équivalents s'il existe un rang N tel que $d_N - d'_N > 10^{-N}$.

En effet il suffit de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_{N+k} - d'_{N+k} > 19^{-N}$, la suite $(d_n - d'_n)$ $n \in \mathbb{N}$ ne pouvant alors converger vers 0.

Or $d_{N+k} - d'_{N+k} = (d_{N+k} - d_N) + (d_N - d'_N) + (d'_N - d_{N+k})$.
Comme d est une suite croissante, $d_{N+k} - d_N \geqslant 0$ et

$$d_{N+k} - d'_{N+k} \geqslant (d_N - d'_N) - (d'_{N+k} - d'_N).$$

Par hypothèse $d_N - d'_N < 10^{-N}$ donc $d_N - d'_N \geqslant 2.10^{-N}$.
D'après la proposition 2 — 1 $d'_{N+k} - d'_N < 10^{-N}$.
Donc $d_{N+k} - d'_{N+k} > 2.10^{-N} - 10^{-N} = 10^{-N}$.

III. — L'ensemble ordonné $\mathbb{R}$.

1. Définition de $\mathbb{R}$.

Par définition $\mathbb{R} = \mathbb{D}/\rho$.

Proposition 3-1:

La classe d'équivalence d'un élément $d \in \mathbb{D}$ contient un ou deux éléments; elle en contient deux, si et seulement si, elle contient le développement décimal d'un décimal.

Preuve.

a) On montre d'abord que si $d \rho d'$ alors d et d' sont tous deux positifs ou tous deux négatifs.

Supposons $d \rho d'$ avec d positif et d' négatif; on écarte le cas où $d = d'$ (i.e. le cas où d et d' désignent le même développement de 0); il existe alors un rang r tel que $d'r < dr$; puisque d (resp. d') est une suite croissante (resp. décroissante) on a, pour $n \geqslant r$: $d'n \leqslant d'r < dr \leqslant dn$ donc $n \geqslant 1 \Rightarrow dn - d'n \geqslant dr - d'r > 0$.

Il en résulte que la suite $(d_n - d'_n)\ n \in \mathbb{N}$ ne peut converger vers 0.

b) Soit alors d et d' deux développements décimaux positifs équivalents et distincts. D'après la proposition 2—2 il existe un rang r tel que pour $n < r$ $d_n = d'_n$ et $|d_r - d'_r| = 10^{-r}$. Alors pour tout entier $k \geqslant 1$ on a

$$d_{r+k} = d_r + a_k 10^{-(r+k)} \text{ où } 0 \leqslant a_k \leqslant 10^k - 1 \text{ et}$$
$$d'_{r+k} = d'_r + a'_k 10^{-(r+k)} \text{ où } 0 \leqslant a'_k \leqslant 10^k - 1.$$

Donc $d_{r+k} - d'_{r+k} = d_r - d'_r + (a_k - a'_k)\ 10^{-(1+k)}$.
Supposons $d_r - d'_r = 10^{-r}$. Alors la proposition 2—2 donne :

$$d_{r+k} - d'_{r+k} \leqslant 10^{-(r-k)}$$

et finalement :

$$10^{-r} + (a_k - a'_k)\ 10^{-(r+k)} \leqslant 10^{-(1+k)}$$
$$a'_k - a_k \geqslant 10^{k-1}$$

Vu les conditions sur les entiers a'_k et a_k, ceci exige $a'_k = 10^{k-1}$ et $a_k = 0$.

Autrement dit, les « décimales de d, de rang supérieur à r » sont égales à 0 et celles de d' sont égales à 9. Ainsi la classe d'un développement décimal ne contient deux éléments que si l'un est le développement décimal d'un décimal.

Exemple : La classe de d défini par $d_0 = 1$, $d_1 = 1{,}2$ et pour $n \geqslant 2$, $d_n = 1{,}25$ contient d et d' défini par $d'_0 = 1$, $d'_1 = 1{,}2$, $d'_2 = 1{,}24$ et pour $n \geqslant 3$ $d'_n = d'_{n-1} + 9.10^{-n}$.

On appelle ***représentant canonique d'un réel*** r l'unique représentant de r lorsque r est un singleton, et le développement décimal du décimal lorsque r est une classe contenant deux éléments.

2. Ordre sur $\mathbb{R}$.

Si et x et y sont des réels de représentants canoniques (x_n) et (y_n) on dit que x est inférieur à y ($x \leqslant y$) lorsque pour tout n de $\mathbb{N}$, $x_n \leqslant y_n$.

On définit alors les divers *intervalles* de $\mathbb{R}$.

Proposition 3-2.

L'ordre ainsi défini sur $\mathbb{R}$ prolonge celui de $\mathbb{D}$.

Preuve

Soit x et y deux réels décimaux de représentants canoniques (x_n) et (y_n). Il existe alors un plus petit rang r tel que pour $n \geqslant r$, $x_n = x_r$ et $y_n = y_r$ et $x = x_r$, $y = y_r$.

Si dans $\mathbb{D}$, $x < y$, on a $x_r < y_r$, on a aussi pour tout $n > r$ $x_n < y_n$ et pour $n < r$ $x_n \leqslant y_n$.

Inversement, si $x < y$ dans $\mathbb{R}$, il est clair que $x_r < y_r$ donc que $x < y$ dans $\mathbb{D}$.

Proposition 3-3.

$\mathbb{D}$ est dense pour l'ordre dans $\mathbb{R}$.

Cela signifie que pour tout couple (x, y) de réels tels que $x < y$ il existe un décimal d tel que $x < d < y$.

Supposons d'abord x et y positifs.

Si (x_n) et (y_n) sont les représentants canoniques respectifs de x et y, alors il existe un rang p tel que $x_p < y_p$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $n < p \Rightarrow x_n = y_n$.

D'autre part $\forall m, m > p \Rightarrow x_m < y_m$ et comme (x_n) n'a pas la période 9 il existe q supérieur à p tel que $x_q + 10^{-q} < x_p$, de sorte que le développement (z_n) défini par

$$z_n = \begin{cases} x_n \text{ si } n < q \\ x_q + 10^{-q} \text{ si } n > q \end{cases}$$

définit un décimal compris strictement entre x et y.

Même résultat si x et y sont négatifs.

Si x et y sont de signe différent, 0 est manifestement entre les deux.

IV. — La structure de corps sur $\mathbb{R}$.

Si x et y sont deux réels de représentants canoniques (x_n) et (y_n), les suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n\, y_n)$ ne sont malheureusement plus nécessairement des développements décimaux : par exemple si $x = y = 2/3$, $(x_0 + y_0) = 0$ et $(x_1 + y_1) = 1{,}2$; d'autre part $(x_1\, y_1) = 0{,}36$ qui n'est même pas dans $\mathbb{D}_1$.

On est alors amené à introduire les notions de *suite de décimaux convergentes dans* $\mathbb{R}$ et de *suite de Cauchy de décimaux.*

1. Suite de décimaux convergente dans $\mathbb{R}$.

On dit qu'une suite $u = (u_n)$ de décimaux converge vers le réel r, de représentant canonique $d = (d_n)$ lorsque les suites u et d sont équivalentes.

Il est clair que le développement décimal représentant canonique d'un réel converge vers ce réel. De même la proposition suivante est évidente.

Proposition 4-1.

Deux suites de décimaux qui convergent vers la même limite sont équivalentes.

On pose alors les définitions suivantes :

Si x et y sont deux réels de représentants canoniques (x_n) et (y_n).

Le réel $x + y$, appelé somme de x et de y est la limite de la suite $(x_n + y_n)$.

Le réel xy, appelé produit de x et de y est la limite de la suite $(x_n y_n)$.

Pour justifier ces définitions il faut évidemment montrer que les suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$ ont des limites.

On est ainsi amené à introduire les :

2. Suites de Cauchy de décimaux.

Une suite de décimaux $u = (u_n)$ est dite de Cauchy lorsque pour tout entier positif m il existe un rang $p(m)$ tel que $|u_{n'} - u_n| < 10^{-m}$ dès que $n' > n > p(m)$.

Proposition 4-2.

Tout développement décimal est une suite de Cauchy.

Il suffit de démontrer ceci pour un développement décimal positif d. Si m est donné on cherche $p(m)$ tel que pour $n' > n > p(m)$ $|d_{n'} - d_n| < 10^{-m}$. Comme (dn) est croissante, on a $|d_{n'} - d_n| = d_{n'} - d_n \leqslant d_{n'} - d_{p(m)}$. D'après la proposition 2-1, $d_{n'} - d_{p(m)} < 10^{-p(m)}$. On voit qu'il suffit de prendre $p(m) = m$.

Proposition 4-3.

Si (x_n) et (y_n) sont deux suites de Cauchy de décimaux, alors les suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$ en sont aussi.

Preuve :

On se donne un entier m positif et on cherche $p(m)$ tel que

$$n' > n > p(m) \Rightarrow |x_{n'} + y_{n'} - x_n - y_n| < 10^{-m}.$$

Or $|x_{n'} + y_{n'} - x_n - y_n| \leqslant |x_{n'} - x_n| + |y_{n'} - y_n|$

Comme $|x_{n'} - x_n| < 10^{-(m+1)}$ dès que $n' \vee n > p_1\,(m+1)$ et que $|y_{n'} - y_n| < 10^{(-m+1)}$ dès que $n' > n > p_2\,(m+1)$ (puisque (x_n) et (y_n) sont de Cauchy), on voit qu'il suffit de prendre $p(m) = \sup\ (p_1 m + 1,\ p_2 m + 2)$ pour réaliser la condition

$$|x_{n'} + y_{n'} - x_n - y_n| < 2.10^{(-m+1)} < 10^{-m}.$$

On fait un raisonnement analogue pour le produit en partant de l'inégalité :

$$|x_{n'} y_{n'} - x_n y_n| \leqslant |(x_{n'} - x_n)\, y_{n'}| + |(y_{n'} - y_n)\, x_n|$$

et en utilisant le fait qu'une suite de Cauchy est bornée.

Théorème fondamental.

Toute suite de Cauchy de décimaux converge dans $\mathbb{R}$.

Preuve :

Soit (α_i) une suite de Cauchy de décimaux.

On a : $\exists\, p_0 \in \mathbb{N},\ \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ m \geqslant p_0$ et $n \geqslant p_0 \Rightarrow |\alpha_n - \alpha_m| < 10^{-1}$ donc : $\forall m,\ m \geqslant p_0 \Rightarrow \alpha_{p_0} - 10^{-1} < \alpha_m < \alpha_{p_0} + 10^{-1}$ et par conséquent à partir du rang p_0 la partie entière de α_m diffère de celle de α_{p_0} d'au plus 1.

Il existe donc une infinité de termes de la suite (α_m) ayant la même partie entière e_0.

On considère alors la suite extraite de (α_n) formée de l'infinité de ses termes ayant e_0 comme partie entière : soit (α_n^0) cette suite.

(α_m^0) est une suite de décimaux de Cauchy car extraite d'une suite de Cauchy. Posons $v_0 = e_0$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}\ |v_0 - \alpha_n^0| < 1$.

On a : $\exists p_1 \in \mathbb{N}$, $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $m \geqslant p_1$ et $n \geqslant p_1 \Rightarrow |\alpha_m^0 - \alpha_n^0| < 10^{-2}$ donc : $\forall m, m \geqslant p_1 \Rightarrow \alpha_{p_1}^0 - 10^{-2} < \alpha_m^0 < \alpha_{p_1}^0 + 10^{-2}$, et à partir du rang p_1, tous les termes α_m^0 diffèrent de $\alpha_{p_1}^0$ d'au plus 10^{-2} : il existe donc une infinité de termes de la suite (α_m^0) qui ont même partie entière e_0 et même premier chiffrre après la virgule, soit e_1.

On considère alors la suite extraite de (α_m^0) formée de l'infinité de ses termes commençant par e_0, e_1 : soit (α_m^1) cette suite extraite.

(α_m^1) est une suite de Cauchy de décimaux car extraite de (α_m^0).

Posons $v_1 = e_0, e_1$ alors $\forall n$, $|v_1 - \alpha_n^1| < 10^{-1}$.

On montre ainsi par récurrence qu'il existe dans (α_m^{p-1}) une infinité de termes ayant même partie entière et mêmes p premiers chiffres.

Soit (α_m^p) cette suite extraite. Si l'on pose $v_p = e_0, e_1, e_2 \ldots e_p$ alors :

$$\forall n, \ |v_p - \alpha_n^p| < 10^{-p}$$

On a ainsi construit une suite (v_n) qui définit un réel. Soit s la suite $s = (\alpha_0^0, \alpha_1^1, \ldots, \alpha_p^p, \ldots)$.

Quel que soit l'entier m, il existe un entier q tel que $10^{-q} < 10^{-m}$ alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $p > q \Rightarrow |v_p - \alpha_p^p| < 10^{-p} < 10^{-q} < 10^{-m}$ donc (v_n) est équivalente à (s_n). Or (s_n) est équivalente à (α_n) car (s_n) est extraite de la suite de Cauchy (α_n) et donc à partir d'un rang, $|\alpha_n - \alpha_n^n| < 10^{-m}$.

En définitive, on a trouvé un développement décimal équivalent à la suite donnée donc cette suite a une limite dans $\mathbb{R}$.

3. Opérations dans $\mathbb{R}$.

La justification des définitions données en IV-1 est alors claire : les représentants canoniques (x_n) et (y_n) des réels x et y sont des suites de Cauchy (proposition 4-2); les suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$ sont de Cauchy (proposition 4-3) et donc convergent dans $\mathbb{R}$ (théorème fondamental).

Proposition 4-4.

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication définies ci-dessus est un corps.

Preuve :

a) On montre d'abord que la limite de la somme de deux suites de décimaux de Cauchy est la somme des limites de ces suites. En effet on sait déjà que la somme de deux suites de Cauchy est de Cauchy. Si (u_n) ρ $(d_n) \in r$ et (v_n) ρ $(d'_n) \in r'$ alors $\lim u_n = r$ et $\lim v_n = r'$.

Par définition de l'addition $r + r' = \lim (d_n + d'_n)$. Mais $(u_n + v_n)$ est équivalente à $d_n + d'_n$: en effet,

$$|u_n + v_n - (d_n + d'_n)| \leqslant |u_n - d_n| + |v_n - d'_n|$$

le premier membre sera inférieur à 10^{-m} dès que chaque terme du second sera inférieur à 10^{-m-1} ce qui est possible.

Ainsi $\lim(u_n + v_n) = \lim(d_n + d'_n)$ soit enfin :

$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n.$$

Montrons alors l'*associativité* de l'addition :

$$\begin{aligned}(r + s) + t &= \lim (r_n + s_n) + \lim t_n \\ &= \lim[(r_n + s_n) + t_n] \\ &= \lim [r_n + (s_n + t_n)] \\ &= \lim r_n + \lim(s_n + t_n) = r + (s + t)\end{aligned}$$

La *commutativité* est évidente.

Le décimal 0 est élément *neutre*, car $r + 0 = \lim(r_n + 0) = \lim r_n = r$.

Opposé pour tout réel :

$$(r_n) \in \mathcal{D} \Rightarrow (-r_n) \in \mathcal{D} \text{ et } \lim r_n + \lim(-r_n) = \lim 0 = 0$$

On note $-r$ l'opposé de r.

b) On montre que la limite du produit de deux suites de Cauchy de décimaux est le produit des limites de ces suites.

En effet, soit (u_n) et (v_n) deux suites de Cauchy de décimaux telles que $(u_n)\ \rho\ (d_n) \in r$ et $(v_n)\ \rho\ (d'_n) \in r'$.

En majorant le second membre de

$$|u_n v_n - d_n d'_n| \leqslant |u_n - d_n| . |v_n| + |d_n| . |v_n - d'_n|$$

On montre que $(u_n v_n)\ \rho\ (d_n d_n)$.

Alors $\lim u_n v_n = \lim d_n d'_n = \lim d_n . \lim d'_n = \lim u_n . \lim v_n$.

Montrons l'associativité de la multiplication :

$$\begin{aligned}(r\, s)t &= \lim r_n s_n . \lim t_n = \lim(r_n s_n) . t_n = \lim r_n(s_n t_n) \\ &= \lim r_n . \lim s_n t_n = r . (st)\end{aligned}$$

La *commutativité* est évidente.

Le décimal 1 est élément *neutre* car $\lim r_n . 1 = \lim r_n = r$ donc $1 . r = r$.

Enfin la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est évidente :

$$\begin{aligned}r(s + t) &= \lim r_n . \lim (s_n + t_n) \\ &= \lim r_n(s_n + t_n) = \lim(r_n s_n + r_n t_n) = \lim r_n s_n + \lim r_n t_n \\ &= rs + rt\end{aligned}$$

c) Il reste à voir que tout réel non nul a un inverse pour la multiplication.

Il suffit de le voir pour un réel positif r. Si (r_n) est le représentant canonique de r, il existe un rang m tel que $r_m < 0$ et donc pour $n < m$, $r_n \geqslant r^m > 0$. La suite (s_n) définie par $s_n = 1$ pour $n < m$ et $s_n = \frac{1}{r_n}$ pour $n \geqslant m$ est une suite de Cauchy : ceci se déduit facilement des égalités et inégalités suivantes :

$$|s_n - s_{n'}| = \left|\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n'}}\right| = \left|\frac{r_{n'} - r_n}{r_n \cdot r_{n'}}\right| < \left|\frac{r_{n'} - r_n}{r_m^2}\right|$$

valables pour $n' > n > m$.

La suite (s_n) définit alors un réel s (théorème fondamental) et $sr = \lim (s_n) \lim (r_n) = \lim (s_n r_n) = \lim 1 = 1$.

Donc r différent de 0 admet s pour inverse.

4. Compatibilité des opérations avec la relation d'ordre.

Elle résulte des résultats suivants sur les suites de décimaux qui se démontrent de façon analogue aux résultats de IV-3.

a) Si une suite (u_n) de décimaux a une limite u strictement inférieure au réel a, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à a.

b) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites de Cauchy de décimaux telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \leqslant v_n$, alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$.

5. Les opérations définies sur $\mathbb{R}$ prolongent celles de $\mathbb{D}$.

Montrons-le pour la multiplication : soit x et y deux réels décimaux de représentants canoniques (x_n) et (y_n). Si r est un rang tel que pour $n \geqslant r$ $x_n = x_r$ et $y_n = y_r$, le produit de x et y défini dans $\mathbb{D}$ est égal à $x_r y_r$. Le produit xy défini dans R est la limite de la suite $(x_n y_n)$. Or cette suite est constante et égale à $x_r y_r$ pour $n \geqslant r$. Elle a donc pour limite $x_r y_r$.

Conclusion.

On a ainsi fabriqué un ensemble de « nombres » $\mathbb{R}$, qui contient $\mathbb{D}$ ainsi que les nouveaux nombres rencontrés qui ont motivé sa construction. Cet ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une structure de corps totalement ordonné qui prolonge celle de $\mathbb{D}$.

Enfin on peut montrer que toute suite de Cauchy de réels est équivalente à une suite de Cauchy de décimaux de sorte que le procédé d'extension ainsi utilisé est clos.

2

La Géométrie

Les discussions sur la rédaction de cette partie du programme ont été la cause de la date tardive de sa publication. Cette rédaction laisse finalement une certaine liberté à l'enseignant mais de ce fait ne peut lui servir, seule, de guide. Les articles suivants vont proposer de façon détaillée des présentations possibles en classe de Quatrième.

Il y a une rupture très nette entre les anciens programmes et les nouveaux. D'une part, la géométrie pouvait se traiter indépendamment des nombres. la notion de longueur étant non numérique, alors que les nouveaux programmes définissent la distance de deux points d'une droite qui est un nombre réel ce qui nécessite l'étude préalable du corps ordonné des réels ; seuls les axiomes d'incidence pouvant être étudiés indépendamment, l'importance de la géométrie en classe de Quatrième est donc réduite par rapport à l'algèbre. D'autre part, les notions de perpendicularité et de métrique dans le plan n'apparaissent qu'en classe de Troisième (la distance de deux points est définie sur la droite contenant ces deux points mais il n'y a pas l'inégalité triangulaire dans le plan ; on a ainsi une métrique sur chaque droite mais non dans tout le plan). Cette géométrie affine de Quatrième est pauvre (peu de théorèmes et peu d'exercices), cela favorisera l'apprentissage de la déduction car il vaut mieux commencer par des théories où peu de notions et peu d'axiomes entrent en jeu que par une théorie riche comme la géométrie euclidienne traditionnellement commencée en Cinquième et reportée maintenant en Troisième.

Nous proposons d'abord deux articles qui s'inspirent de l'annexe de Quatrième des projets de la Commission Ministérielle. Ils ont en commun les axiomes d'incidence et la géométrie de la droite mais diffèrent pour la géométrie plane. La première, utilisant à fond l'axiome de Thalès, est la géométrie traditionnelle des figures, essentiellement du parallélogramme ; elle est cohérente, intrinsèque (non liée à un repère) et satisfaisante pour un esprit cartésien, mais certaines démonstrations ne pourront pas être trouvées *par l'élève moyen de Quatrième et nécessiteront d'abord un exposé magistral du maître. La seconde, fondée sur les translations, veut arriver directement au but qui est le plan vectoriel; l'axiome de Thalès intervient uniquement pour montrer que la définition donnée de l'équipollence (il existe une translation envoyant le bipoint (A, B) sur le bipoint (C, D)) liée à un repère est en fait intrinsèque (les bipoints (A, D) et (B, C) ont même milieu), mais toute la construction du plan vectoriel est indépendante de cet axiome, rapide et simple; si, l'utilité de l'axiome de Thalès pouvant être difficile à saisir, cette méthode est moins cartésienne, elle présente moins de difficultés théoriques et est peut-être abordable par l'élève lui-même.*

La géométrie en quatrième

P. Buisson,
I.R.E.M. Strasbourg.

Les débuts de l'enseignement traditionnel de la géométrie étaient empoisonnés par des considérations métaphysiques sur ce qu'est un point, une droite, un plan, et la suite par la difficulté de distinguer ce qui est observation de l'espace physique de ce qui fait partie d'une théorie mathématique, en particulier de ce qu'il faut démontrer à partir de prémisses clairement posées. Le langage ensembliste acquis dans les classes précédentes va permettre de dépasser ce problème en distinguant nettement ce qui est expérimental de ce qui est théorie mathématique.

Le but de cet article est de montrer comment la géométrie peut être enseignée dans l'esprit des nouveaux programmes dans une classe de Quatrième, l'influence des discussions avec les expérimentateurs de l'Académie de Strasbourg a été déterminante pour la rédaction de cet article et le plan suivi. Il est naturellement impossible de répondre objectivement à la question : « Un tel enseignement est-il adapté à l'enfant de 13-14 ans? » Dans deux ou trois ans les maîtres pourront donner un début de réponse, mais actuellement les réponses ne peuvent être qu'affectives.

De nombreuses personnes estiment que l'enseignement de la Mathématique doit être posée en fonction des futurs utilisateurs (souvent traditionnels : physiciens, mécaniciens, ingénieurs, mathématiciens...); cela est peut-être vrai dans l'enseignement supérieur (département de Mathématiques, Classes Préparatoires, Grandes Écoles...) mais pas dans le premier cycle de l'enseignement secondaire où il doit surtout contribuer à la formation générale de l'enfant par l'apprentissage d'un langage précis, d'une méthode d'analyse des problèmes et d'un mode de raisonnement.

Nous allons donc montrer comment la méthode axiomatique permet de mathématiser une situation concrète. Au départ il y a des objets physiques (feuilles de papier, tableau noir, traits tracés à la règle...) et des manipulations d'objets physiques (règles, compas, équerre...); nous observons des propriétés et nous en privilégions certaines. Nous considérons alors un ensemble dont les éléments vérifient les propriétés privilégiées énoncées en langage ensembliste (ce sont les axiomes ou théorèmes admis) puis nous déduisons alors de ces axiomes le maximum de propriétés vérifiées par les éléments de cet ensemble (ce sont les théorèmes démontrés).

Nous ne nous préoccupons pas de la « nature » des éléments et de l'ensemble, mais nous illustrerons ces propriétés par des dessins comme cela a été fait en Sixième et en Cinquième. Le dessin illustre des propriétés, permet de les retenir mais ne les justifie pas.

Il y a évidemment un arbitraire dans le choix des axiomes (la notion de vérité mathématique est relative) et le programme de Quatrième n'impose pas d'axiomatique, nous en proposons une ici.

Dans l'enseignement traditionnel de la géométrie, fondé sur l'axiomatique d'Euclide-Hilbert, toutes les notions étaient indispensables au départ : longueur, angle, perpendicularité, parallélisme... et les axiomes fort nombreux; de plus, la plupart d'entre eux n'étaient pas explicités; il était donc difficile de savoir si une propriété était admise ou à démontrer. Par contre nous suggérons ici d'introduire les axiomes les uns après les autres et de les exploiter au maximum à chaque étape. Il est aussi plus facile d'expliquer ce qu'est un raisonnement déductif lorsque peu d'axiomes entrent en jeu.

Dans l'exposé qui va suivre les axiomes sont choisis suffisamment forts pour rendre les démonstrations plus faciles. La première partie, consacrée aux axiomes d'incidence, permet d'utiliser les notions et le langage introduits dans les classes précédentes et peut donc être traitée dès le début de la Quatrième. Par contre les autres parties, droite et plan, doivent être précédées de l'introduction de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$; c'est pourquoi il est utile de ne pas intégrer l'étude des axiomes d'incidence dans celle du plan.

Remarquons pour terminer que les nouveaux programmes sont axés essentiellement sur la construction des nombres et le calcul algébrique, utilisés par la suite en géométrie, alors que les anciens programmes étaient axés sur la géométrie qui permettait d'introduire les nombres irrationnels (segments incommensurables...); la géométrie est donc la partie la moins importante du programme de Quatrième.

1. — Les axiomes d'incidence.

1.1. Introduction des axiomes.

L'élève de Quatrième a utilisé dès l'enseignement élémentaire les mots, point, ligne droite, lignes droites parallèles, plan; il a toujours admis les faits suivants justifiés par le tracé au crayon à la règle et à l'équerre, le plan étant la feuille de papier ou le tableau noir.

a) Par deux points passe une ligne droite et une seule.

b) Par un point extérieur à une ligne droite passe une et une seule ligne droite parallèle à la précédente.

L'élève remarquera aussi les faits suivants encore plus évidents :

c) Il existe des lignes droites.

d) Une ligne droite a beaucoup de points (plus de deux nous suffirons).

e) En dehors de chaque ligne droite on peut trouver un point.

1.2. Mathématisation de la situation.

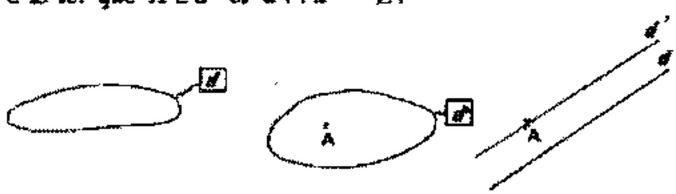
Soit P un ensemble et $\mathfrak{D}$ un ensemble de parties de P.

Le couple (P, $\mathfrak{D}$) est appelé plan mathématique si P et $\mathfrak{D}$ vérifient les propriétés suivantes :

$\boxed{\mathrm{I}_1}$ *Il existe un élément dans $\mathfrak{D}$ et aucun élément de $\mathfrak{D}$ n'est égal à P.*

$\boxed{\mathrm{I}_2}$ *Si $d \in \mathfrak{D}$ alors d contient au moins deux points distincts et, si $A \in P$ et $B \in P$ sont distincts alors il existe un élément de $\mathfrak{D}$ et un seul contenant $\{A, B\}$.*

$\boxed{\mathrm{I}_3}$ *Si $d \in \mathfrak{D}$ et $A \in P$* avec $A \in d$, *alors il existe un et un seul élément $d' \in \mathfrak{D}$ tel que $A \in d'$ et $d \cap d' = \varnothing$.*



Habituellement les éléments de P sont appelés points et notés par des lettres majuscules A, B...; ceux de $\mathfrak{D}$ sont appelés droites et notés par des lettres minuscules *d*, *d'*...

Les axiomes peuvent être illustrés aussi bien par des diagrammes de Venn que par des lignes droites tracées à la règle (de telles lignes deviennent d'ailleurs au microscope des diagrammes de Venn!).

Avant d'introduire cette terminologie on peut montrer que

$$P = \{A, B, C, E\} \text{ avec } \mathfrak{D} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, E\}, \{C, E\}\}$$

est un plan mathématique. Il est également possible de découvrir un plan mathématique à neuf points.

1.3. Exploitation du modèle.

Nous nous plaçons dans un plan mathématique, l'ensemble des droites étant désigné par $\mathcal{D}$.

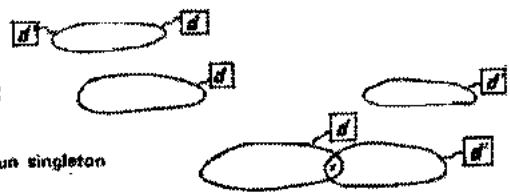
1.3.1. Étude du parallélisme.

Pour des droites notées d et d' les trois situations suivantes sont possibles :

– $d = d'$

– $d \cap d' = \emptyset$

– $d \cap d'$ est un singleton



Dans ce dernier cas les deux droites sont dites *sécantes*.

Définition : On dit qu'une droite d est *parallèle* à une droite d' si l'intersection $d \cap d'$ n'est pas un singleton.

En particulier une droite est parallèle à elle-même.

Nous notons $d//d'$ pour « d parallèle à d' ».

Théorème : Le parallélisme est une relation d'équivalence.

On peut vérifier ce théorème dans le cas du plan mathématique à quatre points ou à neuf points. Démontrer un théorème pour des ensembles finis revient à faire un certain nombre de vérification; mais dans le cas général les démonstrations devront être formelles et il est nécessaire d'utiliser des lettres — appelées variables — qui peuvent désigner un élément quelconque de l'ensemble domaine de variation des lettres.

La réflexivité et la symétrie sont évidentes; démontrons la transitivité. Pour cela remarquons d'abord que (I_3) s'énonce de manière équivalente :

Si $d \in \mathcal{D}$ et $A \in P$ alors il existe une et seule droite d' contenant A et parallèle à d.

Nous voulons démontrer que si d est parallèle à d' et d' à d'' alors d est également parallèle à d''.

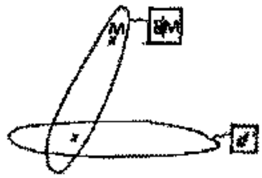
Si $d \cap d'' = \emptyset$ nous avons le résultat voulu; si $d \cap d'' \neq \emptyset$ désignons par M un point de $d \cap d''$. La droite d vérifie :

$d//d'$ et $M \in d$; la droite d'' vérifie : $d''//d'$ et $M \in d''$; d'après l'unicité de la droite contenant un point donné et parallèle à une droite donnée nous avons $d = d'$.

Nous appellerons *direction* d'une droite la classe d'équivalence de cette droite; nous noterons les directions par les lettres δ, δ', δ'' ... Si $M \in P$ et si δ est une direction nous noterons $\delta(M)$ la droite appartenant à δ contenant le point M.

1.3.2. Étude de la projection parallèle.

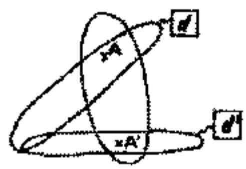
Cette étude est une simple application des propriétés de l'intersection. Soit δ une direction et d' une droite n'appartenant pas à δ, alors $\delta(M) \cap d'$ est un point de d' ; nous définissons ainsi une application de P sur d' appelée *projection parallèle à* δ *sur* d'.



Cette application est surjective, non injective et sa restriction à d' est l'identité.

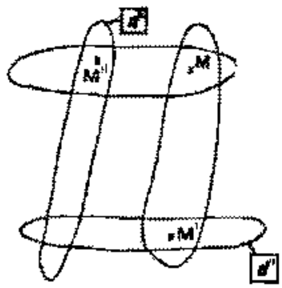
Théorème : Deux droites du plan sont équipotentes.

Prenons deux droites distinctes d et d' et deux points distincts A et A' avec $A \in d$, $A' \in d'$ et non éléments de $d \cap d'$; la restriction à d de la projection parallèle à la direction de la droite A A' sur d' est une bijection.



Théorème : Si d est une droite du plan P, alors Card $P = (\text{Card } d)^2$.

Rappelons que Card P désigne le cardinal de l'ensemble P ; pour démontrer le théorème nous devons trouver une bijection de P sur $d \times d$ ou encore une bijection de P sur $d' \times d''$, où d' et d'' sont deux droites sécantes car d'après le théorème précédent il existe une bijection de d' sur d et de d'' sur d donc de $d' \times d''$ sur $d \times d$.

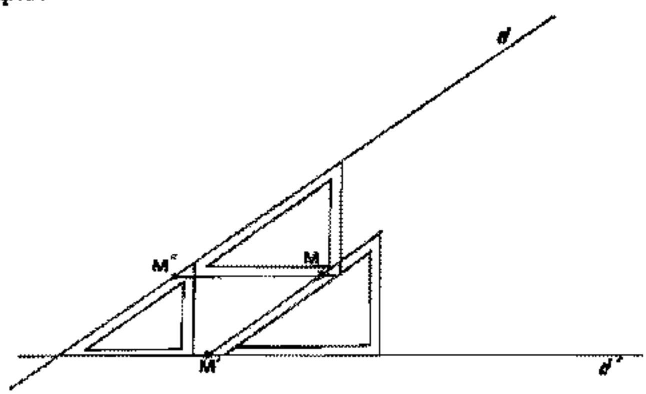


Notons δ' et δ'' les directions des droites d' et d''. L'application qui, à $M \in P$, associe le couple (M', M''), $(M', M'') \in d' \times d''$, où M' est la projection de M sur d' parallèlement à la direction de d'' et M'' la projection de M sur d'' parallèlement à la direction de d', est une bijection.

Ce résultat est une introduction à la géométrie analytique; en effet, nous associons à tout point de plan un couple de points appartenant à des droites (les coordonnées du point). Lorsque les points d'une droite pourront être caractérisés par des nombres nous aurons la géométrie analytique.

Ceux qui sont choqués par le diagramme de Venn peuvent faire des figures à l'aide de la règle et de l'équerre pour illustrer ces théorèmes :

Exemple :



2. — La droite.

Nous avons vu que toutes les droites d'un plan mathématique sont équipotentes. Nous allons préciser les propriétés que doivent vérifier les droites d'un plan mathématique décrivant la situation physique.

2.1. Introduction expérimentale.

Nous avons fait des tracés à la règle non graduée pour avoir une ligne droite, nous allons utiliser maintenant une règle graduée (par exemple un double décimètre).

Traçons une ligne droite avec une règle graduée et choisissons un point origine O sur cette droite. Nous faisons coïncider ce point avec la gradua-

tion 0 de la règle; nous avons deux dispositions pour la règle en mettant la graduation d'un côté ou de l'autre du point O. Nous choisissons une des deux possibilités et notons I le point coïncidant avec le 1 de la graduation en retournant la règle nous notons I' le point coïncidant avec le 1 de la graduation, pour traduire ce retournement nous noterons —1.

Soit M un point de la ligne droite du même côté de O que I, la graduation nous permet d'associer au point M un encadrement par des décimaux de $\mathbb{D}_1^+$: sous-ensemble des décimaux positifs ayant un chiffre après la virgule (ici 3,9 et 4,0). A un point M' de l'autre côté de O nous associerons un encadrement par deux décimaux de $\mathbb{D}_1^-$ (ici —2,2 et —2,3).

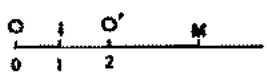
Nous pouvons faire trois remarques :

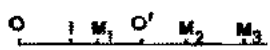
a) En choisissant l'autre possibilité pour 1, nous transformerions l'encadrement (x, x') d'un point M en l'encadrement $(-x', -x)$.

b) En choisissant un autre point comme origine, il n'y a pas de formule de passage toujours valable.

Exemple 1 :

Si nous choisissons comme nouvelle origine le point O' correspondant exactement au nombre 2, l'encadrement (x, x') d'un point M devient $(x-2, x'-2)$, en conservant le sens.





Si nous prenons O' correspondant à l'encadrement (2,3; 2,4) comme nouvelle origine, nous obtenons en conservant le sens le tableau suivant :

Point	M_1	M_2	M_3
Ancien encadrement	(1,5; 1,6)	(3,2; 3,3)	(4,4; 4,5)
Nouvel encadrement	(—0,9; —0,8)	(0,9; 1)	(2; 2,1)

L'écart entre les encadrements est de 2,3 ou de 2,4 suivant la position des points par rapport aux milieux des segments définissant la graduation.

c) Si les possibilités physiques nous permettaient d'obtenir des graduations en dixième de millimètre, en centième de millimètre... nous aurions ainsi pour chaque point des encadrements de plus en plus fins, or nous avons défini un nombre réel comme une telle suite d'encadrements.

d) Nous aurions pu faire cette étude avec une graduation fabriquée par l'élève et non centimétrique, puis remarquer la correspondance entre les encadrements suivant les unités de mesure; cela est en général fort délicat sauf dans le cas où la nouvelle origine est choisie sur une graduation et si l'ancienne unité est multiple de la nouvelle ; alors si un point M correspondait à la graduation x, il correspondra à une graduation $ax + b$ indépendante de x.

2.2. Mathématisation de la situation.

Si nous nous fixons un point O et un sens, nous mathématisons la graduation de la ligne droite par une bijection d'une droite mathématique D d'un plan mathématique sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$; soit $f : D \to \mathbb{R}$.

Nous appellerons droite repérée la donnée d'un point O et d'une bijection f : $D \to R$.

D'autres bijections décrivent la situation physique; le changement de sens donne une nouvelle bijection $g : D \to \mathbb{R}$ définie par $g(M) = -f(M)$; si nous changeons d'origine nous sommes dans la situation de l'exemple 1 et nous avons une nouvelle bijection $h : D \to \mathbb{R}$ avec $h(M) = f(M) - b$ avec $b = f(0')$, le point O' étant la nouvelle origine.

Nous définirons donc :

Une droite euclidienne est la donnée d'un ensemble D et d'un ensemble $\mathcal{F}$ de bijections de D sur $\mathbb{R}$ tel que si $f \in \mathcal{F}$ alors $\mathcal{F}$ est exactement l'ensemble des bijections de D sur $\mathbb{R}$ de la forme $M \mapsto f(M) + b$ *ou* $M \mapsto -f(M) + b$ *avec* $b \in \mathbb{R}$.

Changement d'unité : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une bijection; le couple (O,I) avec $f(O) = 0$ et $f(I) = 1$ s'appelle repère correspondant à f. Si (A,B)e st un autre couple de points distincts de D, nous traduisons l'expérience physique de 2.1 *d*) par la donnée de la bijection $g : D \to \mathbb{R}$ telle que $g(A) = 0$, $g(B) = 1$ et $g(M) = \alpha f(M) + \beta$ pour tout point M de D avec $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Cette bijection est bien unique car si $f(A) = a$ et $f(B) = b$ nous avons $g(M) = \dfrac{1}{b-a}(f(M) - a)$, c'est la formule classique de changement de repère. Nous définissons alors :

Une droite affine est la donnée d'un ensemble D et d'un ensemble $\mathcal{F}$ de bijections de D sur $\mathbb{R}$ telle que si $f \in \mathcal{F}$, *alors $\mathcal{F}$ est exactement l'ensemble des bijections de D sur $\mathbb{R}$ de la forme* $af + b$ *avec* $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ *et* $b \in \mathbb{R}$.

2.3. Exploitation du modèle.

C'est la notion de droite affine qui traduit toute la richesse de la situation physique, mais elle n'est pas simple. Il devrait être possible en classe de Quatrième de travailler dans un premier temps avec la droite repérée et montrer dans un deuxième temps si le niveau de la classe le permet que les résultats ne dépendent pas de la bijection choisie dans la famille $\mathcal{F}$, c'est-à-dire si l'on remplace la bijection f par $af + b$. Le passage de la droite repérée à la droite affine par la droite euclidienne peut être utile pour la mathématisation mais inutile dans l'exploitation du modèle.

2.3.1. Bipoint; « mesure algébrique ».

Soit (D, f) une droite repérée. Si $x = f(M)$, x s'appelle l'abscisse de M et M l'image de x. Nous appellerons *bipoint de D* tout élément (A, B) de D $\times$ D. Nous définissons la mesure algébrique du bipoint (A, B) de la droite repérée comme le nombre réel $f(B) - f(A)$ et on note $\overline{AB} = f(B) - f(A)$, la notation $\overline{AB}$ est abusive car elle n'indique pas que ce nombre dépend de f, mais elle est justifiée par le théorème suivant dont la démonstration est immédiate.

Théorème. — Si $f(B) - f(A) = f(D) - f(C)$ *alors, si* a *est un nombre réel distinct de 0 et* b *un nombre réel quelconque nous avons aussi*
$(af(B) + b) - (af(A) + b) = (af(D) + b) - (af(C) + b)$ *et réciproquement.*

L'égalité $\overline{AB} = \overline{CD}$ est donc bien une propriété intrinsèque, c'est-à-dire indépendante de la bijection choisie dans la famille $\mathcal{F}$ de bijections définissant une droite affine. Il en est de même de la relation de Chasles : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

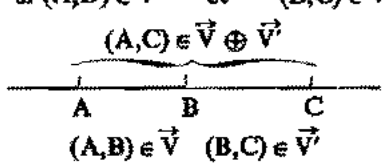
2.3.2. Vecteurs.

Nous définissons maintenant une relation d'équivalence dans l'ensemble des bipoints par :

$$(A,B)\ \mathcal{R}\ (C,D), \text{ si et seulement si, } \overline{AB} = \overline{CD}$$

La classe d'équivalence du bipoint (A,B) s'appelle vecteur et se note $\overrightarrow{AB}$; nous noterons $\vec{D}$ l'ensemble des vecteurs. Si $\vec{V}$ est un vecteur et A un point de D alors il existe un point B et un seul tel que $(A,B) \in \vec{V}$.

Nous définissons une application de $\vec{D} \times \vec{D}$ dans $\vec{D}$ par $\vec{V} \oplus \vec{V'} = \vec{V''}$ avec $\quad \vec{V''} = \overrightarrow{AC} \quad$ si $(A,D) \in \vec{V} \quad$ et $\quad (B,C) \in \vec{V'}$;



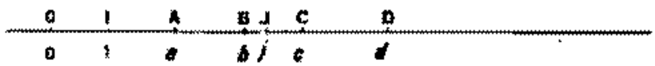
nous pouvons donc écrire par définition $\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; il faut naturellement vérifier que le vecteur $\vec{V''}$ ne dépend pas du point A choisi.

Nous pouvons définir de même une application de $\mathbb{R} \times \vec{D}$ dans $\vec{D}$ par $x.\vec{V} = \vec{V'}$ avec $\vec{V'} = \overline{AC}$ si $(A,B) \in \vec{V}$ et $\overline{AC} = x\ \overline{AB}$ (ce dernier produit est naturellement un produit de nombres réels).

Il est possible de montrer que $\vec{D}$ est aussi muni d'une structure d'espace vectoriel (cf. 3.33); nous ne le ferons ici que dans le cas du plan.

2.3.3. Milieu, barycentre, segment.

Soit (A,B) un bipoint, il existe alors un point J et un seul tel que $\vec{JA} + \vec{JB} = 0$; ce point s'appelle le *milieu* du bipoint (A,B). On vérifie immédiatement que $\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si (A,D) et (B,C) ont même milieu.



L'abscisse du milieu de (A,D) est $\dfrac{a+d}{2}$, celle de (B,C) est $\dfrac{b+c}{2}$; les deux milieux sont donc confondus, si et seulement si, $b - a = d - c$.

Plus généralement, soit (A,B) un bipoint de D et λ un nombre réel. Dans un repère donné, considérons le point d'abscisse $x = \lambda\ a + (1 - \lambda)b$; si nous changeons de repère, c'est-à-dire si $a' = \alpha a + \beta$ alors $x' = \lambda a' + (1 - \lambda)$ $b' = \alpha(\lambda a + (1 - \lambda)b) + \beta = \alpha x + \beta$.

Le point G défini sur la droite repérée par $\overline{OG} = \lambda\ \overline{OA} + (1 - \lambda)\ \overline{OB}$ ou encore $\lambda\ \overline{GA} + (1 - \lambda)\ \overline{GB} = 0$ est défini sur la droite affine, car indépendant du repère choisi, on l'appelle *barycentre* du triplet (A,B,λ).

Pour (A,B) fixé, l'application de $\mathbb{R}$ dans D qui à $\lambda \in \mathbb{R}$ associe le barycentre de (A,B,λ) est une bijection et on appelle *segment d'extrémités A et B*, noté [AB], l'image de l'intervalle [0,1].

2.3.4. Droite orientée, ordre sur la droite.

Si l'on se contente d'étudier la droite repérée, ce paragraphe est inutile car on obtient une relation d'ordre sur la droite en transportant la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ par la bijection définissant la droite repérée :

$$A < B \text{ si et seulement si } a < b.$$

Pour définir un ordre sur la droite affine, il faut d'abord montrer que la droite est orientable, c'est-à-dire faire une partition en deux classes d'équivalence des repères de la droite affine. On obtient cette partition (O,I) R (O',I') si et seulement si, la formule de changement de repère est donnée par $f'(M) = a f(M) + b$ avec $a > 0$. Orienter la droite, c'est choisir une classe d'équivalence.

Définition. — Une droite affine orientée est un couple $(D, \mathcal{F}')$ *où* $\mathcal{F}'$ *est une classe de l'ensemble des bijections* $\mathcal{F}$ *définissant la droite affine* $(D, \mathcal{F})$.

La relation dans D « $A < B$ » si et seulement si $f(A) < f(B)$ ne dépend pas de la bijection f choisie dans la classe $\mathcal{F}'$ et c'est une relation d'ordre. On peut donc munir la droite affine de deux relations d'ordre.

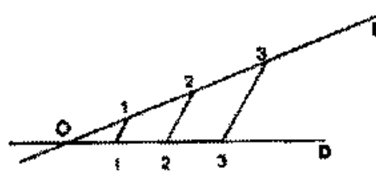
Remarque. — Sur la droite affine non orientée on peut définir la relation « entre » par « M entre A et B » si et seulement si $M \in [AB]$; mais pour définir un ordre il faut préalablement orienter la droite.

3. — Le plan.

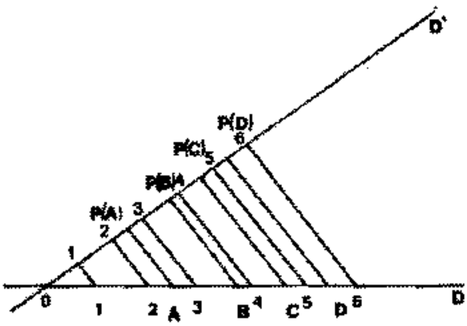
3.1. Introduction.

Dans le paragraphe précédent nous avons étudié les droites d'un plan pour elles-mêmes; nous allons maintenant « comparer » les graduations des droites.

Prenons deux lignes droites sécantes en un point O pris comme origine sur les deux droites et une graduation sur chaque droite.



Nous remarquerons que les lignes droites joignant les points de même graduation sont parallèles.



Réciproquement, si nous avons une graduation sur D nous pouvons construire une graduation sur D' par le tracé de parallèles de direction δ. Soit p la projection parallèle à δ, nous pouvons constater qu'il y a « presque » égalité pour les encadrements correspondants aux nombres :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{p(A)\,p(B)}}{\overline{p(C)\,p(D)}}$$

3.2. Mathématisation de la situation.

A partir de maintenant nous ne considérons que des plans mathématiques P, appelés alors affines, vérifiant :

(P_1) Toutes les droites sont munies d'une structure de droite affine.

(P_2) Si D et D' sont deux droites, p une projection parallèle de D sur D' et A, B, C, D des points de D vérifiant $\overline{AB} = b\,\overline{CD}$ alors $\overline{p(A)p(B)} = \overline{bp(C)p(D)}$ (Thalès).

On vérifie alors que la propriété physique: les droites joignant les points de même abscisse sont parallèles, est une conséquence de ces axiomes.

3.3. Exploitation du modèle.

On récupère ici le début de la géométrie traditionnelle de Troisième : application du théorème de Thalès au triangle (triplet de points non alignés), au trapèze (quadruplet (A,B,C,D) tel que les droites AB et CD soient parallèles) et « réciproque »; projection du milieu d'un bipoint; symétrie centrale : l'image d'une droite et une droite parallèle...

3.3.1. Étude du parallélogramme.

On appelle parallélogramme un quadruplet (A,B,C,D) tel que les bipoints (A,C) et (B,D) aient même milieu.

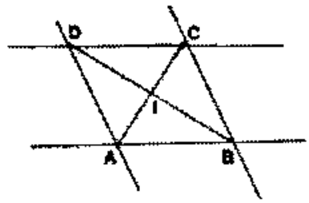
La symétrie centrale par rapport au milieu commun conserve le parallélogramme ce qui a pour conséquence que les droites, lorsqu'elles existent, AB et CD d'une part, AD et BC d'autre part sont parallèles.

Il y a différents types de parallélogrammes :

Parallélogrammes dégénérés :

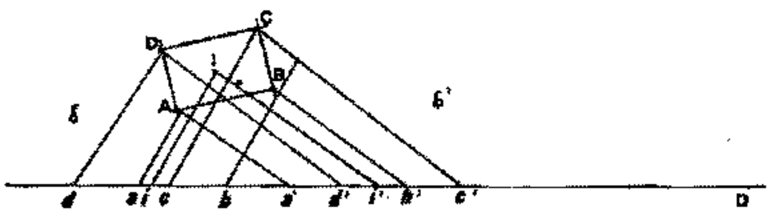
Parallélogrammes non dégénérés : les droites AB et DC d'une part, AD et BC d'autre part sont distinctes donc parallèles. On peut d'ailleurs démontrer la réciproque.

Énonçons maintenant le théorème fondamental sur le parallélogramme.



Théorème. — Tout parallélogramme se projette suivant un parallélogramme ; de plus, si un quadruplet se projette suivant deux directions distinctes, à chaque fois sur un parallélogramme, alors ce quadruplet est un parallélogramme.

La partie directe résulte de la conservation du milieu par projection. Démontrons la deuxième partie en remarquant (Thalès) qu'on peut faire les deux projections sur une même droite.



La figure ci-dessus rassemble toutes les notations.

Le milieu de (A,C) appartient à δ' (i') où i' est le milieu de (a',c') et à $\delta(i)$ où i est le milieu de (a,c); c'est donc $\delta(i) \cap \delta'(i')$ et il en est de même du milieu de (B,D).

3.3.2. *Vecteurs du plan.*

Théorème. — La relation entre bipoints du plan, appelée équipollence : « (A,B) équipollent à (C,D) si et seulement si (A,B,D,C) est un parallélogramme » est une relation d'équivalence.

La réflexivité et la symétrie sont immédiatement vérifiées. A l'aide du théorème 3.3.1, on se ramène à des parallélogrammes dégénérés pour lesquels la démonstration est faite en 2.3.2 et 2.3.3. On appelle vecteur, noté $\overrightarrow{AB}$, la classe d'équivalence du bipoint (A,B) et on note $\vec{P}$ l'ensemble des vecteurs.

Il est impossible de dessiner sur une feuille de papier (illustration de l'espace à 2 dimensions) un bipoint (élément de P × P, espace de dimension 4); il faut donc marquer les deux points en indiquant que A est le premier et B le second, exemples :

FIG. B13.

Somme de deux vecteurs

Par définition du parallélogramme, si $\vec{V} \in \vec{P}$ et $A \in P$, il existe un et un seul point B de P tel que $(A,B) \in \vec{V}$.

Comme dans le cas de la droite (2.3.2) nous pouvons définir par une construction indépendante du point A une application de $\vec{P} \times \vec{P}$ dans $\vec{P}$ par $\vec{V} \oplus \vec{V'} = \vec{V''}$ avec $\vec{V''} = \overrightarrow{AC}$ si $(A,B) \in \vec{V}$ et $(B,C) \in \vec{V'}$.

Nous avons par définition la formule de Chasles : $\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

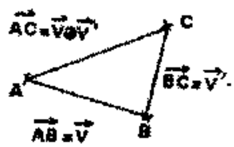


FIG. B14.

L'associativité et la commutativité de la loi $\oplus$ résultent de la construction; le vecteur, noté $\vec{0}$, dont un représentant est (A,A) vérifie $\vec{V} \oplus \vec{0} = \vec{V}$, c'est donc un élément neutre et tout vecteur $\vec{V}$ a un symétrique $\vec{V'} = \overrightarrow{BA}$ si $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$. L'ensemble $\vec{P}$ est donc muni d'une structure de groupe commutatif.

Multiplication d'un vecteur par un réel

Comme dans le cas de la droite (2.3.2) nous pouvons définir une application de $\mathbb{R} \times \vec{P}$ dans $\vec{P}$, avec $\vec{V'} = x.\vec{V}$, où $\vec{V'} = \overrightarrow{AC}$ avec $\overline{AC} = x\ \overline{AB}$ si $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$.

Les propriétés suivantes résultent d'un calcul algébrique sur la droite :

$$(x + y).\vec{V} = (x.\vec{V}) \oplus (y.\vec{V})$$
$$x.(y.\vec{V}) = (xy).\vec{V}$$
$$1.\vec{V} = \vec{V}$$

La dernière propriété résulte du théorème de Thalès.

$$x.(\vec{V} \oplus \vec{V'}) = (x.\vec{V}) \oplus (x.\vec{V'})$$

3.3.4. Repère affine.

Théorème. — Si (A,B,C) est un triangle et M un point du plan, alors il existe un couple unique (x,y) *de nombres réels tels que* $\overrightarrow{AM} = (x.\overrightarrow{AB}) \oplus (y.\overrightarrow{AC})$.

Le triangle (A,B,C) s'appelle repère affine, les nombres x et y sont les coordonnées de point M dans ce repère.

Projetons M en P sur AB parallèlement à AC et en Q sur AC parallèlement à AB. Alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} \oplus \overrightarrow{AQ}$ et si x désigne l'abscisse de P sur la droite AB dans le repère (A,B) et y l'abscisse de Q sur la droite AC dans le

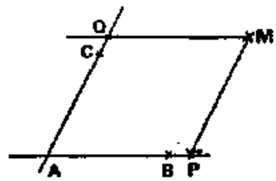


FIG. B15.

repère (A,C) on a $\overrightarrow{AP} = x.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = y.\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AM} = (x.\overrightarrow{AB}) \oplus (y.\overrightarrow{AC})$.

Démontrons l'unicité;

supposons $\overrightarrow{AM} = (x.\overrightarrow{AB}) \oplus (y.\overrightarrow{AC}) = (x'\overrightarrow{AB}) \oplus (y'.\overrightarrow{AC})$ avec $x \neq x'$; nous aurions alors $\overrightarrow{AB} = \frac{y'-y}{x-x'}\overrightarrow{AC}$ donc A,B,C alignés ce qui est absurde donc $x = x'$, de même on démontre l'égalité $y = y'$.

La Géométrie

document de travail de l'I.R.E.M. de Lyon,
rédigé par L. DUVERT, R. GAUTHIER, M. GLAYMANN, A. GOURET et A. MYX.

1. — Introduction.

Ce document a été écrit à l'intention des maîtres; il a pour objet de présenter, dans le cadre des nouveaux programmes, la géométrie en classe de Quatrième; mais il ne peut en aucune façon être considéré comme un cours pouvant être présenté tel quel aux enfants; cependant, nous avons largement tenu compte de la recherche effectuée par l'équipe lyonnaise dans les classes expérimentales et pour certaines parties de ce document — indiquées par un trait en marge — nous avons reproduit des fiches de E. Galion 4, édition 1971.

La géométrie reste pour le moment un domaine privilégié du raisonnement déductif, mais il faut rappeler qu'elle a une origine purement expérimentale, et que dans sa forme définitive, c'est une véritable théorie mathématique; l'enfant aura fait un progrès considérable, lorsqu'il aura saisi ce cheminement.

2. — Propriétés d'incidence.

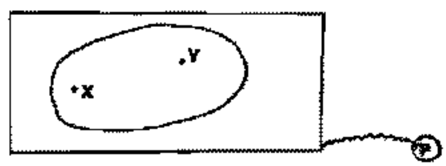
$\mathcal{T}$ est un ensemble.

$\mathcal{D}$ est un ensemble *non vide* de parties propres de $\mathcal{T}$ (1).

On dit que $\mathcal{D}$ est un *ensemble de droites mathématiques* du *plan* $\mathcal{T}$ dont les éléments sont appelés *points* dans le seul cas où les deux axiomes suivants sont vérifiés :

a) Premier axiome d'incidence.

Toute paire (2) de points de $\mathcal{T}$ est incluse dans une droite et une seule de $\mathcal{D}$ (3).



b) Deuxième axiome d'incidence (ou axiome d'Euclide).

Pour toute droite d de $\mathcal{D}$ et pour tout point x de $\mathcal{T}$ n'appartenant pas à d, il existe une droite d' et une seule disjointe de d et dont x est élément.

Vocabulaire : Si le point x appartient à la droite δ, on dit encore que δ passe par x.

Conséquences :

Théorème 1.

Si l'intersection de deux droites contient au moins une paire de points, alors ces deux droites sont égales.

Théorème 2.

Il existe dans $\mathcal{T}$ au moins trois points n'appartenant pas à une même droite.

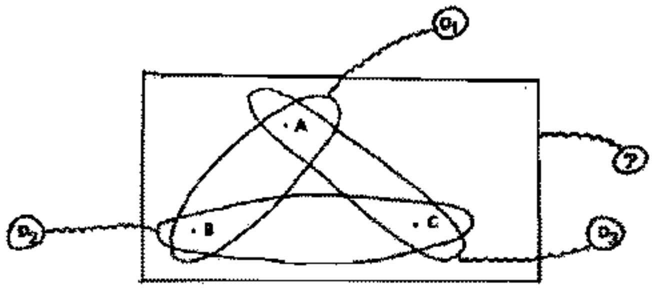
En effet, s'il n'y avait que deux points dans $\mathcal{T}$, la droite passant par eux ne serait pas une partie propre de $\mathcal{T}$.

---

(1) Une partie propre de $\mathcal{T}$ est une partie de $\mathcal{T}$ distincte de $\mathcal{T}$ et non vide.
(2) Le mot *paire* désigne un ensemble de cardinal *deux*.
(3) Cet axiome ne veut pas dire (encore) *que toute droite contient au moins une paire.*

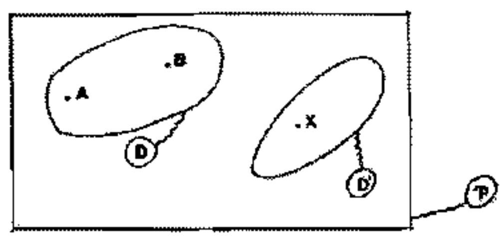
Théorème 3.

Il existe dans $\mathfrak{D}$ au moins trois éléments.



Théorème 4.

Il existe au moins deux droites disjointes dans $\mathfrak{D}$.



Démontrez ce théorème.

c) **Définition.**

On dit que deux droites D_1 et D_2 sont *sécantes* si leur intersection est un singleton.

X étant le point commun à D_1 et D_2 :

$$D_1 \cap D_2 = \{X\}$$

Autre définition.

Deux droites *parallèles* sont deux droites *non-sécantes.*

Démontrez que si les droites D_1 et D_2 sont parallèles, alors :

ou bien $D_1 = D_2$
ou bien $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

Théorème 5.

La relation dans $\mathcal{D}$: « ... est parallèle à... » *est une* relation d'équivalence.

Démontrez ce théorème.

(L'axiome d'Euclide n'intervient que dans la démonstration de la transitivité.) Cette relation d'équivalence détermine une *partition* de $\mathcal{D}$; les classes s'appellent les *directions*.

A titre d'exercice, démontrez que toute droite contient au moins une paire de points.

Notation

La droite contenant la paire $\{X, Y\}$ sera désormais désignée par $D(X, Y)$, et parfois XY.

d) **Étude du modèle à neuf points.**

Voir le rapport du Groupe de Lyon sur l'expérimentation en Quatrième (p. 444).

Remarque

Une feuille de papier, la surface d'une eau tranquille, ne sont pas des plans mathématiques.

La trace d'un crayon bien taillé sur une feuille de papier n'est pas un point mathématique.

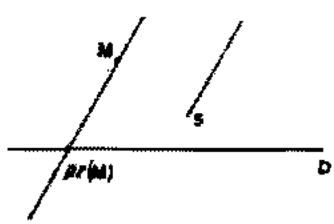
Un trait tracé à la règle n'est pas une droite mathématique.

Cependant, certains dessins, tracés avec une règle et un crayon sur une feuille de papier, permettent d'illustrer (imparfaitement) les propriétés du plan, des droites, des points mathématiques, telles que celles qui sont énoncées dans les axiomes d'incidence 1 et 2.

3. — Projection parallèle de $\mathcal{P}$ sur une droite.

Soit une direction Δ (représentée sur la figure par une droite δ élément de Δ) et une droite D non élément de Δ.

A tout point M de $\mathcal{P}$, on associe le point *pr*(M), intersection de D et de la droite de direction Δ passant par M.



Justifiez l'existence et l'unicité du point *pr*(M).

Nous venons de définir une *application* de $\mathcal{P}$ vers D, notée *pr* :

$$pr : \left| \begin{array}{l} \mathcal{P} \to \mathrm{D} \\ \mathrm{M} \mapsto pr(\mathrm{M}) \end{array} \right.$$

Cette application s'appelle : *projection de direction* Δ *sur* D ou *projection parallèlement à* δ *sur* D.

pr(M) s'appelle le *projeté* de M sur D parallèlement à δ.

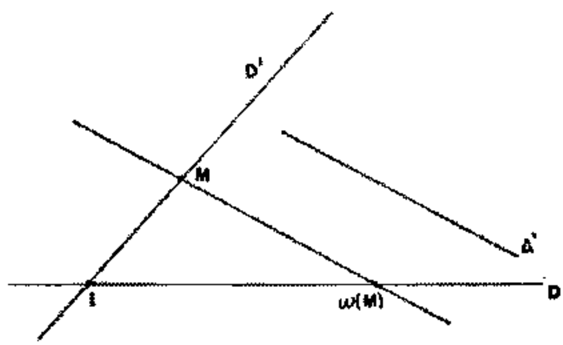
Démontrez que cette application *pr* est *surjective*, mais *non injective*.

En désignant par ω la restriction de *pr* à une droite D′ distincte de D et n'appartenant pas à la direction Δ, l'application :

$$\omega : \left| \begin{array}{l} \mathrm{D}' \to \mathrm{D} \\ \mathrm{M} \mapsto \omega(\mathrm{M}) \end{array} \right.$$

définit la projection de la droite D′ sur la droite D, parallèlement à Δ.

L'application ω est une bijection.



En déduire que deux droites quelconques sont *équipotentes*.

4. – La droite réelle.

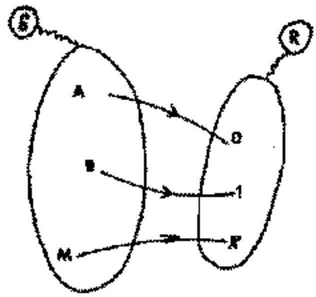
Désormais nous allons nous intéresser uniquement *au cas où les droites sont équipotentes* à $\mathbb{R}$ (ensemble des réels).

a) Définitions et notation.

Une *droite mathématique réelle* est déterminée par un *couple* (δ, *f*), δ étant une droite mathématique équipotente à $\mathbb{R}$ et *f* une bijection de δ vers $\mathbb{R}$.

f est une *graduation* de δ.

L'image par *f* du point M de *d* s'appelle l'*abscisse* de M pour la graduation *f*.



Si A est le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1, le couple (A, B) s'appelle *repère* de la graduation. A est l'*origine* de la graduation. M et P étant deux points de d, la notation $\overline{\mathrm{MP}}_f$ (qui se lit « M P barre pour f ») désigne le réel $f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{M})$:

$$\boxed{\overline{\mathrm{MP}}_f = f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{M})}$$

b) **Distance de deux points pour la graduation f.**

M et P étant deux points quelconques de δ d'abscisses respectives $f(\mathrm{M})$ et $f(\mathrm{P})$, on appelle *distance* de M à P le réel

$$|f(\mathrm{M}) - f(\mathrm{P})| \qquad \text{noté} \qquad d_f(\mathrm{M}, \mathrm{P})$$

On définit ainsi une application de $\delta \times \delta$ vers $\mathbb{R}^+$

$$d_f : \left| \begin{array}{l} \delta \times \delta \to \mathbb{R}^+ \\ (\mathrm{M}, \mathrm{P}) \mapsto d_f(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \end{array} \right.$$

Démontrez les propriétés : $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{A} = \mathrm{B}$

$$d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = d(\mathrm{B}, \mathrm{A})$$

$$d(\mathrm{A}, \mathrm{C}) + d(\mathrm{C}, \mathrm{B}) \geqslant d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$$

quels que soient les points A, B et C de la droite δ.

c) **Autres graduations de la droite réelle.**

f est une graduation de la droite δ.

En composant f avec une bijection quelconque de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on obtient une autre bijection de δ vers $\mathbb{R}$:

$$\delta \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{u} \mathbb{R}$$

$$\delta \xrightarrow{\quad u \circ f \quad} \mathbb{R}$$

Prenons comme bijection u une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ du type :

$u_1 : x \mapsto -x + b$

ou $u_2 : x \mapsto \quad x + b$ (b est un réel quelconque).

Démontrez que la distance sur δ pour f, pour $u_1 \circ f$, pour $u_2 \circ f$ est la même :

$$\forall_\delta \mathrm{M} \quad \forall_\delta \mathrm{P} \quad d_f(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = d_{u_1 \circ f}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = d_{u_2 \circ f}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$$

Exercice

Que devient la distance de deux points de la droite δ graduée par f si l'on choisit pour nouvelle graduation $s \circ f$ avec

$$s : \left| \begin{array}{l} \mathrm{R} \to \mathrm{R} \\ x \mapsto ax + b \end{array} \right. \qquad a \in \mathbb{R}^* - \{1, -1\}$$

d) **Définition.**

Nous appellerons *graduations de la droite réelle* δ toutes les bijections du type $u_1 \circ f$ ou $u_2 \circ f$. (f est l'une d'elles : pourquoi?)

5. — Milieu d'un couple de points.

A et B étant deux points de la droite δ graduée par f, on appelle *milieu* de (A, B), que l'on note $\mathrm{A} * \mathrm{B}$, le point de δ défini par :

$$f(\mathrm{A} * \mathrm{B}) = \frac{1}{2}(f(\mathrm{A}) + f(\mathrm{B}))$$

Démontrez que le milieu de (A, B) pour $u_1 \circ f$, pour $u_2 \circ f$ est le même que pour f.

Démontrez : $\mathrm{A} * \mathrm{B} = \mathrm{B} * \mathrm{A}$

$\mathrm{A} * \mathrm{A} = \mathrm{A}$

$\mathrm{A} * \mathrm{B} = \mathrm{A} * \mathrm{C} \longmapsto\!\!\dashv \mathrm{B} = \mathrm{C}$

6. — Ordres sur la droite. Segments et demi-droites.

On connait sur $\mathbb{R}$ deux relations d'ordre, notées $\geqslant$ et $\leqslant$; δ étant en bijection avec $\mathbb{R}$, nous pouvons « transférer » ces deux relations sur la droite δ :

a) A et B sont deux points de δ graduée par f.

• Si $f(\mathrm{A}) \leqslant f(\mathrm{B})$ on dit : « A précède B, pour f »

notation $\mathrm{A} \prec \mathrm{B}$ (pour f)

ou « B suit A, pour f »

$\mathrm{B} \succ \mathrm{A}$ (pour f)

• Démontrez que ces relations dans δ, notées $\prec$ et $\succ$, sont des relations d'ordre total.

Exercice. Soit $u_1 : x \mapsto -x + b$

$u_2 : x \mapsto x + b$

Si $A \prec B$ pour f, *démontrez que $A \prec B$ pour* $u_2 \circ f$ *et $B \prec A$ pour* $u_1 \circ f$.

b) Si $A \prec C \prec B$

ou $B \prec C \prec A$

on dit que le point C est « entre A et B ».

Démontrez que si C est entre A et B pour f, il en est de même pour toute autre graduation $u_1 \circ f$ ou $u_2 \circ f$ de δ.

c) **Segment** : A et B étant deux points de la droite δ, l'ensemble des points de δ entre A et B est un *segment fermé.* A et B sont les *points frontières* ou *extrémités* du segment.

Notations : AB ou BA ou [AB] ou [BA].

Démontrez : $M \in [AB] \longmapsto\!\!\!\dashv (f(M) - f(A)).(f(M) - f(B)) \leqslant 0$.

d) **Demi-droites** : A et B sont deux points distincts de δ.

On appelle *demi-droite de frontière* (ou d'*origine*) A, contenant B, l'ensemble des points M de δ, tels que

$$\overline{AM}_f . \overline{AB}_f \geqslant 0$$

c'est-à-dire $(f(M) - f(A)).(f(B) - f(A)) \geqslant 0$.

Démontrez que cette définition ne dépend pas de la graduation choisie sur δ.

e) **Axes** : On appelle *axe* un couple dont le premier terme est une droite δ et le second une graduation de cette droite.

Exemple : axe (δ, f)

axe $(\delta, u_2 \circ f)$ et axe $(\delta, u_1 \circ f)$.

Les axes (δ, f) et $(\delta, u_2 \circ f)$ sont dits de *même sens.*

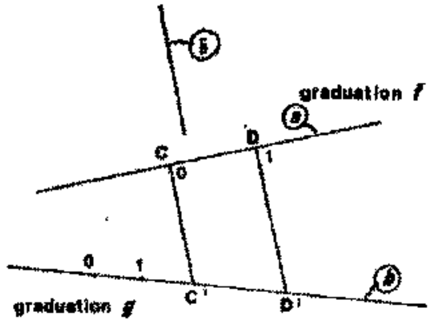
Les axes (δ, f) et $(\delta, u_1 \circ f)$ sont dits de *sens contraires.*

7. — Axiome de Thalès.

a) **Rapport de projection.** On considère :

• une direction quelconque Δ ($\delta \in \Delta$),

• un premier axe (a, f); la droite a n'est pas élément de Δ; le repère de la graduation f est (C, D),

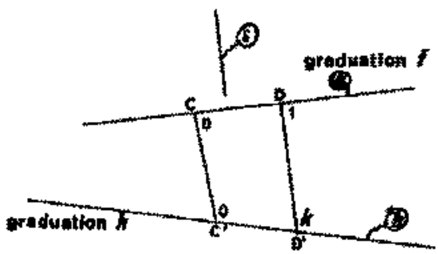


• un second axe (b, g); la droite b n'est pas élément de Δ,

• la projection parallèle de direction Δ, de la droite a, sur la droite b, notée pr,

• les points C' et D' projetés de C et D :

$$C' = pr(C) \qquad D' = pr(D).$$

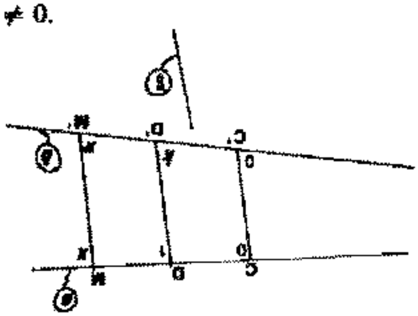


Il existe sur b une graduation h telle que $h(C') = 0$ et que les deux axes (b, g) et (b, h) soient de même sens (démontrez-le). Désignons par k l'abscisse de D' par h :

$$h(D') = k$$

k s'appelle *rapport de projection, pour la direction* Δ, *de l'axe* (a, f) *sur l'axe* (b, g).

Démontrez : $k \neq 0$.



b) Soit M un point quelconque de a, et x son abscisse pour f :

$$f(\mathrm{M}) = x$$

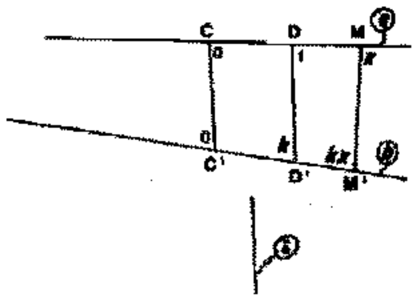
Soit M′ le projeté de M : $pr(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$.

Si on a choisi f et g n'importe comment, en général x' n'est pas égal à kx.

Désormais, on graduera les droites du plan de façon qye, quelles que soient la direction Δ et les droites a et b :

$$h(\mathrm{M}') = kx \text{ pour tout M de } a$$

On dit que les droites du plan sont graduées conformément à l'*axiome de Thalès.*



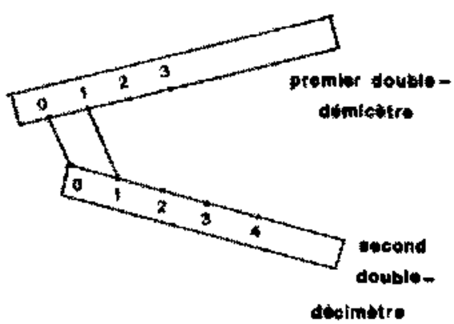
Dans ces conditions, si on connaît Δ, a, b, le rapport de projection k, et une graduation f sur a, l'axiome de Thalès est un outil pour retrouver une graduation h sur b (à partir de laquelle on peut retrouver toutes les graduations de b).

c) Raison du choix opéré par l'axiome de Thalès : un modèle concret des droites réelles est constitué par les doubles-décimètres.

Voici, extrait de Galion 4, des activités préparatoires proposées aux élèves *avant* l'introduction de l'axiome de Thalès.

① *Activités préparatoires*

Dans ce paragraphe ① tu feras non pas des mathématiques, mais du dessin.

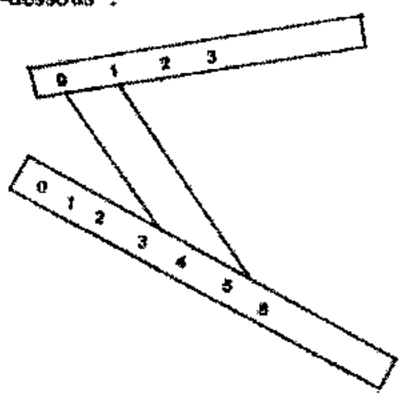


a) Sur une feuille de papier, pose deux doubles-décimètres de façon que les deux droites dessinées en rouge sur la figure ci-avant soient parallèles.

Par les traits marqués 2; 3; 0,5; 2,7 sur le premier double-décimètre, trace les droites parallèles aux deux droites rouges; en quels points coupent-elles le second double-décimètre? Écris tes réponses dans le tableau suivant :

1er double-décimètre. . . .	0	1	2	3	0,5	2,7	x
2e double-décimètre. . . .	0	2	..	..	..	..	..

b) Fais glisser sur lui-même le second double-décimètre de façon à réaliser la figure ci-dessous :



Complète :

1er double-décimètre. . . .	0	1	2	3	0,5	2,7	y
2e double-décimètre. . . .	3	5	..	..	..	..	..

c) Dessine la figure et complète le tableau dans le cas suivant :

1er double-décimètre	0	1	2,5	5,2	z
2e double-décimètre	0	1,3	..	..	..

d) Même question dans le cas suivant :

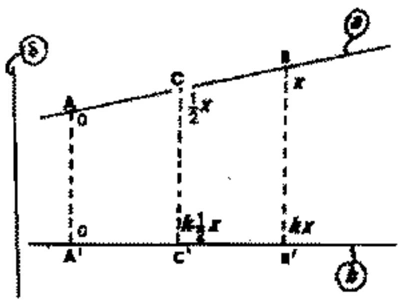
1er double-décimètre	0	1	3	7,8	t
2e double-décimètre	0	1	..	..	..

Est-il obligatoire que les deux doubles-décimètres soient parallèles?

b) **Projection et milieu.**

A et B sont deux points distincts de la droite a. C est le milieu de (A, B). On choisit A comme *origine* de la graduation f sur a.

B a pour abscisse x; le milieu C de (A, B) a pour abscisse $\frac{1}{2}(0+x)$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}x$.



Appelons A', B' et C' les projetés respectifs sur b, parallèlement à δ, des points A, B et C.

Choisissons A' comme *origine* pour une graduation g de b; si k est le *rapport de projection:*

$g(B') = kx$ et $g(C') = k.\left(\frac{1}{2}x\right)$ d'après l'axiome de Thalès.

Calculons l'abscisse du milieu de (A', B') :

$$\frac{1}{2}(g(A') + g(B')) = \frac{1}{2}(O + kx)$$
$$= g(C')$$

Le point C' est donc le milieu de (A', B').

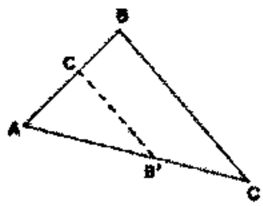
Le projeté du milieu d'un couple de points est le milieu du couple des projetés.

c) **Application au triangle.**

A, B et C sont trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$.
B′ est le milieu de (A, C); C′ est le milieu de (A, B).
Le projeté de C′ sur la droite AC parallèlement à BC est le milieu de (A, C) c'est-à-dire B′.

$$(C' = A * B \wedge B' = A * C) \vdash B'C' // BC$$

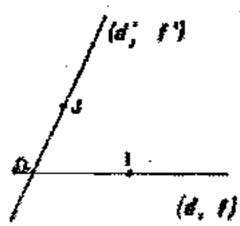
(propriété connue de la « droite des milieux »).



8. — Bijection de $\mathcal{P}$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) **Repère du plan $\mathcal{P}$.**

Soit un couple d'axes sécants en Ω.
Le premier axe (d, f) a pour repère (Ω, I).
Le second axe (d', f') a pour repère (Ω, J).
Les trois points Ω, I et J sont distincts et non alignés.
Le triplet (Ω, I, J) est un repère du plan $\mathcal{P}$.
Inversement, tout triplet de points distincts et non alignés peut être pris comme repère du plan.



b) **Bijection de $\mathcal{P}$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.**

(Ω, I, J) est un repère de $\mathcal{P}$.
M est un point quelconque de $\mathcal{P}$.
pr_1 désigne la projection sur d, parallèlement à d'.
pr_2 désigne la projection sur d′, parallèlement à d.

Le milieu de (A, B) a pour abscisse la demi-somme des abscisses de A et B, pour ordonnée la demi-somme des ordonnées de A et B.

$$A * B : \left(\frac{1}{2}(a + b), \frac{1}{2}(a', b')\right)$$

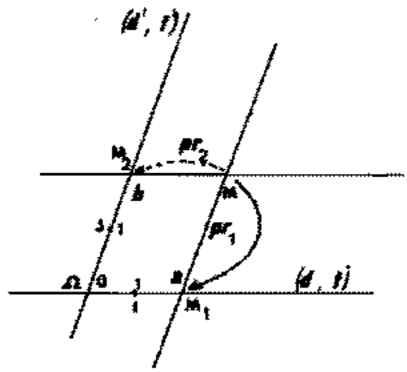
$\boxed{M \in \mathcal{T}}$

$\boxed{M_1 = pr_1(M)}$ $\boxed{M_2 = pr_2(M)}$

a est l'abscisse de M_1 pour (d, f)

b est l'abscisse de M_2 pour (d', f')

au point M de $\mathcal{T}$, on associe le couple (a, b) *de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



On définit ainsi une application φ de source $\mathcal{T}$, de but $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathcal{T} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ M \mapsto \varphi(M) = (a, b) \end{array} \right.$$

Réciproquement, à tout couple de réels (a, b), on peut associer un point M et un seul du plan P,

l'abscisse de $pr_1(M)$ sur d étant a,
l'abscisse de $pr_2(M)$ sur d' étant b.

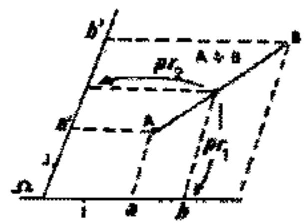
La relation réciproque de φ est une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers $\mathcal{T}$.

φ *est une bijection de* $\mathcal{T}$ *vers* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Pour le repère (Ω, I, J) :
a est l'*abscisse* du point M; b est son *ordonnée ;*
Le couple (a, b) s'appelle le couple des *coordonnées* du point M.

c) Coordonnées du milieu d'un couple de points.

A a pour coordonnées (a, a'),
B a pour coordonnées (b, b'), dans le repère (Ω, I, J).
$pr_1(A * B)$ est le milieu de $(pr_1(A); pr_1(B))$ (cf. : 7 *d*).
L'abscisse de $pr_1(A * B)$ est donc $\frac{1}{2}(a + b)$.
De même l'abscisse de $pr_2(A * B)$ est $\frac{1}{2}(a' + b')$.

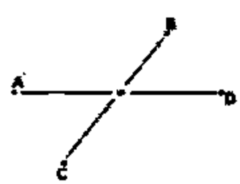


9. — Équipollence et translation.

a) Définition de l'équipollence.

C'est une relation dans $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$, définie de la façon suivante (elle est notée eq).

$$\boxed{(A, B) \text{ eq } (C, D) \text{ signifie } A * D = C * B}$$



b) Équipollence dans $\mathcal{P}$ muni d'un repère (Ω, I, J).

Voici quatre points et leurs couples de coordonnées :

$A(a, a')$, $B(b, b')$, $C(c, c')$ et $D(d, d')$

$$\begin{aligned}(A, B) \text{ eq } (C, D) &\longmapsto\!\dashv A * D = C * B \\ &\longmapsto\!\dashv \left(\frac{a+d}{2} = \frac{c+b}{2}\right) \wedge \left(\frac{a'+d'}{2} = \frac{c'+b'}{2}\right) \\ &\longmapsto\!\dashv (b - a = d - c) \wedge (b' - a' = d' - c')\end{aligned}$$

Conséquence : Transitivité de l'équipollence. Supposons :

$$(A, B) \text{ eq } (C, D) \quad \text{et} \quad (C, D) \text{ eq } (E, F)$$

ce qui entraîne, en utilisant les coordonnées des points ($E(e, e')$; $F(f, f')$) :

$$b - a = d - c \quad \text{et} \quad d - c = f - e, \quad \text{donc} \quad b - a = f - e$$

de même $b' - a' = d' - c'$ et $d' - c' = f' - e'$, donc $b' - a' = f' - e'$

il en résulte : (A, B) eq (E, F).

La relation d'équipollence dans $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ est réflexive, symétrique (démontrez-le), transitive; c'est donc une *relation d'équivalence*.

Remarque

$$(A, B) \text{ eq } (C, D) \wedge .(A, B) \text{ eq } (C, D') \vdash D = D'$$

En effet :

$$\begin{cases} A * D = C * B \\ A * D' = C * B \end{cases} \quad \text{donc} \quad A * D = A * D' \quad \text{donc} \quad D = D' \text{ (cf ⑤)}.$$

c) **Translation** : (A, B) est un couple donné de points.

En vertu de la remarque précédente, étant donné un point M, il existe un point M' et un seul tel que

$$(M, M') \text{ eq } (A, B)$$

Définition.

$t_{(A, B)}$ est l'*application* de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ qui au point M associe le point M' tel que $(M, M') \text{ eq } (A, B)$

Tout couple de points définit une translation unique.

Démontrez :

- $t_{(A, B)} : A \mapsto B$.
- la relation réciproque de $t_{(A, B)}$ est l'application $t_{(A, B)}$ (échange des moyens et des extrêmes dans l'équipollence, justifié par la définition à partir de la loi du milieu).

$t_{(A, B)}$ est une *bijection* de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$.

- $t_{(A, A)}$ est l'identité dans $\mathcal{P}$.
- $(A, B) \text{ eq } (C, D) \vdash\!\dashv t_{(A, B)} = t_{(C, D)}$ (utilisez la transitivité de l'équipollence).

Étude analytique d'une translation : Dans le repère (Ω, I, J), le point M a pour coordonnées (x, y), le point E a pour coordonnées (a, b).

Soit la translation $t_{(\Omega, E)}$

$$t_{(\Omega, E)} : M \mapsto M'$$
$$(x, y) \qquad (x', y')$$

Démontrez : $(x' = x + a) \wedge (y' = y + b)$.

d) Groupe des translations.

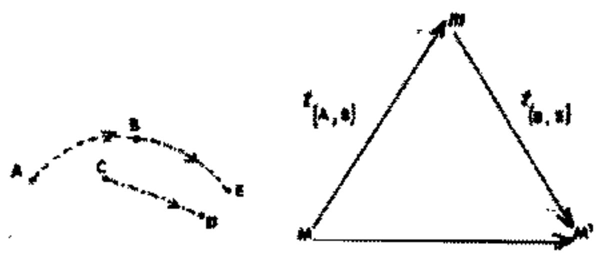
Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations.

α) $t_{(A,B)}$ et $t_{(C,D)}$ sont deux translations. Soit E *le* point tel que

$$(B, E) \text{ eq } (C, D) : t_{(C,D)} = t_{(B,E)}$$

Soit M un point quelconque du plan.

$t_{(A,B)}$: $M \mapsto m$ donc (M, m) eq (A, B) donc (M, A) eq (m, B).
$t_{(B,E)}$: $m \mapsto M'$ donc (m, M') eq (B, E) donc (m, B) eq (M', E).

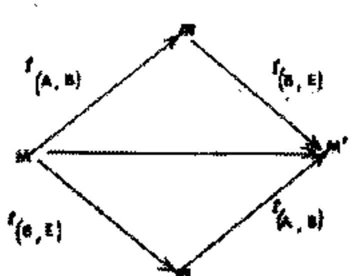


Il en résulte : (M, A) eq (M', E)
ou encore (M, M') eq (A, E).

Nous avons démontré : $t_{(B,E)} \circ t_{(A,B)} = t_{(A,E)}$.
La composée de deux translations est une translation.

e) $(\mathcal{T}, \circ)$ est un groupe commutatif.

— Associativité : pensez à la composition des applications.
— Élément neutre : $t_{(A,A)}$.
— Translation réciproque : $t^{-1}_{(A,B)} = t_{(B,A)}$;
$t_{(A,B)}$ et $t_{(B,A)}$ sont symétriques pour la loi de composition notée.
— Commutativité : démontrez-la.



10. — Vecteurs.

a) La relation d'équipollence est une relation d'équivalence dans $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$: chaque classe d'équivalence est appelée ***vecteur géométrique.***

Notation : un vecteur peut être noté $\vec{u}$.

Si (A, B) est élément de la classe $\vec{u}$, le vecteur $\vec{u}$ peut être aussi noté $\overrightarrow{AB}$.

$$(A, B) \text{ eq } (C, D) \longmapsto \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Tout couple, élément de la classe $\vec{u}$, est un *représentant* de ce vecteur. Le vecteur de représentant (A, A) est noté $\vec{0}$, et appelé quelquefois vecteur nul.

b) **Remarque** : $\overrightarrow{AB} = \{(X, Y); \mathcal{T} \times \mathcal{T}; (X, Y) \text{ eq } (A, B)\}$

$$\overrightarrow{AB} = \{(X, Y); \mathcal{T} \times \mathcal{T}; t_{(A, B)}(X) = Y\}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le *graphe* de la translation $t_{(A, B)}$ dans $\mathcal{T}$.

Désormais $t_{(A, B)}$ peut être noté $t_{\overrightarrow{AB}}$, ou $t_{\vec{u}}$ si $(A, B) \in \vec{u}$.

c) **Bijection de l'ensemble $\mathcal{T}$ des translations vers l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs.**

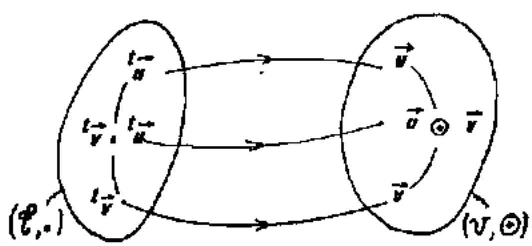
A toute translation $t_{(A, B)}$, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$;

A tout vecteur $\vec{u}$, on associe la translation $t_{\vec{u}}$ de graphe $\vec{u}$.

$(\mathcal{T}, \circ)$ est un ***groupe commutatif.***

f est la bijection de $\mathcal{T}$ vers $\mathcal{V}$ définie ci-dessus; définissons dans $\mathcal{V}$ *la* loi de composition notée $\oplus$, induite de la loi $\circ$ dans $\mathcal{T}$ par *f*. Cette loi $\oplus$ est l'addition dans $\mathcal{V}$.

L'addition dans $\mathcal{V}$ n'est qu'une autre façon de rendre compte de la composition des translations.

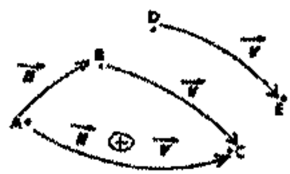


$(\mathcal{V}, \oplus)$ est un ***groupe commutatif.***

Pratiquement, comment trouver un représentant de la somme $\vec{u} \oplus \vec{v}$ si l'on connaît un représentant (A, B) de $\vec{u}$ et un représentant (D, E) de $\vec{v}$?

On construit C tel que (B, C) est équipollent à (D, E).

$\boxed{\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$ (égalité de Chasles)



$\overrightarrow{AB}$ est l'*opposé* de $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Différence dans $\mathcal{V}$: c'est une loi de composition dans $\mathcal{V}$, notée $\ominus$ définie par

$$\vec{u} \ominus \vec{v} = \vec{u} \oplus \text{opp}(\vec{v})$$

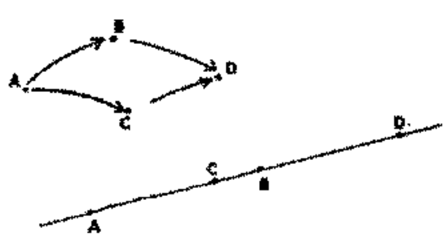
opp($\vec{v}$) désignant l'opposé de $\vec{v}$; on le note aussi ($-\vec{v}$).

11. — Parallélogramme.

a) Les formules suivantes sont logiquement équivalentes :

$$(A, B) \text{ eq } (C, D)$$
$$A * D = C * B$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$
$$t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{CD}}$$

On traduit encore cette situation en disant que le quadruplet (A, B, D, C) est un *parallélogramme*.



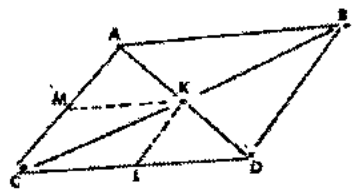
(La seconde figure représente un parallélogramme *aplati*.)
Il peut aussi se désigner par (B, D, C, A); (B, A, C, D), etc.
Il ne peut pas être désigné par (A, B, C, D), ni par (B, C, A, D)...

Dans le cas d'un parallélogramme non aplati, les droites AD et BC sont appelées *diagonales* du parallélogramme; leur intersection, milieu commun des couples (B, C) et (A, D), est le *centre* du parallélogramme.

b) (A, B, D, C) est un parallélogramme non aplati de centre K.
Soit L le milieu de (C, D), M le milieu de (A, C).
Démontrez (voir ⑦ *e*) que :

KL//AC et KL//BD donc AC//BD
de même : AB//CD.

Les côtés d'un parallélogramme sont parallèles deux à deux.



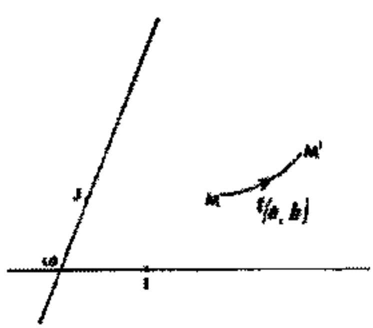
12. — Composantes d'un vecteur.

a) Le plan est muni du repère (ω, I, J).
Les droites ωI et ωJ ne sont pas parallèles.
$t_{(A, B)}$ est la translation définie par

$$M \mapsto M'$$
$$(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$$

On a vu (n° 10) qu'à toute translation est associé un vecteur unique.
Si $\vec{u}$ est le vecteur associé à $t_{(A, B)}$, on dit que (a, b) est le *couple des composantes* du vecteur $\vec{u}$.

Notation : $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



M(x, y) a pour image M$'(x', y')$:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \longmapsto \begin{cases} a = x' - x \\ b = y' - y \end{cases}$$

$$\boxed{\text{M}(x, y);\ \text{M}'(x', y').\ \text{Composantes de } \overrightarrow{\text{MM}'} : \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}}$$

b) Si $\vec{u}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

et si $\vec{v}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

trouver les composantes de $\vec{u} \oplus \vec{v}$, de $\vec{u} \ominus \vec{v}$, de $\vec{v} \ominus \vec{u}$.

c) Quelles sont les composantes du vecteur 0?

13. — Produit d'un vecteur par un réel.

a) $\alpha \in \mathbf{R}$
$\vec{u} \in \mathcal{V}$

$\vec{u}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Au couple $(\alpha, \vec{u})$ on associe le vecteur $\vec{v}$, de composantes $\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$.

On définit ainsi une application de $\mathbf{R} \times \mathcal{V}$ vers $\mathcal{V}$.

Notation : $\boxed{\vec{v} = \alpha\vec{u}}$

Cette application définit une loi externe dans $\mathcal{V}$.

b) *Démontrez les propriétés suivantes :*

$\forall_R \alpha,\ \forall_R \beta,\ \forall_{\mathcal{V}} \vec{u},\ \forall_{\mathcal{V}} \vec{v}$: $\quad 1\,\vec{u} = \vec{u}$ (1)

$$(\alpha + \beta)\,\vec{u} = (\alpha\vec{u}) \oplus (\beta\vec{u}) \qquad (2)$$

$$\alpha(\vec{u} \oplus \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \oplus (\alpha\vec{v}) \qquad (3)$$

$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\,\vec{u} \qquad (4)$$

$$0\,\vec{u} = \vec{0} \qquad (5)$$

$$(-1)\,\vec{u} = \text{opp}(\vec{u}) \qquad (6)$$

$$\alpha\vec{0} = \vec{0} \qquad (7)$$

Remarques pédagogiques : Noter les signes $+$ et $\oplus$ dans la propriété : $(\alpha + \beta)\,\vec{u} = (\alpha\vec{u}) \oplus (\beta\vec{u})$.

• $(\alpha\vec{u}) \oplus (\beta\vec{u})$ sera souvent noté $\alpha\vec{u} \oplus \beta\vec{u}$ en accordant priorité à la multiplication par un réel sur l'addition dans $\mathcal{V}$.

• De même $(\alpha\beta)\,\vec{u}$ s'écrira souvent $\alpha\beta\,\vec{u}$.

c) $(\mathcal{V}, \oplus)$ *est un groupe commutatif.*

La loi externe définie dans $\mathcal{V}$ a les propriétés (1) (2) (3) (4) ci-dessus. On reconnaît ici que $\mathcal{V}$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est *un vectoriel sur le corps* $\mathbb{R}$.

Vous savez d'ailleurs que les propriétés (5) (6) (7) sont des conséquences des axiomes du vectoriel.

d) La définition du produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un réel α donnée en *a*) présente l'inconvénient de ne pas être « intrinsèque », c'est-à-dire de dépendre, en apparence du moins, du choix d'un repère du plan.

1) Voici une définition intrinsèque, à l'usage du maître, mais qui nous semble trop délicate pour un élève du premier cycle :

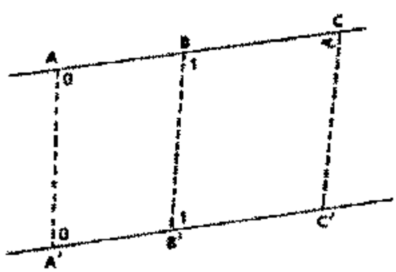
α) Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, soit (A, B) un représentant de $\vec{u}$; $A \neq B$. Pour la graduation de repère (A, B) sur la droite AB, α est l'abscisse d'un point C.

Soit (A', B') un autre représentant de $\vec{u}$, et C' le point de la droite A'B' d'abscisse α pour la graduation de repère (A', B'). Supposons que les droites AB et A'B' sont distinctes.

$$(A, B) \text{ eq } (A', B')$$

donc $$(A, A') \text{ eq } (B, B')$$

donc $$AA' // BB'.$$



Le projeté de C sur la droite A'B' parallèlement à AA' est, d'après l'axiome de Thalès, le point de la droite A'B' d'abscisse α (le rapport de projection est égal à 1), c'est-à-dire C'.

Donc $$CC' // AA'$$

Et comme AC // A'C', (A, C, C', A') est un parallélogramme, donc

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}.$$

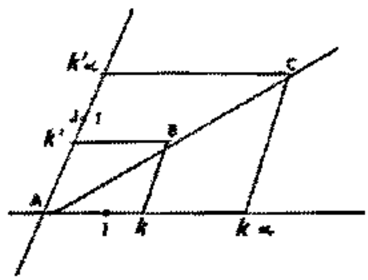
Il en est de même pour toute paire de représentants de $\vec{u}$ (même portés par une même droite : pourquoi ?).

Par définition, $\alpha\vec{u}$ est la classe d'équipollence de (A, C), (A', C')...

β) Si $\vec{u} = \vec{0}$, par définition $\alpha\vec{0} = \vec{0}$.

2) On peut alors traduire cette nouvelle définition dans un repère (A, I, J) quelconque du plan :

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les composantes de $\vec{u}$. Les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ sont (x, y). Si k est le rapport de projection de l'axe de repère (A, B) sur l'axe de repère (A, I) parallèlement à AJ, et k' le rapport de projection de l'axe



de repère (A, B) sur l'axe de repère (A, J) parallèlement à AI, les coordonnées de B sont (k, k') et celles du point C de la droite AB d'abscisse α pour le repère (A, B) sont $(k\alpha, k'\alpha)$.

Donc : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} k \\ k' \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} k\alpha \\ k'\alpha \end{pmatrix}$

On retombe sur la définition donnée en *a*).

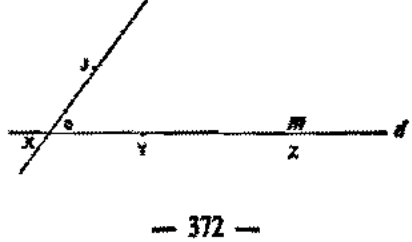
14.

X et Y sont deux points *distincts* de $\mathcal{P}$.

Choisissons (X, Y, J) comme repère du plan $\mathcal{P}$ (XY et XJ sont deux droites sécantes en X).

a) Soit Z le point de la droite XY d'abscisse m.

$$\overrightarrow{XZ} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = m\,\overrightarrow{XY}.$$



Donc :

Si Z est un point de la droite XY, il existe un réel m tel que :

$$\overrightarrow{XZ} = m\,\overrightarrow{XY}$$

Quels sont les points qui correspondent à $m = 1$, à $m = 0$, à $m = \frac{1}{2}$?

b) Soit T un point tel que :

$$\overrightarrow{XT} = \alpha\overrightarrow{XY}$$

α étant un réel.

$\overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{XT} = \begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}$, donc les coordonnées du point T sont : $(\alpha, 0)$. Donc T est un point de la droite XY. Donc : si $\overrightarrow{XT} = \alpha\overrightarrow{XY}$, T est un point de la droite XY et α est l'abscisse de T pour la graduation du repère (X, Y).

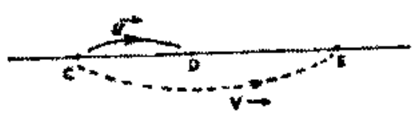
c) Soit $\vec{u}$ un vecteur différent de $\vec{0}$, (A, B) et (C, D) deux représentants de $\vec{u}$:

(A, B) eq (C, D), donc les droites AB et CD sont parallèles.

La direction commune aux droites AB et CD s'appelle la ***direction de $\vec{u}$.***

Soit deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{v} = m\,\vec{u}$ (m est un réel non nul); soit E le point tel que (C, E) est un représentant de $\vec{v}$;

$$\overrightarrow{CE} = m\,\overrightarrow{CD}$$



Donc E est un point de la droite CD.

Donc AB et CE sont des droites parallèles.

Donc les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $m\,\vec{u}$ ont ***même direction.***

d) Soit deux vecteurs non nuls $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$; Ω un point du plan; (Ω, A) est un représentant de $\vec{\imath}$, (Ω, B) un représentant de $\vec{\jmath}$.

Si les droites ΩA et ΩB sont sécantes en Ω, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ n'ont pas même direction; (Ω, A, B) peut être pris pour repère du plan $\mathcal{P}$.

Soit un vecteur $\vec{w}$ quelconque.

Pour le repère (Ω, A, B), le couple des composantes de $\vec{w}$ est (x, y).
le couple des composantes de $\vec{\imath}$ est $(1, 0)$.
le couple des composantes de $\vec{\jmath}$ est $(0, 1)$.

Donc :

$$\boxed{\vec{w} = x\,\vec{\imath} \oplus y\,\vec{\jmath}}$$

15. — Barycentre.

Soit n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$
et n réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Cherchons s'il existe un point G du plan tel que :

$$(1) \qquad \alpha_1 \overrightarrow{GA_1} \oplus \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} \oplus \ldots \oplus \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = 0$$

$$\overrightarrow{GA_2} = \overrightarrow{GA_1} \oplus \overrightarrow{A_1A_2} \ldots \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{GA_1} \oplus \overrightarrow{A_1A_n}$$

Donc (1) s'écrit :

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \overrightarrow{GA_1} \oplus \alpha_2\overrightarrow{A_1A_2} \oplus \ldots \oplus \alpha_n\overrightarrow{A_1A_n} = 0$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$:

$$\overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} (\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2} \oplus \ldots \oplus \alpha_n\overrightarrow{A_1A_n})$$

Donc il existe un point et un seul répondant à la question. Il s'appelle *barycentre* des couples (A_1, α_1), (A_2, α_2), ... (A_n, α_n).

Le programme ne comporte que des exercices sur le barycentre. Voici une fiche extraite de Galion 4e :

① A et B sont deux points distincts de $\mathcal{T}$.

a) Quel est le point M de $\mathcal{T}$ tel que :

$$1\,\overrightarrow{MA} \oplus 1\,\overrightarrow{MB} = \vec{\theta}?$$

On dit aussi que M est le barycentre de (A, 1) et (B, 1).

b) Démontrer qu'il existe un point N de $\mathcal{T}$ tel que :

$$1\,\overrightarrow{NA} \oplus 2\,\overrightarrow{NB} = \vec{\theta}$$

Pour cela, remplace $\overrightarrow{NB}$ par $\overrightarrow{NA} \oplus \overrightarrow{AB}$, puis trouve le réel r tel que :

$$\overrightarrow{NA} = r\,\overrightarrow{AB}$$

On dit que N est le barycentre de (A, 1) et (B, 2). N est un point de la droite AB.

Construis-le sachant que (A, B) est le repère de la droite AB.

c) Démontre qu'il n'existe pas de point P de $\mathcal{T}$ tel que :

$$1\,\overrightarrow{PA} \oplus (-1)\,\overrightarrow{PB} = \vec{\theta}$$

Le barycentre de (A, 1) et (B, —1) n'existe pas.

d) Détermine le point Q tel que :

$$4\,\overrightarrow{QA} \oplus (-5)\,\overrightarrow{QB} = \vec{0}$$

Utilise une méthode analogue à celle du paragraphe *b*).

Q est le barycentre de (A, 4) et (B, —5). C'est un point de la droite AB; construis-le.

e) Démontre qu'il n'existe pas de point S de $\mathcal{T}$ tel que :

$$\frac{1}{3}\,\overrightarrow{SA} \oplus \left(-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{SB} = \vec{0}$$

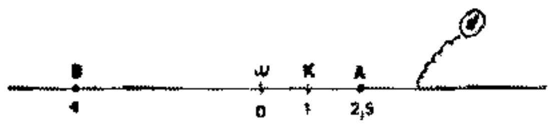
f) *d* est graduée par *f*; le repère est (ω, K).

L'abscisse de A est 2,5;

L'abscisse de B est (—4).

Trouve l'abscisse du point N de la droite *d* tel que :

$$2\,\overrightarrow{NA} \oplus 3\,\overrightarrow{NB} = \vec{0}$$



② A, B et C sont trois points distincts de $\mathcal{T}$.

Tu vas chercher s'il existe un point G de $\mathcal{T}$ tel que :

$$\overrightarrow{GA} \oplus \overrightarrow{GB} \oplus \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

a) M est un point quelconque de $\mathcal{T}$.

Tu peux écrire :

$$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GM} \oplus \overrightarrow{MA}$$
$$\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GM} \oplus \overrightarrow{MB}$$
$$\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GM} \oplus \overrightarrow{MC}$$

Justifie :

$$\boxed{\overrightarrow{GA} \oplus \overrightarrow{GB} \oplus \overrightarrow{GC} = \vec{0}} \rightleftarrows \boxed{(\overrightarrow{GM} \oplus \overrightarrow{MA}) \oplus (\overrightarrow{GM} \oplus \overrightarrow{MB}) \oplus (\overrightarrow{GM} \oplus \overrightarrow{MC}) = \vec{0}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{3.\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} \oplus \overrightarrow{MB} \oplus \overrightarrow{MC}} \rightleftarrows \boxed{3.\overrightarrow{GM} \oplus (\overrightarrow{MA} \oplus \overrightarrow{MB} \oplus \overrightarrow{MC}) = \vec{0}}$$

Cette dernière égalité prouve qu'il existe un point G et un seul. Pourquoi?

> Quels que soient les points A, B et C de $\mathcal{P}$, il existe un point G et un seul de $\mathcal{P}$ tel que :
>
> $$\overrightarrow{GA} \oplus \overrightarrow{GB} \oplus \overrightarrow{GC} = \vec{\theta}$$

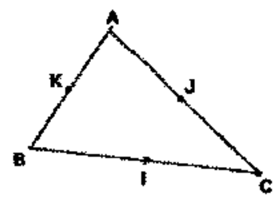
b) Puisque M est quelconque, remplaçons-le par I, milieu de (B, C).

$$3.\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA} \oplus \overrightarrow{IB} \oplus \overrightarrow{IC}$$

Puisque $\overrightarrow{IB} \oplus \overrightarrow{IC} = \vec{\theta}$,

tu obtiens : $$3.\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA}$$

Le point G est donc *un point de la droite AI.*



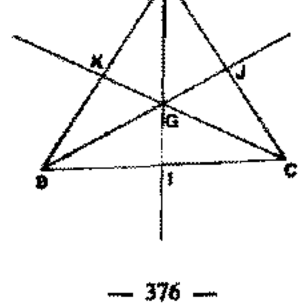
c) J étant le milieu de (A, C) et K le milieu de (A, B) démontre que G est aussi un point de la droite BJ et un point de la droite CK.

• Si les points A, B et C ne sont pas alignés la droite qui joint l'un des points au milieu du couple formé par les deux autres est une médiane de (A, B, C).

Les trois médianes de (A, B, C) ont en commun ce point G.

Ce point est appelé centre de gravité de (A, B, C).

On dit aussi : G est le barycentre de (A, 1), (B, 1) et (C, 1).

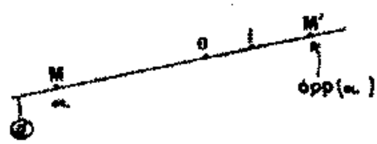


16. — Symétrie centrale.

a) Choisissons un point O du plan $\mathcal{P}$.
Nous allons définir une application de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$.
Soit un point M quelconque de $\mathcal{P}$.

α) Si $M = O$
quel est le point M' de $\mathcal{P}$ tel que O soit le milieu de (M, M')?

β) Si $M \neq O$
appelons d la droite OM.



Si α est l'abscisse de M pour une graduation de repère (O, I), il existe sur d un seul point M' d'abscisse $opp(\alpha)$: O est le milieu de (M, M').

Donc, quel que soit le point M de $\mathcal{P}$, *il existe un point* M' de $\mathcal{P}$, *et un seul*, tel que O soit milieu de (M, M').

b) Définition.

> O est un point du plan $\mathcal{P}$.
> L'application de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ qui, à M, associe M' tel que O soit le milieu de (M, M') est appelée symétrie-centrale autour de O et est notée S^0.
>
> S_0 : $\left| \begin{array}{l} \mathcal{P} \to \mathcal{P} \\ M \mapsto M' \end{array} \right.$ ce qui signifie :
>
> O *est le milieu de* (M, M')
>
> $S_0(M) = M'$

Le point M' est le *symétrique de M autour de O*.

c) Propriétés élémentaires.

Démontrez les propriétés suivantes :

- Le point O est invariant par S_0.
- Le point commun aux diagonales d'un parallélogramme est centre de symétrie pour ce parallélogramme.

• Tout point d'une droite d a pour image un point d'une droite d', parallèle à d, et réciproquement tout point de d' est image d'un point de d.

(Examinez deux cas : $O \in d$, $O \notin d$).

On dit que l'image d'une droite d *par une symétrie centrale est une droite parallèle à* d.

• La symétrie centrale S_0 est égale à la relation réciproque : on dit que S_0 est involutive.

Les expérimentateurs de Boulogne-sur-Mer nous proposent un plan d'étude original de la géométrie. Ils étudient directement les translations dans le plan sans faire la géométrie sur la droite, et l'introduction préalable des réels n'est plus nécessaire. Pour rendre ce plan plus conforme aux programmes de Quatrième, il suffit de remplacer dans la cinquième partie les rationnels par les décimaux.

I. — Géométrie sur un quadrillage.

PAUWELS,
Boulogne-sur-Mer.

Translation associée à un élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(Emploiera-t-on également le mot « vecteur » pour désigner une translation ?)

La translation qui fait passer de A à B est notée $\overrightarrow{AB}$

(On met ainsi l'accent sur l'aspect dynamique de la notion de vecteur).

Groupe des translations.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des translations, la translation « $\vec{u}$ suivie de $\vec{v}$ » sera notée $\vec{u} \oplus \vec{v}$.

D'où la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

(Cette façon d'introduire l'addition vectorielle est peut-être plus naturelle que la manière traditionnelle).

Exercices utilisant la relation de Chasles.

Mise en évidence de propriétés invariantes par le groupe des translations (constatations expérimentales mais aussi quelques démonstrations).

Symétries point. Produit de deux symétries.

(Tenter la démonstration utilisant la relation de Chasles.)

Décomposition d'un vecteur suivant une base. Repérage de points.

Remarques (sur l'intérêt du chapitre précédent).

Dès le début de la géométrie, l'élève est familiarisé avec la technique vectorielle. Si l'aspect « manipulations », « dessins » est toujours présent l'élève commence à faire de véritables démonstrations.

Étude (très sommaire) d'un groupe de transformations.

Mise en place d'un groupe opérant fidèlement et transitivement sur un ensemble : ce qui prépare la définition générale d'un espace affine.

II. — Géométrie plane.

On dégagera le modèle mathématique et les « axiomes » à partir du dessin géométrique; dessin géométrique utilisant la fausse équerre et la règle non graduée. Il importera, à l'issue de toute démonstration, de revenir à une vérification graphique (l'enfant part du réel pour revenir au réel mais enrichi).

Dessin géométrique.	**Modèle mathématique.**
① *Point-droite.*	① *a)* Le plan est un ensemble (infini?) dont les éléments sont appelés points.
• Tracé d'une droite passant par deux points.	
• Utilisation de la fausse équerre pour tracer des parallèles. →	*b)* Les droites sont des sous-ensembles du plan tels que :
• Parallèle à une droite donnée passant par un point donné.	— une droite est une partie propre du plan;
	— une droite contient au moins deux points;
	— par deux points distincts passe une droite et une seule.
	c) Postulat d'Euclide.
	Exploitation de 1.
	— Position relative de deux droites.
• Exercices de tracé.	— Parallélisme.
• Vérification graphique des résultats démontrés. ←	— Directions de droites.
	— projection de direction donnée.

② ***Définition de la translation $\overrightarrow{AB}$.***

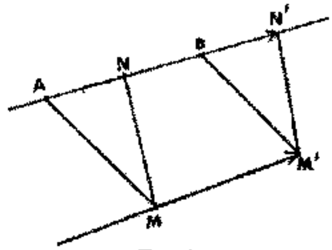


FIG. 1.

$$\overrightarrow{AB} : C \mapsto D$$

Comparaison des translations

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD}$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des translations « $\vec{u}$ suivie de $\vec{v}$ » ($\vec{u} \oplus \vec{v}$) est une translation.

Comparaison de $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{v} + \vec{u}$.

Vérification par le dessin.

Interprétation graphique (construction).

Vérification par le dessin.

② On admettra que :

La donnée d'un bi-point (A, B) détermine une bijection du plan sur lui-même qu'on appelle translation $\overrightarrow{AB}$ (ou vecteur $\overrightarrow{AB}$?).

On admettra que :

a) Si la translation $\vec{u}$ transforme C en D alors : $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$.

b) La composée de deux translation.

(Ceci entraine Chasles :

$$\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}).$$

c) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des translations alors $\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{v} \oplus \vec{u}$.

Exploitation de 2.

Le groupe ($\mathcal{T}$, $\oplus$) des translations

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

Différence de deux translations.

Résolution de $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$.

Équipollence de bi-points (A, B) équipollent à C, D) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, c'est une relation d'équivalence.

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, les droites AB et CD sont parallèles. La direction de ces droites est alors dite direction de la translation $\overrightarrow{AB}$.

Une translation transforme un bi-point en un bi-point équipollent.

Une translation transforme une droite en une droite parallèle.

③ ***Construction d'une règle telle que :***

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} \ldots$

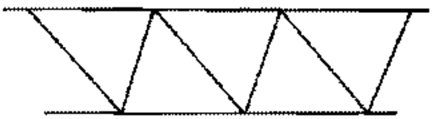


FIG. 2.

③

Définition de $n\vec{u}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $\vec{u} \in \mathcal{T}$).

$\vec{u}$ étant une translation, construction du transformé d'un point par : → ***Le $\mathbb{Z}$-module des translations***

$\underbrace{\vec{u} \oplus \vec{u} \ldots \oplus \vec{u}}_{n \text{ termes}}$.

(Les translations forment un « espace vectoriel » sur $\mathbb{Z}$.)

Par définition même du transformé d'un point par la translation u, les translations u et $n.u$ ont même direction.

Si $\overrightarrow{AA_1} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AA_2} = 2.\vec{u}$

Vérification par le dessin. ← $\overrightarrow{AB_1} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AB_2} = 2.\vec{v}$

Alors $\overrightarrow{A_2B_2} = 2.\overrightarrow{A_1B_1} = 2(\vec{v} - \vec{u})$.

Soient 4 points A, B, B_1, A_2 tels que

- $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{B_1B_2}$.
- les droites B_2A, B_2A_2 ne sont pas parallèles.

Vérification par le dessin. ← Alors la parallèle à A_2B_2 menée par B_1 coupe la droite AA_2 en un point A_1 tel que : $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1A_2}$.

Définition du milieu d'un bi-point

Le milieu du bi-point (A, B) est le point I tel que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

1re construction du milieu dun bi-point. ← *a*) La proposition précédente montre que I existe et en permet la construction.

2e construction du milieu d'un bi-point. ← *b*) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ (A, D) et (B, C) ont même milieu.

Remarque. — On admettra que si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $n > \vec{0}$ alors $n.\vec{u} \neq 0$ (l'unicité du milieu d'un bi-point en résulte).

④

Construction de transformés de points par symétrie. ←

Vérification par le dessin. ←

⑤

Construction de $\vec{v} = \frac{1}{n}\vec{u}$. ←

Construction de $r.\vec{u}$.

Construction.

④ **Symétries point.**

I étant un point donné la symétrie par rapport à I est la transformation

$$S_I : M \mapsto M'$$

telle que

$$\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM'} = 0$$

Propriétés des symétries.

Composée de deux symétries.

Groupe des translations-symétries point.

⑤ On admet que :

$$\left.\begin{array}{r} n.\vec{u} = \vec{0} \\ \vec{u} \neq \vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow n = 0.$$

Conséquence :

$$\left.\begin{array}{c} n\,\vec{u} = m.\vec{u} \\ (m \text{ et } n \in \mathbb{Z}) \\ \vec{u} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m = n$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $\vec{u}$ est une translation il existe $\vec{v}$ unique tel que $\vec{u} = n.\vec{v}$ on note $\vec{v} = \frac{1}{n}.\vec{u}$.

(La démonstration est analogue à celle du § 3 où l'on démontre l'existence du milieu.)

Définition de $r.\vec{u}$ où $r \in \mathbb{Q}$.

Les translations forment un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

Barycentre d'un bi-point.

Théorème de Thalès.

Après introduction des réels.

Nous admettrons que :

Il existe une application : $\mathbb{R} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$

$$(\lambda, \vec{u}) \mapsto \lambda.\vec{u}.$$

qui prolonge celle que l'on connaît déjà pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ et telle que :

— Les translations forment un espace vectoriel réel.

— L'application $\lambda \mapsto M$ telle que $\overrightarrow{AM} = \lambda . \overrightarrow{AB}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur la droite AB.

Pour terminer on traitera : bases, repères.

Axiomatisation de la droite (revue de quelques structures possibles)

F. Colmez,
I.R.E.M. Paris.

A. — Quelques généralités.

Pour comprendre les liens et les différences entre les rédactions successives du programme de Quatrième, il est utile de ne pas perdre de vue les faits mathématiques suivants.

I. — Transport de structure.

Soient E et F deux ensembles; supposons qu'il existe une bijection de E sur F, suivant le diagramme :

$$E \xrightarrow{f} F$$

Soit également φ une permutation de F (bijection de F sur lui-même).

$$F \xrightarrow{\varphi} F$$

On peut associer f et φ de deux manières différentes :

(i) En composant f et φ on obtient une nouvelle bijection de E sur F.

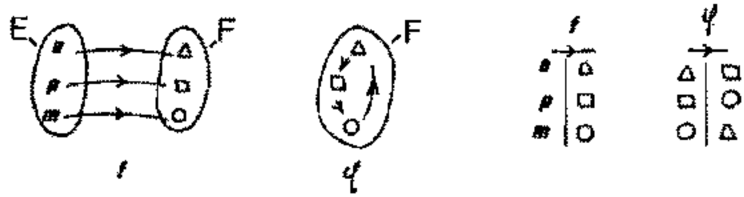
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & F \arrow[r, "\varphi"] & F \end{tikzcd} \qquad g = \varphi \circ f$$

(*ii*) On peut « transporter » φ sur F à l'aide de f (le terme exact est : transmuer). On obtient alors une permutation Ψ de E suivant le diagramme

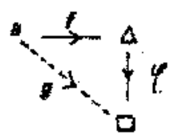
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Psi"'] & F \arrow[d, "\varphi"] \\ E & F \arrow[l, "f^{-1}"'] \end{tikzcd} \qquad \Psi = f^{-1} \circ \varphi \circ f$$

Illustrons ceci par l'exemple très simple suivant :

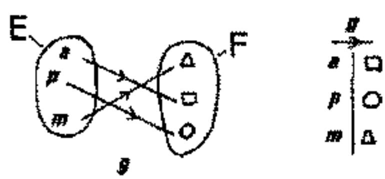
E = { *a*, *p*, *m* } F = { Δ, □, ○ }



• *le procédé* (i) conduit au schéma suivant pour la détermination de l'image de *a* par l'application *g*



et on a :



• *le procédé* (ii) conduit au schéma suivant pour la détermination de l'image de *a* par l'application Ψ :

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\Psi"'] & \Delta \arrow[d, "\varphi"] \\ p & \square \arrow[l, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

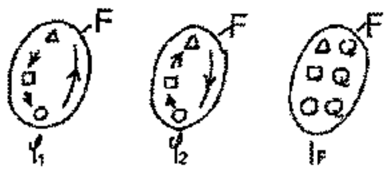
et on a :

ψ	
a	p
p	m
m	a

Soit maintenant donnée sur F non plus une seule permutation, mais une famille $\mathcal{G}$ de permutations formant un sous-groupe du groupe de toutes les permutations de F.

En appliquant le procédé (*i*) on obtient une famille $\mathcal{F}$ de bijections de E sur F; en appliquant le procédé (*ii*) on obtient un ensemble $\mathcal{H}$ de permutations de E.

Complétons l'exemple précédent en choisissant $\mathcal{G} = \{\varphi_1, \varphi_2, I_F\}$ avec :

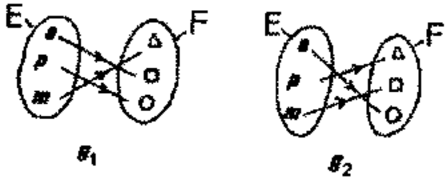


φ_1		φ_2		I_F	
Δ	□	Δ	○	Δ	Δ
□	○	□	Δ	□	□
○	Δ	○	□	○	○

$\mathcal{G}$ est bien un groupe; on peut le constater aisément sur la table.

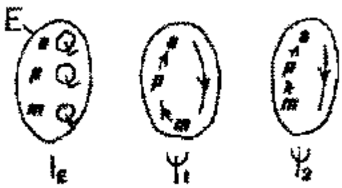
$\circ$	I_F	φ_1	φ_2
I_F	I_F	φ_1	φ_2
φ_1	φ_1	φ_2	I_F
φ_2	φ_2	I_F	φ_1

$\mathcal{F} = \{f, g_1, g_2\}$ avec $f = I_E \circ f$; $g_1 = \varphi_1 \circ f$; $g_2 = \varphi_2 \circ f$.



g_1		g_2	
a	□	a	○
p	○	p	Δ
m	Δ	m	□

$\mathcal{H} = \{I_E, \Psi_1, \Psi_2\}$ avec $I_E = f^{-1} \circ I_E \circ f$; $\Psi_1 = f^{-1} \circ \varphi_1 \circ f$; $\Psi_2 = f^{-1} \circ \varphi_2 \circ f$



I_E	
a	a
p	p
m	m

Ψ_1	
a	p
p	m
m	a

Ψ_2	
a	m
p	a
m	p

Étudions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ (dans le cas général).

1° $\mathcal{H}$ ***est un sous-groupe*** du groupe de toutes les permutations de E. En effet :

a) Si φ_1 et $\varphi_2 \in \mathcal{G}$ en posant $\Psi_1 = f^{-1} \circ \varphi_1 \circ f$ et $\Psi_2 = f^{-1} \circ \varphi_2 \circ f$ on a $\Psi_1 \circ \Psi_2 = f^{-1} \circ \varphi_1 \circ f \circ f^{-1} \circ \varphi_2 \circ f = f^{-1} \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ f$.

$\Psi_1 \circ \Psi_2$ est un élément de $\mathcal{H}$ puisque $\varphi_1 \circ \varphi_2$ est un élément de $\mathcal{G}$.

b) $I_E = f^{-1} \circ I_F \circ f$. I_E est l'élément neutre.

c) $f^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ f$ est l'inverse de $\Psi = f^{-1} \circ \varphi \circ f$.

De plus l'application $\widehat{f} : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ définie par $\widehat{f}(\varphi) = f^{-1} \circ \varphi \circ f$ est un homomorphisme bijectif de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}$; autrement dit $\mathcal{H}$ est isomorphe à $\mathcal{G}$.

Le lecteur est invité, s'il le désire, à vérifier cet isomorphisme dans l'exemple précédent en comparant les tables de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{H}$.

2° ***La famille*** $\mathcal{F}$ a été construite par le procédé (*i*) à partir de f et du groupe $\mathcal{G}$.

$$\mathcal{F} = \{\varphi \circ f ;\ \varphi \in \mathcal{G}\}$$

Soit g un élément quelconque de $\mathcal{F}$.

l'ensemble $\mathcal{F}' = \{\varphi \circ g ;\ \varphi \in \mathcal{G}\}$ obtenu à partir de g et $\mathcal{G}$ par le procédé (*i*) est égal à $\mathcal{F}$.

En effet, puisque $g \in \mathcal{F}$, il existe un élément φ_1 de $\mathcal{G}$ tel que $g = \varphi_1 \circ f$. Soit alors $\varphi \circ g$ un élément quelconque de $\mathcal{F}'$; on peut écrire : $\varphi \circ g = \varphi \circ \varphi_1 \circ f$ et comme $\varphi \circ \varphi_1$ est un élément de $\mathcal{G}$, $\varphi \circ g$ est bien un élément de $\mathcal{F}$. Autrement dit $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. En permutant dans la démonstration précédente les rôles de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, on obtient : $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. On a bien : $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Remarquons aussi que puisque $\mathcal{F} = \{g ;\ g = \varphi \circ f,\ \varphi \in \mathcal{G}\}$ on a :

$$\boxed{\mathcal{G} = \{\varphi = g \circ f^{-1} ;\ g \in \mathcal{F}\}}$$

On peut donc reconstituer l'ensemble des deux familles de bijections $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ si on connaît :

Soit la famille $\mathcal{F}$.

Soit la famille $\mathcal{G}$ et un élément de la famille $\mathcal{F}$.

3° *Le groupe $\mathcal{K}$ ne dépend pas de l'élément f* choisi dans la famille $\mathcal{F}$ pour le construire.

En effet : soit g un autre élément de la famille $\mathcal{F}$; il existe φ_1 dans $\mathcal{G}$ tel que $g = \varphi_1 \circ f$ et $f = \varphi_1^{-1} \circ g$. Si $\Psi = f^{-1} \circ \varphi \circ f$ on peut écrire :

$$\Psi = g^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1} \circ g$$

où $\varphi_1 \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1}$ est un élément de $\mathcal{G}$, de même si $\Psi' = g^{-1} \circ \varphi \circ g$ on a : $\Psi' = f^{-1} \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_1 \circ f$ où $\varphi_1^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_1 \in \mathcal{G}$.

Comme nous l'avons déjà vu les deux applications de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{K}$, $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$, définies respectivement par $\widehat{f}(\varphi) = f^{-1} \circ \varphi \circ f$ et $\widehat{g}(\varphi) = g^{-1} \circ \varphi \circ g$ sont des isomorphismes de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{K}$. Dans le cas où le groupe $\mathcal{G}$ est commutatif, $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ sont égaux (car on a alors $\varphi_1^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_1 = \varphi = \varphi_1 \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1}$) (c'est le cas dans l'exemple donné).

4° *Si on considère également la famille $\mathcal{F}^{-1}$* $= \{f^{-1} ;\ f \in \mathcal{G}\}$ de bijections de F sur E on rétablit la symétrie entre les deux ensembles E et F si bien que finalement on dispose de :

— un groupe de permutations de E : $\mathcal{K}$,
— un groupe de permutations de F : $\mathcal{G}$,
— une famille de bijections de E sur F : $\mathcal{F}$,
— une famille de bijections de F sur E : $\mathcal{F}^{-1}$.

On peut reconstituer le tout à partir des données suivantes : Soit *a*) $\mathcal{F}$ *b*) $\mathcal{F}^{-1}$ *c*) $\mathcal{G}$ et un élément quelconque de $\mathcal{F}$ *d*) $\mathcal{G}$ et un élément quelconque de $\mathcal{F}^{-1}$ *e*) $\mathcal{K}$ et un élément quelconque de $\mathcal{F}$ *f*) $\mathcal{K}$ et un élément quelconque de $\mathcal{F}^{-1}$

II. — Application à un processus de mathématisation.

1° *Ce qu'on peut entendre par mathématiser.*

Désignons par S une situation (manipulation, dessin, etc.) que nous avons déjà commencée à étudier; supposons que pour pouvoir parler de cette situation, par exemple communiquer à autrui ou noter pour nous-même des renseignements à propos de cette situation, nous ayons élaboré un schéma de type ensembliste dans lequel certaines manipulations sont traduites par des permutations d'un ensemble E formant un groupe $\mathcal{K}$.

Nous sommes un peu dans la position d'un botaniste qui vient de cueillir une fleur dont il distingue au premier abord certaines caractéristiques, ce qui lui donne des éléments de classement (notre schéma E, $\mathcal{K}$); il va essayer d'identifier la fleur dans une flore en utilisant ces renseignements clairement formulés, mais aussi d'autres renseignements incomplètement formulés.

Abandonnons les fleurs pour revenir à nos moutons, c'est-à-dire à S, E et $\mathcal{K}$. Comme le botaniste, pour des raisons encore incomplètement formulées, nous avons l'intuition que parmi un certain nombre de structures mathématiques que nous connaissons (notre flore) l'ensemble F et le groupe $\mathcal{G}$ doivent convenir comme modèle. Notre intuition peut être guidée par des considérations telles que les suivantes :

a) Dans la situation il y a autre chose que ce que nous avons déjà schématisé.

b) De même F est muni d'une structure plus riche que celle définie par $\mathcal{G}$ (par exemple un sur-groupe de $\mathcal{G}$), et nous soupçonnons un lien entre ces deux faits.

c) Nous espérons bien que la structure de F va nous permettre de compléter le schéma.

Il nous reste à faire la comparaison entre le schéma et le modèle, c'est-à-dire trouver un élément de la famille $\mathcal{F}$ de bijections de E sur F (que nous ne connaissons pas encore) permettant de mettre en évidence l'isomorphisme de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{K}$.

2° *Axiomatisation.*

a) *Le but de l'axiomatisation*, ici, est une fois le travail exploratoire suffisamment avancé, de dire comment on transporte la structure du modèle au schéma en donnant un petit nombre de propriétés dont les autres pourront se déduire.

Rappelons que la structure du modèle est définie par le groupe $\mathcal{G}$ de permutations de F.

Nous pouvons procéder des *deux manières différentes* suivantes :

(*i*) Distinguer au départ une bijection de E sur F et dire comment se construit la famille $\mathcal{F}$.

(*ii*) Donner d'un seul coup toute la famille $\mathcal{F}$ et dire comment on passe d'un élément de $\mathcal{F}$ à un autre.

Nous obtenons alors deux *types de définition axiomatique :*

α) Première définition correspondant au procédé (*i*) :

On appelle bidule à roulettes un ensemble E (dont les éléments sont appelés roulettes) muni d'une bijection f de E sur F et de toutes celles g qui s'en déduisent de la manière suivante :

φ étant un élément du groupe $\mathcal{G}$ de permutations de F on a :

$$g = \varphi \circ f$$

La famille $\mathcal{F}$ des bijections g s'appelle une structure de carrosserie du bidule à roulettes.

β) Deuxième définition correspondant au procédé (*ii*) :

Un ensemble E dont les éléments sont des roulettes est appelé bidule à roulettes si on a :

Données : Une famille $\mathcal{F}$ de bijections de E sur F.

Axiome : Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{F}$ $g \circ f^{-1}$ est une permutation de F qui est élément de $\mathcal{G}$.

La famille $\mathcal{F}$ s'appelle une structure de carrosserie du bidule à roulettes.

b) *Remarques :*

α) Ces deux axiomatiques sont équivalentes dans ce sens que toutes les deux permettent la construction complète de $\mathcal{H}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$.

β) L'axiomatique (α) fait jouer un rôle privilégié à *une* bijection particulière de E sur F, suivant en cela le procédé de recherche exploratoire; il faut alors montrer que la structure définie de la même façon à partir d'un autre élément de $\mathcal{F}$ est bien la même. Ce souci n'existe pas dans l'axiomatique (β), on dit qu'elle est *intrinsèque*.

γ) Soit E' un deuxième bidule à roulettes muni d'une structure de carrosserie $\mathcal{F}'$; choisissons un élément dans chacun des ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, soient f et f'; posons $h = f'^{-1} \circ f$, h est une bijection de E sur E' et l'application $g' \mapsto g' \circ h$ est une bijection de $\mathcal{F}'$ sur $\mathcal{F}$; h *définit un isomorphisme* pour la structure de carrosserie du bidule à roulettes (E, $\mathcal{F}$) sur le bidule à roulettes (E', F').

La structure de carrosserie est *univalente,* mais on peut définir *a priori* plusieurs isomorphismes puisque f et f' peuvent être choisies arbitrairement. Il n'y a pas d'isomorphisme privilégié (ou canonique).

δ) F lui-même peut être considéré comme un bidule à roulettes muni d'une structure de carrosserie; il suffit dans la définition de prendre E = F et $f = I_F$, on a alors $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

c) Dans le cas d'une *structure univalente*, les mathématiciens utilisent souvent le *procédé d'identification ;* cela consiste à dire que, tant qu'on se borne à utiliser la structure donnée, on n'a pas besoin de s'occuper de l'objet précis qui supporte cette structure, que par suite tous les objets supportant cette structure sont considérés comme indiscernables et portent le même nom. Cette convention a pour avantage une *économie de pensée*, mais pour inconvénient une légère déformation de la réalité mathématique ; en particulier ici si $E = F$ $\mathcal{F}$ est un groupe alors qu'il ne l'est pas si $E \neq F$.

C'est dans cette optique que l'on dit quelquefois que $\mathbb{R}$ est une droite réelle.

Nous allons maintenant montrer comment ce qui précède permet d'expliquer les variations de rédaction d'un projet à l'autre du programme de Quatrième.

B. — La droite.

On peut entendre sous ce nom différentes structures plus ou moins riches et la définition axiomatique qu'on en donnera dépendra évidemment des manipulations faites et par suite du schéma ensembliste construit. D'une manière précise dans le schéma le choix portera essentiellement sur le groupe $\mathcal{K}$; il s'en suit que dans la définition axiomatique le choix portera sur $\mathcal{G}$.

I. — Structure euclidienne.

1° Manipulation.

a) *Les bandes graduées ou échelles :* Ce sont des bandes de papier sur lesquelles sont tracées des traits transversaux. Ces échelles sont *équivalentes :* il est possible de les placer deux à deux le long l'une de l'autre de manière que chaque trait de l'une soit en face d'un trait de l'autre et réciproquement. On peut indifféremment utiliser l'une ou l'autre de ces échelles.

Chaque échelle est régulière physiquement au sens suivant. Plaçons cette échelle le long d'une ligne ; sur cette ligne traçons deux repères α et β en face de deux traits a et b de l'échelle choisis arbitrairement ; si après un glissement arbitraire de la bande de papier le long de la ligne on a placé un trait a_1 de l'échelle en face de α, alors il y a un trait b_1 en face de β, et de plus le nombre de traits entre a et b est le même qu'entre a_1 et b_1.

b) *Une ligne* étant tracée, on transporte sur celle-ci la structure commune des échelles, c'est-à-dire qu'après avoir placé une bande de papier graduée le long de la ligne on trace sur celle-ci un repère en face de chaque trait de l'échelle. On constate en effet que, quelle que soit l'échelle utilisée, si on la place le long de la ligne de manière à mettre un repère de la ligne en face d'un trait de l'échelle, alors chaque trait de l'échelle se trouve en face d'un repère de la ligne et réciproquement (sauf éventuellement près des extrémités). Ceci est vrai en particulier si on s'est contenté de changer la position de la première échelle par glissement le long de la ligne.

c) *Affinement des échelles:* Soit p un entier naturel ($p \geqslant 2$). En partant d'une bande de papier gradué on dessine une échelle p fois plus fine en traçant $p - 1$ traits entre deux traits consécutifs de l'échelle donnée de manière à obtenir une nouvelle échelle régulière.

On peut dire qu'on a obtenu un affinement par p de l'échelle, en partageant en p chaque interstice. Si on réitère l'opération on obtient un affinement par p^2; on dira plutôt un affinement d'ordre 2 par p. Si p n'est pas trop grand (en particulier si $p = 2$) on obtient des affinements d'ordre 4, 5 ou 6. On est limité par l'épaisseur des traits.

d) *Comparaison des affinements:* Deux échelles équivalentes donnent par affinement de même ordre par p deux nouvelles échelles équivalentes. Au contraire, deux affinements par p et q d'ordres quelconques ne donnent pas d'échelles équivalentes, si p et q sont deux naturels premiers entre eux. Plus précisément si on dispose les deux échelles, l'une le long de l'autre en mettant deux à deux face à face les traits initiaux, les nouveaux traits ne sont jamais face à face.

e) *On peut reporter les affinements sur la ligne* en prenant soin de conserver les repères initiaux (correspondant aux échelles non affinées).

2° *Schématisation.*

Nous voulons donner un schéma ensembliste de la ligne qui permette de rendre compte des manipulations précédentes (report de graduations, régularité des graduations, glissement des bandes graduées, affinement des échelles, etc.).

Soit donc E un ensemble représentant la ligne L.

a) Pour pouvoir rendre compte du fait que si on considère trois repères, il y en a *un qui se trouve entre les deux autres*, nous allons munir E d'un ordre total (noté $\prec$) de telle façon que si a, b et c désignant ces trois repères, b se trouve entre a et c nous ayons soit $a \prec b \prec c$ soit $c \prec b \prec a$. En fait l'ordre inverse ferait aussi bien l'affaire et nous n'avons pas à choisir entre les deux pour le moment.

b) Le fait qu'on puisse *reporter toutes les graduations* qu'on veut conduit à supposer qu'entre deux éléments distincts on peut toujours en trouver un troisième; autrement dit :

$$\forall a \forall b \ (a \prec b \text{ et } a \neq b) \Rightarrow \exists c \ (a \prec c \prec b \text{ et } a \neq c \text{ et } b \neq c)$$

c) Le *glissement d'une bande graduée* le long de la ligne permet d'établir une correspondance terme à terme entre les repères, au repère qui se trouve en face d'un certain trait dans la première position on associe le repère qui se trouve en face du même trait dans la seconde position. La traduction ensembliste sera une bijection de E sur lui-même conservant l'un et l'autre des deux ordres; ceci nous oblige en fait à idéaliser notre ligne de façon qu'elle n'ait plus d'extrémités et à supposer que *E n'ait ni premier ni dernier élément* (pour l'un ou l'autre ordre).

d) Les différents glissements de la même bande de papier se traduisent par un *groupe de permutations de E* (chacune conservant l'ordre).

e) Notons $\mathcal{H}_1$ le groupe associé à la graduation initiale et H_p^k le groupe associé à l'affinement d'ordre k par p. $\mathcal{H}_1$ est un sous-groupe de H_p^k quels que soient p et k; plus généralement H_p^k est un sous-groupe de $H_p^{k'}$ si $k < k'$. Par contre si p et q sont premiers entre eux $H_p^k \cap H_q^{k'} = \mathcal{H}_1$.

f) Tous les groupes précédents sont commutatifs et sont évidemment tous des sous-groupes du groupe de toutes les permutations de E (qui lui n'est pas commutatif).

Fixons p et posons $\mathcal{H}_p = \bigcap\limits_{k \geqslant 1} H_p^k$ c'est encore un groupe commutatif (*).

Par contre la réunion de $\mathcal{H}_p$ et $\mathcal{H}_q$ $(p \neq q)$ n'est en général pas un groupe et il n'y a pas de raison *a priori* pour que le groupe engendré par cette réunion soit commutatif.

g) En fait pour le moment notre position n'est pas très brillante; rien ne nous garantit que tout ce que nous exigeons de notre schéma soit possible. Nous avons cependant le droit de *tirer les conséquences de ces exigences*. Nous espérons ainsi aboutir *soit à une contradiction*, soit à des résultats nous rappelant quelque chose de connu et qui nous permettront de *trouver un modèle*.

Nous sommes un peu dans la position du botaniste qui ayant une fleur essaie d'imaginer le fruit parce que dans sa flore seuls les fruits sont dessinés. Nous allons chercher notre fruit.

3° *Axiomatisation.*

a) Si sur E *parmi tous les groupes envisagés* nous ne retenons que le groupe $\mathcal{H}_p$ nous pouvons penser comme modèle à l'ensemble V_p des nombres à virgule dans le système de numération à base p. ($\mathbb{D}$, ensemble des décimaux, si $p = 10$) muni du groupe $\mathcal{T}_p$ dont les éléments sont les permutations de la forme $x \mapsto x + a$ $(a \in V_p)$.

b) *Soient* p *et* q *deux entiers premiers entre eux*. $(E, \mathcal{H}_p)$ a pour modèle $(V_p, \mathcal{T}p)$ et $(E, \mathcal{H}_q)$ a pour modèle $(V_q, \mathcal{T}_q)$. Ces deux modèles rendent chacun compte d'une partie du schéma, mais ils sont incompatibles car $V_p \neq V_q$

(*) $\mathcal{H}_p$ est une partie du groupe de toutes les permutations de F et on a : si $\varphi \in \mathcal{H}_p$ $\exists k \in N$, $\varphi \in H_p^k$; donc $\varphi^{-1} \in H_p^k$ et $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}_p$ si φ et ψ sont éléments de $\mathcal{H}_p$ on a $\varphi \in H_p^k$ et $\psi \in H_p^{k'}$ avec par exemple $k < k'$ et alors comme $H_p^k \subset H_p^{k'}$ φ, $\psi \in H_p^{k'}$ donc φ, $\psi \in \mathcal{H}_p$ et de plus $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ puisque $H_p^{k'}$ est commutatif.

(en fait $V_p \cap V_q = \mathbb{Z}$) et sur V_p on ne peut pas construire de groupe isomorphe à $\mathcal{H}_q$ de même que sur V_q on ne peut pas construire de groupe isomorphe à $\mathcal{H}_p$.

Si donc on veut rendre compte de l'existence des deux groupes $\mathcal{H}_p$ et $\mathcal{H}_q$ à la fois, il faut trouver un ensemble plus « riche » que V_p et V_q (*).

c) *Nous connaissons un tel ensemble :* $\mathbb{R}$ (ensemble des réels).

Notons φ_a la permutation de $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x + a$.

L'ensemble $\{\varphi_a;\ a \in \mathbb{R}\}$ est un groupe commutatif; notons le $\mathcal{G}$. Soit p un entier naturel; particularisons a en ne retenant que les nombres de la forme $a = zp^{-k}$ (où $z \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$); les φ_a correspondants forment un sous-groupe de $\mathcal{G}$; notons le $\mathcal{G}_p$: il a les propriétés que nous exigeons de $\mathcal{H}_p$ (et pourra lui être isomorphe).

L'intersection de tous les sous-groupes $\mathcal{G}_p$ est $\{\varphi_a;\ a \in \mathbb{Z}\}$; notons ce groupe $\mathcal{G}_1$.

d) *Nous pouvons maintenant axiomatiser ;* c'est-à-dire que nous allons remplacer notre brouillon de schéma précédent par un schéma propre construit en nous appuyant sur certaines propriétés de $\mathbb{R}$. Il nous faudra vérifier que ce schéma correspond bien à nos exigences. Remarquons cependant que si la correspondance entre notre modèle et notre schéma est mathématique, il n'en est pas de même entre la situation et le schéma, et la réponse à la question de savoir si tout ce qui est mis dans le schéma correspond à la situation n'est pas du domaine des mathématiques.

e) *Conformément à ce qui a été dit dans A* nous donnerons les deux définitions suivantes.

α) Première définition correspondant au procédé (*i*) :

On appelle droite (**) un ensemble E, dont les éléments sont appelés points muni d'une bijection f *de F sur* $\mathbb{R}$ *et de toutes celles* g *qui s'en déduisent de la manière suivante : il existe un réel* a (*dépendant de* g) *tel que pour tout point M de F on ait :* $g(M) = f(M) + a$.

β) Deuxième définition correspondant au procédé (*ii*) :

Un ensemble E dont les éléments sont appelés points est une droite si on a :

Données. *Une famille* $\mathcal{F}$ *de bijections de E sur* $\mathbb{R}$.

Axiome. *Si* f *et* g *sont deux éléments de* $\mathcal{F}$ *il existe* $a \in \mathbb{R}$ (*dépendant de* f *et* g) *tel que pour tout point M de E on ait :*

$$g(M) = f(M) + a$$

(*) En fait bien souvent l'ensemble D suffit au physicien.

(**) Il faut noter qu'il ne s'agit pas encore de la droite euclidienne, mais d'une structure moins riche ainsi qu'il est expliqué dans ce qui suit.

4° Remarques sur ces définitions.

a) *La première définition fait jouer un rôle particulier à la bijection* f *de E sur $\mathbb{R}$.* Représentons cette bijection (ou plus exactement la bijection réciproque f^{-1}) en utilisant la notation indicielle, c'est-à-dire en notant M_a le point de E dont l'image par f est a ($f(M_a) = a$ ou $f^{-1}(a) = M_a$).

Ceci correspond sur le dessin à une *graduation numérique* obtenue en numérotant les repères tracés sur une ligne L.

Il faut cependant noter que :

α) Généralement on ne dessine d'abord ainsi que les traits correspondant aux entiers relatifs (de petite valeur absolue car la ligne est limitée).

β) Dans les dessins on ne note pas toujours M_a mais a tout simplement, ce qui revient plus ou moins à assimiler :

— la ligne graduée L,

— le schéma ensembliste de cette ligne L,

— $\mathbb{R}$.

Si comme on l'a vu (A, II, 2, *b*) l'assimilation entre $\mathbb{R}$ et E est à la rigueur acceptable, elle est cependant loin de clarifier les choses. Par contre des assimilations entre L qui est une réalité physique et $\mathbb{R}$ ou E qui sont des êtres mathématiques est totalement abusive. En particulier même si la graduation n'est pas régulière physiquement, rien n'empêchera la régularité du modèle décrite à l'aide des groupes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$; simplement l'*adéquation* du modèle mathématique à la situation physique ne sera plus.

Répétons encore une fois avec A. Revuz :

> « Il n'est pas possible de trouver une axiomatique de la droite empêchant un fil de caoutchouc d'être élastique. »

γ) Le dessin est un support à l'intuition et permet de fixer les idées. Mais il ne faudrait pas qu'il devienne un carcan et qu'en particulier le fait d'avoir choisi une bijection particulière de E sur $\mathbb{R}$ (def. (α)) empêche de penser aux autres éléments de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire de *changer d'origine*. La définition (β) qui ne privilégie aucun élément de $\mathcal{F}$ conduit à les considérer toutes à la fois; elle n'empêche pas, au contraire, pour résoudre un problème donné d'utiliser un élément g de $\mathcal{F}$, puisqu'il est loisible de choisir celui qui simplifiera le plus la question (et qui n'a aucune raison d'être f).

b) *Ordre et distance :*

α) $\mathbb{R}$ est un ensemble totalement ordonné. Si g est une bijection de E sur $\mathbb{R}$, élément de $\mathcal{F}$, on peut à l'aide de g transporter sur E l'ordre de $\mathbb{R}$ en posant $P \prec Q$ si $g(P) \leqslant g(Q)$. L'ordre ainsi défini sur E ne dépend pas de g ; ceci résulte de ce que toutes les permutations φ_a de $\mathbb{R}$ sont croissantes. C'est donc en fait la *donnée de $\mathcal{F}$ qui permet de définir un ordre sur E.*

Nous sommes maintenant en présence d'un ordre total sur E; or dans nos exigences sur le schéma nous avions dit ne pas vouloir distinguer entre un ordre et son inverse; *notre schéma n'est pas encore conforme* et nous allons devoir le modifier; pour cela nous serons guidés par les remarques suivantes :

β) Au cours de la description de la régularité physique des échelles (B, I, 1° *a*) nous avons remarqué que le nombre d'interstices entre les traits de l'échelle placés en face de deux repères était le même pour les deux positions de l'échelle. Traduisons cette constatation dans le schéma. Soient P et Q deux points de E; supposons par exemple $P \prec Q$; les deux positions de la graduation numérique se traduisent par deux bijections g_1 et g_2 de E sur $\mathbb{R}$ éléments de $\mathcal{F}$ et les nombres d'interstices sont respectivement $g_1(Q) - g_1(P)$ et $g_2(Q) - g_2(P)$. On a bien égalité puisqu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout M de E on ait $g_2(M) = g_1(M) + a$.

γ) *Sur* $\mathbb{R}$ *il existe une distance* (*) *canonique* définie par $(x, y) \mapsto |x - y|$. Si $f \in \mathcal{F}$ on peut poser $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$; on obtient ainsi une *distance sur E* et le fait que chaque φ_a soit une isométrie sur $\mathbb{R}$ permet d'affirmer que *les éléments de* $\mathcal{K}$ *sont des isométries* (**) *sur E*, et encore que $|g(P) - g(Q)| = |f(P) - f(Q)|$ quel que soit l'élément g de $\mathcal{F}$ (en réalité du fait que toutes les applications sont croissantes on a même l'égalité plus précise $g(P) - g(Q) = f(P) - f(Q)$). Ceci revient à dire que la distance définie sur E l'est à partir de n'importe quel élément de $\mathcal{F}$.

δ) Il est facile de vérifier que *toutes les isométries de* $\mathbb{R}$ sont de la forme φ_a $x \mapsto x + a$ ou Ψ_b : $x \mapsto -x + b$.

Les φ_a sont des applications croissantes (conservant l'ordre).

Les Ψ_b sont des applications décroissantes (renversant l'ordre).

Si bien que le groupe $\mathcal{J}$ des isométries de $\mathbb{R}$ n'est plus associé à l'ordre canonique de $\mathbb{R}$ mais au couple des deux ordres : l'ordre canonique et son inverse.

ε) Nous tenons donc la solution de notre problème : il suffit de remplacer dans ce qui précède le groupe $\mathcal{G}$ de permutations de $\mathbb{R}$ par *le groupe* $\mathcal{J}$ *des isométries* (***) pour ne plus pouvoir choisir entre les deux ordres inverses l'un de l'autre sur E.

(*) On dit qu'une application δ de A × A dans $\mathbb{R}^+$ est une distance sur A si on a :

i) $\forall x \, \forall y \qquad \delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $\forall x \, \forall y \qquad \delta(x, y) = \delta(y, x)$

iii) $\forall x \, \forall y \, \forall z \qquad \delta(x, y) \leqslant \delta(x, z) + \delta(z, y)$ (inégalité triangulaire).

La distance euclidienne dans le plan vérifie ces axiomes et a donné naissance au concept.

(**) Une isométrie sur A est une application de A dans A qui conserve la distance; autrement dit $h : A \to A$ est une isométrie si

$$(\forall x \, \forall y \;\; \delta(h(x), h(y)) = \delta(x, y)$$

(***) Il convient de remarquer que le groupe $\mathcal{J}$ n'est pas commutatif.

Au point de vue de la manipulation, si $f : E \mapsto I\!R$ correspond à une certaine position d'une échelle le long de L, l'application $g = \Psi_b \circ f$ correspond à la position obtenue après un retournement de l'échelle et non un glissement, si bien qu'en parcourant l'échelle toujours dans le même sens on parcourt maintenant la ligne dans l'autre sens.

5° *Structure euclidienne.*

Nous allons maintenant la définir axiomatiquement; elle permet de dégager la notion de *distance* (d'où son nom). Comme plus haut nous aurons deux définitions.

(α) Première définition correspondant au procédé (*i*) :

On appelle droite euclidienne un ensemble E, dont les éléments sont appelés points, muni d'une bijection f *de E sur* $I\!R$ *et de toutes celles* g *qui s'en déduisent de la manière suivante :*

- *Soit il existe* $a \in I\!R$ *tel que pour tout point on ait* $g(M) = f(M) + a$.
- *Soit il existe* $b \in I\!R$ *tel que pour tout point on ait* $g(M) = -f(M) + b$.

(β) Deuxième définition correspondant au procédé (*ii*) :

Un ensemble E dont les éléments sont appelés points est une droite euclidienne si on a :

Donnée : *Une famille* $\mathcal{E}$ *de bijection de E sur* $I\!R$.

Axiome : *Si* f *et* g *sont deux éléments de* $\mathcal{E}$ *on a :*

- *Soit il existe* $a \in I\!R$ *tel que pour tout point on ait* $g(M) = f(M) + a$.
- *Soit il existe* $b \in I\!R$ *tel que pour tout point on ait* $g(M) = -f(M) + b$.

Remarques :

a) La première définition est celle qui figure dans l'annexe du programme de Quatrième.

b) Comme il a été dit en (A, II, 2°, *b*, δ) on peut canoniquement munir $I\!R$ d'une structure de droite euclidienne.

II. — Droite affine.

La structure euclidienne nous a permis de rendre compte des manipulations suivantes sur la ligne : *changement d'origine* et *changement de sens*. En affinant les échelles nous avons procédé également à un troisième changement : *le changement d'unité.* C'est la structure affine qui va nous permettre d'en rendre compte.

1° *Manipulation.*

Soient α et β deux repères sur la ligne L; en utilisant l'échelle initiale nous comptons n interstices entre α et β; si nous utilisons un affinement d'ordre 1 par p nous comptons $n.p$ interstices. Ceci veut dire que si a et b sont les nombres correspondant à α et β dans la première graduation numérique et a_1 et b_1 les nombres correspondant dans la deuxième graduation numérique on a :

- Soit $b_1 - a_1 = p(b - a)$ si les graduations sont de même sens.
- Soit $a_1 - b_1 = p(b - a)$ si les graduations sont de sens inverse.

2° Schématisation.

La famille $\mathcal{E}$ de bijections de E sur $\mathbb{R}$ n'est pas suffisante pour rendre compte de la manipulation précédente, ainsi que des autres changements d'unité possibles. En effet, comme nous pouvons choisir arbitrairement les deux premiers traits d'une graduation, nous devons exiger que quels que soient les points distincts P et Q de E, il existe une bijection g de E sur $\mathbb{R}$ telle que $g(Q) - g(P) = 1$. Comme nous voulons conserver les propriétés déjà acquises nous sommes amenés à *remplacer le groupe* $\mathfrak{I}$ *des isométries de* $\mathbb{R}$ *par le groupe* $\mathcal{A}$ de toutes les applications $\xi a,b$ de la forme :

$\xi ab \; : \; x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$ et b quelconque.

Ceci conduit aux définitions axiomatiques suivantes.

3° Définitions axiomatiques de la structure de droite affine.

(α) Première définition correspondant au procédé (i) :

On appelle droite affine un ensemble E, dont les éléments sont appelés points, muni d'une bijection $\mathfrak{f}$ *de E sur* $\mathbb{R}$ *et de toutes celles* $\mathfrak{g}$ *qui s'en déduisent de la manière suivante : il existe* $\mathfrak{a} \neq 0$ *et* $\mathfrak{b}$ *éléments de* $\mathbb{R}$ *tels que pour tout point M de E on ait :*

$$\mathfrak{g}(M) = \mathfrak{a}\ \mathfrak{f}(M) + \mathfrak{b}$$

(β) Deuxième définition correspondant au procédé (ii) :

Un ensemble E d'éléments appelés points est une droite affine réelle s'il vérifie les axiomes suivants :

A_1 : *A tout couple (A, B) de points distincts de E est associé une bijection* $\mathfrak{f}$ *de E sur* $\mathbb{R}$ *telle que 0 et 1 soient les images respectives de A et B.*

A_2 : *Si* $\mathfrak{f}$ *et* $\mathfrak{g}$ *sont deux bijections de la famille considérée il existe deux réels* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *tels que pour tout point M de F on ait :*

$$\mathfrak{g}(M) = a\ \mathfrak{f}(M) + b \qquad \textit{avec} \qquad \mathfrak{a} \neq 0$$

Remarques. — *a*) La deuxième définition figure sur le projet de programme de novembre 1970.

b) On peut munir $\mathbb{R}$ canoniquement d'une structure de droite affine; c'est souvent à cette structure que fait référence l'expression droite réelle ou droite numérique.

Conclusion. — Nous espérons avoir montré en quoi l'axiomatisation ressemble au menu d'une auberge espagnole : « On n'y trouve que ce qu'on y a apporté. »

Mathématiser les translations techniques

G. H. Clopeau,
Lycée Lakanal (Sceaux).

Dans l'article qui suit, notre Collègue, aborde l'enseignement de la géométrie en classe de Quatrième d'un point de vue qui lui est cher, à savoir : assurer la liaison de cet enseignement avec celui de la technologie. Alors que l'on parle beaucoup de pluridisciplinarité, voire d'interdisciplinarité, il paraît en effet souhaitable que la technologie n'apparaisse pas, en Quatrième, comme une discipline s'ajoutant à une liste déjà longue. De même, l'enseignement mathématique ne doit pas être « coupé » du monde des applications.

Le nouveau programme officiel pour les classes de « Quatrième » rappelle un lieu commun de la pédagogie : « Il faut aller du concret à l'abstrait ». Il le fait dans les termes suivants, qui évitent la traditionnelle, mais très obscure, opposition entre concret et abstrait :

« A la fin de l'année scolaire, la géométrie, née de l'expérience, devra apparaître aux élèves comme une véritable théorie mathématique. C'est-à-dire que des faits ayant été admis (axiomes), d'autres en sont déduits (théorèmes)... » Sans doute ce texte n'est-il pas encore parfaitement clair. Dire que des faits peuvent être déduits est une expression dangereuse, suggérant que la réalité est identique au modèle (à moins de préciser ce qu'il convient d'entendre par « faits »); or cette confusion est justement l'un des principaux écueils à éviter. Cependant, ce texte a le mérite de nous rappeler que nous, professeurs de mathématique au niveau élémentaire, nous sommes fortement confrontés à ces problèmes de relations entre réalités et modèles.

La tendance « naturelle » du « mathématicien pur », qui ne trouve, et pour cause, pas de rigueur dans les réalités matérielles, c'est de traiter ces réalités avec désinvolture. Par exemple, on évite de préciser ce qu'est le « pas » d'une graduation, ou bien ce qu'est une « graduation régulière ». Cependant, les axiomes sont présentés comme exprimant des propriétés objectives d'objets tout à fait matériels : les règles graduées. Le « mathématicien pur » est convaincu qu'il ne sait pas exactement comment se comportent ces objets grossiers, dilatables, déformables, etc.; il sait bien qu'on ne peut rien dire de sérieux sur cette réalité, et que la connaissance commence avec l'énoncé du modèle; cela lui semble si évident qu'il néglige d'y insister. Le danger est qu'un grand nombre d'élèves continuent à penser « règles graduées » quand on leur parlera « droites réelles »; ils ne comprendront pas alors que certaines propriétés des règles graduées soient appelées axiomes, alors que d'autres tout aussi « constatables » sont soumises aux rites de la démonstration.

Encore un exemple : les translations du plan ayant été définies (comme bijections du plan P vers le plan P) on a figuré au tableau noir trois points A, B, C, et on propose de figurer le point D, image de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Bien sûr, le dessin que l'on fait, où les « points » sont de grosses taches informes, ne saurait être défini par une translation. Le « mathématicien pur » aura tendance à conclure que la tache figurant le point D, « ce n'est pas la peine de se fatiguer à la construire, on peut la mettre à peu près n'importe où... et parler ensuite de choses sérieuses ». Point n'est besoin d'avoir pratiqué longtemps les élèves de 14 ans pour savoir que ce vague ne peut les satisfaire (à moins qu'il ne les satisfasse trop). Il est troublant pour eux que, simultanément, un dogme (que le professeur appelle définition) impose de croire que D est unique, et que le dessin autorise de placer la tache D « à peu près n'importe où »; ils admettent qu'une construction soit imprécise, mais ils n'admettent pas qu'elle soit superflue.

Gardons-nous donc de mépriser l'initiation expérimentale, et reconnaissons toute l'importance de la démarche de « mathématisation », je veux dire de cette invention qui, à partir de l'observation, crée un modèle. Ce dernier mot prête d'ailleurs lui-même à confusion, et je dois préciser dans quel sens je l'emploie ici. J'appelle modèle une construction strictement intellectuelle, qui obéit à sa logique propre, et jouit par conséquent d'une parfaite autonomie, d'une totale liberté par rapport aux réalités qui l'ont peut-être suggérée.

Les conséquences d'une mauvaise assimilation de cette démarche de mathématisation sont très graves. L'élève est alors dans l'impossibilité de reconnaître un même modèle à plusieurs réalités distinctes. *A fortiori* il ne pourra pas admettre qu'une même réalité puisse correspondre à plusieurs modèles (cf. J.-M. Souriau, *Bulletin* n° 275-76, p. 370). L'élève ressentira la démonstration comme un rite artificiel, conforme certes à une certaine règle du jeu... mais pourquoi jouer à ce jeu-là? Pourquoi admettre certains « faits » et en démontrer d' « autres »? Non seulement l'élève sera handicapé en mathématiques, mais il le sera aussi en sciences : la pratique de la méthode expérimentale et le progrès dialectique dans la compréhension des phénomènes lui seront interdits.

Or, il me semble que le point de vue technique peut nous apporter une aide remarquable pour introduire dans l'esprit des élèves une distinction très claire entre réalités et modèles.

Il y a d'abord des raisons « technologiques » pour donner aux translations toute leur importance. C'est en effet sur les glissements, et sur la technique du rodage, que reposent les définitions techniques du plan et de la droite. Faut-il rappeler que la recherche de la précision serait impossible (puisque l'objet fabriqué par une machine est toujours « moins précis » que la machine elle-même) sans cette technique du rodage qui permet d'obtenir des guidages dont la précision n'a d'autre limite que celle des instruments de mesure? Pour ceux de nos élèves qui suivent un cours de technologie (on pourrait souhaiter qu'ils le suivent tous) les translations techniques sont des phénomènes familiers, qui sont présentés au cours de technologie *avant* d'être repris au cours de mathématique. Pour les élèves qui ne suivent pas de cours de technologie, les translations techniques sont cependant des phénomènes intéressants (motivants) et faciles à appréhender.

Mais, quand on parle d'observer d'abord des « glissements », une objection vient à l'esprit. La translation mathématique est une bijection et non un mouvement (avec ses trajectoires décrites au cours du temps). Observons donc le pied à coulisse. On constate que deux plans A et B, liés à la règle, « glissent » sur deux plans A' et B', liés au curseur. Ainsi la droite technique, intersection des plans A et B, « glisse » sur la droite technique, intersection des plans A' et B'. Mais on constate que ce contact n'est pas constant. En fait il est assuré, seulement lorsque le curseur est au repos, par des ressorts. Une maquette simplifiée peut alors être introduite. Elle se compose d'une règle, et d'une plaque rigide dont un bord rectiligne peut « glisser » le long de la règle, le tout étant posé à plat sur une table. Ainsi est mis en évidence que le *mouvement* amenant la plaque d'une position n° 1 à une position n°2, la règle restant fixe, est sans importance. On mathématise le passage de la position n° 1 à la position n° 2, sans souci des positions intermédiaires. Le modèle utile est donc la vraie translation mathématique, et non le « glissement par mouvement de translation rectiligne » notion plus complexe qui ne peut être étudiée qu'après la définition de la translation.

Examinons maintenant, avec un peu plus de détails, ce que l'on peut faire avec une telle maquette. Le couple de points dessinés (A, B) étant donné, on pose la règle « sur » la droite (AB), puis la plaque « sur » la règle; on marque sur la plaque (ce sera plus facile si elle est transparente) le point A' au contact de A et le point M' au contact d'un point M (les points A, B, M, sont figurés sur le plan de la table, les points A' et M' sont portés par la plaque). On peut alors déplacer la plaque (de façon tout à fait fantaisiste, pourvu qu'on ne la retourne pas), puis la ramener au contact de la règle mais de façon cette fois que A' soit au contact de B. Alors M' est au contact d'un point Q, bien déterminé du plan P. Ce point Q est l'image de M dans la « translation » dont le bipoint (A, B) est « l'ordonnateur ».

Ainsi, à tout point M du plan, on sait faire correspondre un point Q bien déterminé lorsque le couple (A, B) est donné; on a défini une bijection de P vers P. Une manipulation suggère alors que si Q est l'image de M dans la « translation » dont l'ordonnateur est (A, B), alors B est l'image de A dans la « translation » dont l'ordonnateur est (M, Q). Ainsi tous les bipoints tels que (M, Q) sont ordonnateurs de *la même* translation. Le mot « ordonnateur » n'a donc de sens que par rapport à l'utilisation de la maquette. Si un ensemble existe, qui possède exactement la propriété que l'on vient de vérifier approximativement, tous les bipoints : (élément de départ, élément d'arrivée) sont équivalents; on les appelle « bipoints équipollents » et leur ensemble constitue le *vecteur* de la translation, vecteur que l'on pourra désigner par les notations $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{MQ}$, indifféremment. D'autres manipulations suggéreront d'autres propriétés posées en axiomes dans le modèle : « plan affine réel ». Renvoyons au *Bulletin* n° 275-76, page 442, pour les étapes successives du cours de géométrie qui suit. Le modèle, surtout dans les classes qui bénéficient d'un cours de technologie, devrait s'élaborer assez rapidement.

Lorsque ce modèle est posé, il convient d'une part d'en déduire des prévisions, qui ne seront vraies avec exactitude que pour le modèle lui-même, et non pour la réalité technique, mais qui pourront donner lieu à des comparaisons avec cette réalité. D'autre part, pour éviter les bloquages dénoncés plus haut, on pourra étudier en exercices des « maquettes » variées pour chacune des structures rencontrées : comme les translations opèrent dans l'ensemble des points du plan P, on peut trouver plusieurs exemples de « groupe opérant dans un ensemble », de même on peut trouver plusieurs exemples d' « espaces vectoriels », de nature géométrique ou non. Les élèves, que nous évoquions tout à l'heure, n'auront alors plus d'inquiétude pour situer la tache D figurant l'image du point C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$; ils comprendront que le dessin est une maquette, laquelle n'est « conforme » au modèle que si les constructions sont définies (à l'aide, par exemple, de la plaque qui glisse le long de la règle). Mais ils comprendront aussi que ce dessin *n*'est *qu*'une maquette, et que le même modèle pourrait s'illustrer autrement; par exemple, le « plan » pourrait être figuré par une patate, comme tout ensemble; l'ensemble $P \times P$ par une autre patate dans laquelle des tranches figureraient des classes d'équivalence : les vecteurs. La maquette technique, dont l'importance pratique est considérable, et qui a le mérite d'être une bonne motivation pédagogique, ne sera cependant pas identifiée au modèle, et les progrès ultérieurs seront possibles.

En procédant ainsi, les outils mathématiques utiles pour l'avenir, le calcul vectoriel en particulier, sont utilisés très vite, sans complications préalables artificielles, et surtout sans laisser croire à l'élève qu'on lui dévoile la nature des choses matérielles, mais au contraire en l'habituant à inventer, à agir, à confronter les expériences. « Mathématiser les translations techniques » me semble être une bonne manière d'adapter aux élèves de Quatrième l'enseignement de la géométrie, conçue comme « véritable théorie mathématique ».

3

Compte-rendus d'expérimentateurs

L'expérimentation a démarré en octobre 1967 sous l'égide de l'I.P.N., maintenant I.N.R.D.P., en Sixième dans une cinquantaine de classes et se poursuit actuellement en Troisième ; une deuxième vague s'est formée en 1968, elle touche actuellement la Quatrième.

Durant les deux années d'expérimentation en Quatrième, les conditions de travail n'ont pas été idéales : les programmes étaient d'abord inconnus puis variaient à chaque nouvelle rédaction de la Commission Ministérielle et des décharges promises n'étaient plus accordées. Malgré cela de nombreuses équipes ont bien voulu faire un rapport sur leur expérimentation en Quatrième, indiquer le programme suivi, les méthodes pédagogiques utilisées et donner leurs conclusions.

Au risque de déformer leurs intentions, en les résumant, disons que les expérimentateurs semblent : se plaindre de la longueur du programme ; souhaiter l'établissement d'un programme minimum répondant à la finalité de l'enseignement obligatoire jusqu'à seize ans. Pour les expérimentateurs l'objectif à atteindre est une véritable démocratisation de l'enseignement de la mathématique dont deux conditions nécessaires (mais non... nécessairement suffisantes) sont : programme minimum assimilable par, pratiquement, tous les élèves ; création dans tous les établissements de « clubs mathématiques » dans lesquels s'effectueraient des activités... libres.

Nous publions, dans l'ordre, des comptes rendus de collègues enseignant à : Fribourg, Mulhouse, Nancy, Marseille, Clermont-Ferrand, Lorient, Boulogne-sur-Mer, Limoges, Montpellier, Lyon.

En Alsace

Voici d'abord un article qui met le lecteur dans l'ambiance d'une classe expérimentale.

Quelques histoires vécues dans une classe expérimentale.

M. AUZÉ,
Lycée de Fribourg.

Je participe depuis trois ans à l'expérimentation des nouveaux programmes du premier cycle dans l'équipe qui s'est créée à l'I.R.E.M. de Strasbourg en 1968 après que nos amis Lyonnais nous aient initiés à leur méthode de travail. Je veux essayer de raconter quelques histoires réellement vécues au cours de cette expérience et éventuellement de réfléchir sur leur signification.

Il fut convenu, dès le début, qu'à ces nouveaux programmes devait correspondre une pédagogie nouvelle. J'ai donc, comme la plupart de mes collègues expérimentateurs d'Alsace, tenté par l'utilisation de fiches, de mettre en œuvre un enseignement non directif.

J'ai dû surmonter d'énormes difficultés provoquées par la différence des cadences de chacun. Certains élèves enthousiastes avalaient littéralement les fiches et les remèdes qu'avaient suggérés les Lyonnais, en l'occurrence les fiches complémentaires de Galion disparaissaient dans le gouffre de leur appétit de savoir. D'autres, au contraire, tout heureux de profiter d'une liberté qu'ils n'avaient pratiquement jamais eue à l'école, pensaient davantage aux jeux de leur âge qu'aux subtilités de la mathématique, fût-elle qualifiée de moderne.

Ce premier trimestre de Sixième se termina donc dans une ambiance de kermesse. Tout le monde était content. Ceux qui voulaient travailler avaient bien travaillé et les autres s'étaient bien amusés. Les notes obtenues aux interrogations de contrôle n'étaient jamais catastrophiques, tant il est vrai que le langage des ensembles est accessible à quiconque est doué d'un minimum de bon sens.

J'étais cependant inquiet. Je comprenais que je ne pouvais plus, dans le cadre de l'organisation existante, laisser aller chacun à son rythme. Il y avait un programme à respecter dans l'intervalle d'une année scolaire. L'idée se fit jour en moi que les notions de programme et d'enseignement non directif sont incompatibles. Aussi adoptai-je un compromis : lorsque certaine question s'avérait difficile, j'abandonnais mon rôle de moniteur déambulant dans les travées, et pour les quelques instants où je devais projeter les lumières indispensables, je remontais sur l'estrade pour redevenir professeur traditionnel. Ainsi le travail sur fiche ne piétinait pas et quitte à ce que les plus attardés terminent le travail à la maison, les écarts entre les rapides et les lents diminuèrent et des séances de synthèse, inconcevables dans la situation du premier trimestre, purent être organisées. Maintenant encore je m'en tiens à cette méthode, avec cette nuance que ce sont les élèves qui sollicitent mon intervention au tableau lorsque les difficultés rencontrées dans les fiches leur paraissent insurmontables.

Ces interventions se font d'ailleurs plus fréquentes au niveau de la classe de Quatrième. Je veille à ce qu'elles soient minimales, car je pense fermement que la découverte par l'enfant lui-même est une méthode idéale de connaissance. Elles sont cependant motivées par le fait que, déjà en Cinquième et plus encore en Quatrième la matière enseignée devient parfois d'une difficulté telle que l'intelligence d'un enfant de 13 ans ne peut s'en saisir par ses propres moyens.

En Sixième la mathématique étant essentiellement descriptive, les diagrammes et les jeux imaginés par des pédagogues de renom permettent de faire face de manière satisfaisante à toutes les difficultés du programme. Mais en Cinquième et en Quatrième on voit poindre assez souvent ce qui constitue l'essentiel du travail mathématique, le raisonnement déductif. Je m'en tiendrai seulement à deux domaines où ce raisonnement s'exerce de manière soutenue, la géométrie en Quatrième et la résolution des équations.

Pour ce qui concerne la géométrie, ou tout au moins ce que nous en avons traité en cette fin de deuxième trimestre, c'est-à-dire droites du plan, parallélisme et projection, l'équipe de Strasbourg a adopté la progression suivante :

— première approche des axiomes d'incidence dans un plan à quatre points;

— dessin géométrique dans le plan matériel afin de visualiser les dits axiomes;

— mathématisation des situations qui viennent d'être envisagées;

— énoncés des axiomes; leur application à des plans finis;

— extension à un plan mathématique quelconque.

On a donc d'abord travaillé dans un plan à quatre points. Sur les conseils du psychologue attaché à notre équipe nous n'avons pas prononcé le mot plan; amusons-nous avec un ensemble à quatre éléments, tel était le titre de la première fiche de géométrie; de même les droites étaient appelées paires.

Nous avons cependant conservé le mot parallèle, parce que nous pensions que grâce à l'information, son sens est tellement vulgarisé que nous ne risquions pas, en l'employant dans ce cas particulier, de traumatiser les élèves.

Songeons par exemple à des expressions comme discussions parallèles, entreprises parallèles, polices parallèles, etc.

Cette fiche passa très bien.

La fiche suivante fut une fiche de dessin géométrique. Elle avait un but technique, en particulier la construction de parallèles par un procédé affine (règle et équerre, fausse si possible, compas interdit), mais aussi et surtout un but avoué dans sa conclusion, la nécessité de l'élaboration d'un modèle mathématique rendant compte aussi parfaitement que possible de la situation entrevue dans le plan matériel.

Dans les fiches suivantes la mathématisation ne posa pas de problème aux élèves tant que l'on s'en tint à des plans finis (plans à 4 points, plans 9 points). Les enfants pouvaient alors inventorier les objets sur lesquels ils travaillaient. Il n'en fut pas de même lorsqu'il fallut par exemple établir la transitivité du parallélisme dans l'ensemble des droites d'un plan mathématique qui pouvait être non fini. Incontestablement ce fut là un échec; 20 p. 100 seulement des élèves se montrèrent capables de saisir le raisonnement ou tout au moins de le reproduire.

Faut-il s'en étonner? Jadis aussi cette leçon était un test redoutable et bien peu nombreux étaient ceux qui le passaient avec succès.

Il me semble cependant que la progression que nous avons suivie à Strasbourg est préférable à l'ancienne (dessin géométrique, mathématisation dans un plan non fini) parce qu'elle a prouvé que la majorité des élèves étaient capables de manipuler les axiomes dans la situation plus simple des plans finis.

Sans cela 80 p. 100 des élèves n'auraient pas, au cours de cette leçon effectué de véritable travail mathématique; ils auraient certes fait du dessin géométrique et le professeur, sinon les élèves (notez cette restriction, je la justifierai plus loin), aurait pu croire qu'il enfonçait des portes ouvertes, les axiomes d'incidence.

Vint ensuite la leçon sur les projections. On travailla d'abord dans des plans finis. Là encore, après une intervention magistrale nécessitée par un début de fiche quelque peu rébarbatif, tout alla pour le mieux. Les élèves projetaient habilement et déjouaient facilement les quelques pièges que l'on peut imaginer dans ce genre d'exercice (par exemple prendre la droite sur laquelle on projette parmi celles de la direction de projection). Je voulus alors exposer une situation analogue dans le plan matériel.

Je croyais être rapidement compris. Las! Il fallut bien vite déchanter. Dans le plan matériel deux traits qui ne se coupent pas sont pour la plupart des élèves deux droites parallèles. Cela justifie ma restriction antérieure. On rencontre toujours la même difficulté lorsqu'il s'agit d'extrapoler à des objets non finis ce qui a été compris pour des objets finis.

A la lumière de cette expérience je pense avoir pris réellement conscience des limites du dessin géométrique en tant que support du raisonnement et de l'intérêt de la géométrie dans des plans finis pour ce même raisonnement. J'ai conscience également de l'insuffisance de ces plans finis qui ne peuvent servir de modèle à la réalité.

Pour ce qui concerne la résolution des équations, les élèves ont travaillé successivement dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et enfin $\mathbb{R}$. Chaque fois les axiomes permis et les règles de simplification qui en découlent étaient mis en évidence.

Une résolution d'équation reste toujours difficile en ce sens qu'elle nécessite un enchaînement judicieux des axiomes. Elle est incontestablement plus valable qu'avant comme travail typiquement mathématique, parce qu'elle casse cet automatisme qui était de règle lorsqu'on faisait opérer les élèves dans un ensemble $\mathbb{R}$ inavoué.

Je pense qu'en Quatrième il faut rester simple dans ce domaine et s'interdire tout cas pathologique (par exemple, résoudre dans $\mathbb{D}$ l'équation $3x = 2{,}7$) parce que l'on fausse alors le jeu naturel.

Je voudrais terminer sur une anecdote.

Après avoir fait réaliser les quelques encadrements qui devaient suggérer $\mathbb{R}$, j'ai demandé à mes élèves si, outre les nombres qu'ils avaient déjà rencontrés, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$ il y en avait beaucoup d'autres dans $\mathbb{R}$. Silence... Alors je fis voter, à mains levées, il est vrai. La majorité décida qu'il y en avait peu; en fait nous n'avions guère encadré que $\sqrt{2}$, π et quelques fractions.

J'avoue que j'éprouvais alors une joie secrète de donner raison à la minorité qui, j'ose l'espérer, a été guidée dans son choix par autre chose que le hasard.

Notre collègue P. Lévy, professeur au Lycée expérimental Lambert à Mulhouse, fait partie de la même équipe que M. Auzé, auteur de l'article ci-dessus. Il nous adresse un rapport (concernant une classe de Quatrième, mixte, de 36 élèves et de niveau considéré comme « normal » pour l'enseignement long) beaucoup moins optimiste.

I. — Programme suivi.

En principe : le programme officiel, dans la mesure où il était porté à notre connaissance par les projets successifs de la commission compétente.

D'autre part, nous avons suivi les fiches fabriquées en commun à l'I.R.E.M. de Strasbourg.

Remarque sur le paragraphe I du projet de programme de mars 1971 :

La composition des applications n'étant pas au programme de Cinquième, on ne peut se contenter de l'évoquer en révision.

Remarques générales : L'approche des réels reste très difficile au niveau de Quatrième. La suppression de l'étude préalable de $\mathbb{Q}$ me semble alourdir et non alléger la tâche des enseignants et des élèves.

Concernant le paragraphe III : Il est très difficile de concilier « manipulations, exercices pratiques utilisant les instruments de dessin » avec la présentation abstraite, générale, indépendante de l'espace sensible, matériel ou physique qui ressort des autres lignes du programme.

D'autre part, comment expliquer, ou même présenter des constructions ou tracés géométriques *avant* d'avoir étudié la géométrie?

II. — Méthodes pédagogiques.

En raison de la difficulté de l'ampleur du programme, il n'a guère été possible de poursuivre l'enseignement non directif, sur fiches, qui était possible en Sixième et Cinquième.

Il a été constaté que les élèves de Quatrième n'étaient pas capables, au début de l'année scolaire de travailler avec leur cahier de cours, en l'absence de documents imprimés.

Nous avons alors introduit le premier fascicule expérimental de Galion 4e, en signalant les paragraphes à savoir, ceux qui étaient à lire, ceux qui étaient facultatifs.

Par la suite, les élèves ont reçu les fiches fabriquées en commun à l'I.R.E.M. de Strasbourg, avec des explications complémentaires quand il le fallait.

Contrôle des connaissances : notamment par exercices de contrôle en classe; applications simples du cours.

« Exemple : à partir d'un nombre décimal, calculer son opposé, sa norme, son inverse, ses puissances d'exposants relatifs jusqu'à un certain rang. Résoudre des équations simples du premier degré en utilisant les opérations précédentes. »

— Travaux plus importants, à domicile, « exemple : étude du sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathbb{D}$ dont les éléments sont de la forme :

$$(\pm\, 2^n . 10^p) \vee (\pm\, 5^n . 10^p) \qquad n \in \mathbb{N}; \qquad p \in \mathbb{Z}$$

montrer que $\mathcal{G}$ est un groupe multiplicatif... »

III. — Difficultés.

Comme signalé au paragraphe I : les réels par encadrement; la géométrie dans sa présentation ensembliste et générale; la liaison entre cette géométrie et l'usage des instruments, etc.;

La résolution des inéquations du premier degré, pour les élèves faibles, était plus facile par les règles de transposition, division, etc. que par les relations d'ordre.

IV. — Succès.

En y passant beaucoup de temps, on arrive à faire acquérir « la notion de groupe » en développant en détail de nombreux exemples.

Il semble y avoir moins d'erreurs qu'autrefois sur le calcul des puissances.

En tout cas ce programme requiert une préparation approfondie de la part des maîtres et un effort soutenu des élèves.

Une dernière remarque, portant à la fois sur le programme et les difficultés.

Les démonstrations sur les figures traditionnelles (triangle, quadrilatère) étaient difficiles pour les élèves de Quatrième; il ne faudrait pas se contenter d'écrire « ... déduits, (théorèmes), raisonnements, comprendre et rédiger des démonstrations ». Il semble que ces difficultés ne seront pas moindres, au contraire, avec le nouveau programme et qu'elles sont sous-estimées actuellement, ce qui pourrait entraîner de fâcheuses conséquences...

V. — Informations complémentaires.

Signalons qu'au lycée de Mulhouse, il existe 8 classes de Quatrième expérimentales.

a) Classes Quatrième-2 et quatrième-3, de niveau comparable à la Quatrième-1, difficultés supplémentaires : le professeur devant être envoyé par l'I.P.N. n'est jamais arrivé et le collègue nommé longtemps après la rentrée n'avait pas enseigné en Cinquième expérimentale en 1969-70.

b) Classe Quatrième-4 (niveau enseignement court) a porté moins d'intérêt au nouveau programme, une grande partie des élèves n'ayant pas l'intention (ou les capacités) de rester au lycée au delà de la scolarité obligatoire.

c) Classe Quatrième-6 (niveau C.E.G.) a reçu un enseignement modifié dans le sens du concret (par rapport au programme nouveau).

d) Annexe Wolf : l'expérience n'a pas été autorisée dans ces classes, mais seulement tolérée depuis trois ans. Deux classes ont reçu le même enseignement que les classes 1, 2, 3 du bâtiment principal. Leur hétérogénéité a causé des difficultés et des résultats assez inégaux suivant les élèves.

e) Dernière classe Wolf. Notre collègue, Eprinchard, a adapté le programme à sa classe, notamment en introduisant le (corps) $\mathbb{Q}$ avant $\mathbb{R}$ et en développant la géométrie sous forme concrète et expérimentale; les résultats sont satisfaisants.

A Nancy

Bilan concernant le paragraphe II.

L'étude des nombres réels est terminée à peu près dans toutes les classes (un léger retard est néanmoins enregistré dans un C.E.S. où le niveau des élèves est moins élevé et où quelques difficultés surgissent de la part des parents qui s'inquiètent).

L'exposé de la question n'a pas été tout à fait le même dans les différentes classes, mais il est dans l'ensemble à peu près celui-ci : on étudie les types d'encadrements d'un nombre décimal suggérés par le programme : $[a.10^p, (a+1)\,10^p[$; $]a.10^p, (a+1)\,10^p]$; $[a.10^p, (a+1)\,10^p]$, avec a et p éléments de $\mathbb{Z}$.

On considère ensuite les différents types de suites décimales illimitées périodiques ou non, que l'on encadre et on débouche toujours sur le théorème des intervalles emboîtés soit pour définir le nombre réel, soit après l'avoir défini comme suite décimale illimitée. La compréhension de ce théorème (admis) est l'objectif de toute la théorie. On utilise ensuite ce théorème pour définir la somme et le produit de deux nombres réels avec étude des propriétés de l'addition et de la multiplication; on résout ensuite les équations $ax = 1$; $x^2 = a$, $ax = b$, en travaillant uniquement sur des exemples.

Cette partie du programme est évidemment délicate à traiter; il y a des difficultés concernant l'encadrement des nombres négatifs; des difficultés d'expression et en plus du vocabulaire utilisé dans le libellé du programme il faut souvent introduire des locutions plus ou moins heureuses, en particulier pour faire comprendre la notion d'intervalles emboîtés dont la largeur tend vers zéro quand leur nombre augmente indéfiniment.

Dans les classes où le niveau est plus faible, après avoir introduit beaucoup de notions — ce qui a demandé beaucoup de temps — il faut finalement admettre la plupart des résultats pour continuer.

Cependant, si l'on considère la majorité des classes expérimentales, il semble que le bilan soit positif, les élèves s'intéressent à la question, ne se lassent pas des calculs, qui, dans certaines classes, sont facilités par l'emploi de petites machines à calculer Curta, et paraissent avoir de l'ensemble des nombres réels, une intuition plus correcte que celle qu'en avaient leurs aînés; cette partie du programme semble donc bien à sa place dans la classe de Quatrième.

Méthodes de travail.

C'est toujours un travail d'équipe dont l'élément de base reste la fiche rédigée en commun par les professeurs de cette équipe; fiche rédigée de manière à pouvoir être utilisée de façon très souple par chacun suivant son tempérament et son public, soit pour introduire une notion nouvelle, soit pour faire des exercices d'application, soit comme moyen unique d'étude d'une notion.

Les élèves peuvent travailler individuellement sur leur fiche (ou par petits groupes), la synthèse étant ensuite faite en classe où la fiche peut être étudiée d'abord en commun sous la direction du professeur.

Dans certains cas, un cours de forme assez classique peut être fait dans le but d'apprendre aux élèves à comprendre une démonstration et à l'exprimer correctement, c'est en Quatrième, en effet, que ce but doit être atteint.

Les séances de travaux dirigés permettent diverses activités, calcul numérique, préparation de problèmes, rédaction d'un travail élaboré en commun;

malheureusement un groupe de 24 élèves est trop lourd pour réaliser un travail fructueux.

Des tests de contrôle ont lieu fréquemment en classe et des exercices et problèmes sont donnés à préparer à la maison.

A Marseille

Mme BÉNIAMINO, Mlle PISSAVIN,
Mme ROSENBAUM,
Lycée Montgrand.

Conditions de travail.

— 2 classes de 38 élèves,
— 1 classe de 21 élèves.

Méthodes.

L'utilisation des fiches donne lieu, en général, à une recherche individuelle ou en groupe très appréciée des élèves. Cependant, ce travail dans les classes de 38 élèves ne peut être exploité à fond, car le contrôle et l'encadrement sont plus difficiles.

Après un certain temps consacré à cette recherche, un exposé fait le plus souvent par un élève, apporte une solution claire et nette à l'ensemble de la classe et permet de mettre au point les notions nouvelles.

Programme.

Le programme suivi est celui de la Commission Lichnerowicz (avant-dernière rédaction, paru dans le nº 275-276 du *Bulletin de l'A.P.M.*). Ce programme est la suite logique de ceux de Sixième et Cinquième. Il est très cohérent et permet l'utilisation de toutes les notions antérieures pour l'étude de la géométrie.

L'étude des réels telle qu'elle est indiquée a suscité un grand intérêt parmi les élèves. Elle a permis de nombreuses applications de type numérique. (Ce « nouveau programme » n'empêchera pas nos élèves de savoir calculer!) Nous avons insisté chaque fois sur les propriétés intervenant dans les différents mécanismes de calcul. Nos élèves ont commencé la Quatrième en ayant conservé les notations 2^- (pour -2) et 2^+ (pour $+2$). Nous pensons qu'il ne faut pas modifier cette notation (ou une notation équivalente) pendant la classe de Cinquième. Le passage de 2^+ à $+2$ et 2 a été fait sans difficultés dès le début de l'année; le passage de 2^- à -2 a été fait pendant l'étude des suites décimales illimitées. A la suite de l'étude des propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$, les élèves ont posé les calculs de la manière classique. Ceci a permis de bien insister sur les divers sens attribués au signe moins et évitera peut-être, le mauvais réflexe faisant de $-x$ (x élément de $\mathbb{R}$) un nombre négatif.

Ce n'est pas en géométrie, que les élèves ont fait leurs premières démonstrations. L'an dernier déjà, ils en ont eu l'occasion à propos des entiers relatifs. Ici la difficulté provient de ce qu'il leur semble qu'un dessin peut remplacer un raisonnement; mais ce n'est pas là un fait nouveau. Ces premières démonstrations ont pu leur être rendues nécessaires par l'utilisation des diagrammes de Venn.

Difficultés.

Les réels devant être connus pour étudier la géométrie, nous n'avons pu l'aborder qu'en cours de deuxième trimestre. Ceci laisse assez peu de temps pour traiter un programme long, qui comprend une partie nouvelle et importante.

D'autre part, ce programme ne laisse pas assez de libertés pour l'exposé de certains points (les axiomes de géométrie, par exemple, qui amènent par la suite les élèves à démontrer des propositions évidentes pour eux : quel que soit le repère sur la droite affine réelle les notions de « milieu », « entre », sont conservées).

(Tout ceci n'a-t-il pas été modifié dans le nouveau projet?)

La notion de groupe devant être dégagée qu'avec des exemples du programme, risque de ne laisser qu'une trace bien faible dans l'esprit des élèves. Pourquoi ne pas traiter des exemples de groupes finis, permettant de « mathématiser » une situation et d'étudier une même structure sous des aspects divers?

Nous devons déplorer les effectifs de deux classes (38 élèves), où les difficultés rencontrées sont plus grandes.

Conclusion.

Le programme, bien que long, possède un très grand intérêt et est très abordable par les élèves.

A Clermont-Ferrand

Nos collègues Mlles DERAMONDT, COGNET, BÉCAMEL, M. BRACQUEMOND, *font le « point » de la situation dans laquelle ils se trouvent,* en avril, *en classe de Quatrième.*

Depuis le début de l'année scolaire, la parution des nouveaux programmes ayant été annoncée à plusieurs reprises comme imminente, nous avons préféré retarder l'étude de l'introduction des réels et de la géométrie. Si nous sommes en retard probablement pour la géométrie, l'étude détaillée de l'ensemble $\mathbb{Z}$, de l'ensemble des décimaux et des groupes, doit nous permettre d'aller assez vite pour le calcul dans $\mathbb{R}$.

Comme en Sixième et Cinquième nous avons travaillé avec des fiches avec cependant une part plus importante de travail collectif. En particulier, la rédaction des fiches se prête mal à l'enchaînement d'une démonstration.

Programme suivi :

Logique. Révisions et compléments. Introduction des connecteurs, $\wedge$, $\vee$, W (ou *e*), « entraîne », « logiquement équivalent » et contraposition jugés utiles dans de nombreuses démonstrations.

Relations. Révisions et compléments. Les élèves sont toujours aussi intéressés que dans les classes précédentes, pas de difficultés majeures.

Groupes. Étude plus systématique que ne le demande le programme. Notion bien acquise : nous avons pu le vérifier dernièrement en demandant de démontrer — en exercice de contrôle — que l'ensemble des puissances de dix muni de la multiplication est un groupe.

Révision de $\mathbb{Z}$. Nous y avons passé beaucoup de temps! (environ 5 semaines), les élèves éprouvant de nombreuses difficultés (indépendantes de tout programme) tant pour la factorisation que pour les calculs faisant intervenir simultanément l'addition et la multiplication.

Ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux. Nous avons fait de nombreux exercices, certaines difficultés rencontrées dans $\mathbb{Z}$, réapparaissant dans $\mathbb{D}$.

Début de la géométrie. Présentation des axiomes d'incidence. Étude d'un ensemble à quatre éléments. Les élèves, un peu saturés de calcul, semblent, dès l'abord, très intéressés.

Difficultés générales.

En dehors des problèmes posés par le calcul, les élèves ont beaucoup de peine à faire par eux-mêmes des démonstrations. Exemples : la transitivité, l'antisymétrie de certaines relations dans un ensemble. Ils avaient jusqu'à présent, l'habitude de raisonner surtout sur des ensembles finis se prêtant à des représentations concrètes. Il nous semble que nous aurions pu et dû approfondir beaucoup plus l'étude de $\mathbb{Z}$ en Cinquième, de façon que les élèves aient la maîtrise des calculs sur les entiers.

En ce qui concerne la partie du programme non encore étudiée, l'introduction de la droite, à partir d'une famille de bijections, nous paraît assez délicate.

A Lorient

Équipe des expérimentateurs du Lycée Dupuy de Lôme et C.E.S. de Kerentrech.

I. — Conditions de l'expérience.

L'expérience porte à Lorient sur 7 classes de Quatrième, soit 186 élèves.

• ***Le programme*** suivi a été le programme officiel (paru le 1er février 1971).

• ***Méthodes pédagogiques.*** Les élèves disposent de fiches. La distribution de ces fiches est en général précédée par une présentation orale.

Nous faisons travailler les élèves pratiquement au même rythme car certaines démonstrations sont étudiées en commun et les interventions orales sont nombreuses.

• ***Difficultés et succès.***

La principale difficulté est la longueur du programme, ce qui ne permet pas d'approfondir les points délicats. Nous craignons que faute de temps, on en arrive à sacrifier le raisonnement au profit des « recettes ».

II. — Programme traité.

Voici point par point ce que nous avons traité avec les élèves jusqu'à ce jour (deux trimestres).

1° Relations ; groupe.

Pas de difficultés particulières. La notion de groupe est très bien admise par les élèves.

2° Décimaux.

Nous avons choisi la méthode suivante pour construire $\mathbb{D}$:

1) $A = \{(x, y)/x \in \mathbb{Z} \text{ et } y = 10^k,\ k \in \mathbb{N}\}$

On considère dans A la relation $\mathcal{R}$ définie de la façon suivante :

$(a, 10^p)$ et $(b, 10^q)$ étant des éléments quelconques de A, on dit que $(a, 10^p)$ et $(b, 10^q)$ sont en relation pour exprimer que : $a \times 10^q = b \times 10^p$.

Nous avons démontré avec les élèves que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

L'ensemble des décimaux relatifs $\mathbb{D}$ est donc l'ensemble des classes d'équivalence, notées $\overset{\frown}{(a, 10^p)}$.

2) Dans A on considère l'opération notée $*$ telle que

$$(a, 10^p) * (b, 10^q) = (ab, 10^{p+q})$$

Nous avons admis que la relation $\mathcal{R}$ et l'opération notée $*$ étaient compatibles. (Constatation sur quelques exemples seulement.)

3) Dans $\mathbb{D}$, on définit une opération appelée multiplication et notée $\otimes$, telle que :

$$\overset{\frown}{(a, 10^p)} \otimes \overset{\frown}{(b, 10^q)} = \overset{\frown}{(ab, 10^{p+q})}$$

Étude des propriétés de la multiplication dans $\mathbb{D}$.

4) Conventions d'écriture :

— $\mathbb{D}_1$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{D}$ du type $\overset{\frown}{(a, 10^0)}$ avec $a \in \mathbb{Z}$.

On identifie $(\mathbb{D}_1, \otimes)$ et $(\mathbb{Z}, \times)$ et on écrit : $\overset{\frown}{(a, 10^0)} = a$.

— $\mathbb{D}_2$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{D}$ du type $\overset{\frown}{(10^p, 10^q)}$.

On identifie $(\mathbb{D}_2, \otimes)$ et $(E, \times)$, E étant le groupe des puissances de 10, et on écrit : $\overset{\frown}{(10^0, 10^k)} = 10^{-k}$.

— Tout élément de $\mathbb{D}$ s'écrit alors $a \times 10^p$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

Remarques sur cette méthode :

Ayant introduit précédemment $\mathbb{Z}$ comme ensemble de classes d'équivalence de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il nous a semblé intéressant de construire $\mathbb{D}$ de façon analogue. Nous nous sommes refusés à donner l'écriture « $a \times 10^p$ » sans expliquer le sens du signe « $\times$ ».

L'étude de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est un bon exemple de démonstration. Les élèves ont été intéressés.

Le problème de l'identification reste cependant délicat. Ce dernier point n'a pas été compris par tous les élèves.

Cette introduction de $\mathbb{D}$, très formatrice au point de vue du raisonnement est cependant très longue.

Ensuite les calculs dans $\mathbb{D}$ n'ont pas posé de problèmes particuliers, quelle que soit l'écriture des nombres.

3° Calculs approchés.

Nous avons suivi le programme point par point. Il n'y a pas de difficultés particulières, mais « il faudrait » étudier de nombreux exemples afin de familiariser les enfants avec les suites décimales illimitées.

4° Tout au long de l'année, nous avons entraîné les élèves au calcul algébrique : factorisation, développement, puissance.

5° Géométrie.

Nous n'avons pas encore traité cette partie du programme avec les élèves, car nous avons besoin de $\mathbb{R}$ pour traiter la géométrie de la droite que nous comptons faire avant la géométrie du plan. Nous nous sommes inspirés pour préparer cette première partie des indications données dans l'annexe accompagnant le projet de programme du 1er février 1971.

De toutes façons, il est hors de question que nous ayons le temps de finir le programme.

P. S. — Nous n'avons pas cherché à rédiger un article, mais simplement donner quelques indications sur les options que nous avons prises et les difficultés rencontrées.

A Boulogne-sur-mer

Mathématique. Expérimentation en classe de Quatrième.

Expériences du C.E.S. Cazin de Boulogne-sur-Mer
et du C.E.S. Langevin de Boulogne-sur-Mer.

Mme BOULLOCH; MM. LECOMTE, JEANNIN, HONVAULT,
MONTADOR, MUSELET, PAUWELS, VACHE.

I. — Conditions de l'expérience.

Au C.E.S. Cazin. — A Boulogne-sur-Mer, la réforme de l'enseignement étant appliquée intégralement, tous les élèves sortant de l'école primaire entrent dans un C.E.S. L'expérience a démarré dans toutes les Sixièmes du

C.E.S. Cazin en septembre 1968. C'est dire qu'il n'y a pas eu sélection au départ. L'expérience touche actuellement tous les élèves de Quatrième (250 environ). Les classes sont homogènes et un emploi du temps aménagé permet aux élèves de changer de niveau et d'aller dans une classe où le rythme est plus adapté à leurs possibilités.

L'équipe qui mène l'expérience est composée de trois professeurs certifiés et de trois P.E.G.C. Cete équipe travaille en collaboration avec M. Jeannin, assistant à la Faculté des Sciences de Lille et membre de l'I.R.E.M. de Lille.

Une réunion hebdomadaire de deux heures est prévue à cet effet.

Au C.E.S. Langevin. — L'expérience est menée dans une seule classe de Quatrième par M. Pauwels (professeur détaché à l'I.R.E.M. de Lille).

II. — Programme suivi.

Nous avons travaillé à partir du projet de programme de la Commission ministérielle pour l'enseignement des mathématiques paru avant la rentrée 1970-71.

En algèbre, nous avons choisi de traiter les rationnels avant les réels.

— D'une part sollicités par les élèves : lors de la résolution d'équations dans $\mathbb{Z}$ ils nous ont fréquemment demandé s'il n'était pas possible de construire un ensemble plus grand que $\mathbb{Z}$ et où les équations du type $ax = b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ ont toujours une solution.

— D'autre part, pour la partie géométrie, le plan adopté nécessite l'étude de $\mathbb{Q}$ avant celle de $\mathbb{R}$.

Une étude sommaire des réels est prévue en fin de Quatrième.

Du point de vue pratique, les calculs sur les décimaux, les calculs dans $\mathbb{Q}$, les approximations de rationnels par des décimaux, donneront aux enfants les techniques indispensables dans le domaine du numérique.

D'un point de vue plus théorique, la progression : calcul dans un groupe, dans un anneau ($\mathbb{Z}$ et entiers modulo n) puis dans un corps ($\mathbb{Q}$ et entiers modulo un nombre premier), permet à l'élève de mieux « penser » ses calculs et d'échapper à une mécanisation précoce.

En géométrie, nous sommes d'accord sur la répartition adoptée par la commission, à savoir : géométrie affine en classe de Quatrième et géométrie métrique en classe de Troisième. Quant aux méthodes à adopter pour traiter ce programme, nous pensons qu'il faut que l'enfant aille à la découverte des axiomes plutôt que de les lui imposer *a priori*. Ceci nous a amené à faire dégager le modèle mathématique à partir du dessin géométrique. Il importe qu'à l'issue de toute démonstration l'enfant revienne à une vérification graphique, il part du réel, pour revenir au réel, mais enrichi.

Programme suivi, ce qui a été traité.

a) *Révisions: Relations (notions acquises en Sixième et Cinquième); Calculs dans $\mathbb{Z}$; valeur absolue et ordre dans $\mathbb{Z}$.*

b) *Nombres à virgule. Addition, multiplication, ordre.*

Nombres décimaux positifs. Construction de l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux relatifs. Écriture d'un décimal relatif sous la forme $a\,10^p$ $(a, p \in \mathbb{Z})$.

c) *Dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$, nombreux calculs sur les expressions algébriques, factorisation, « identités » remarquables, etc.*

d) *Approche de la structure de groupe.*

Étude de nombreuses opérations: $\cap$, $\cup$, Δ, composition d'applications, etc.

Congruences dans $\mathbb{N}$. Addition et multiplication dans $\mathbb{N}/k$.

Tables de Pythagore.

Groupe. Équations dans un groupe (nombreux exercices).

Propriétés des groupes.

e) *Géométrie sur un quadrillage. Groupe des translations.*

f) *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels (traité au C.E.S. Langevin).*

Définition. Addition. Multiplication. Ordre. Résolution d'équations du type $(ax = b)$ *et d'inéquations du type* $ax \leqslant b$.

g) *Géométrie plane.*

Axiomes d'incidence dégagés à partir du dessin géométrique. (Une étude du plan affine à 4 points a été faite auparavant).

Positions relatives de deux droites. Parallélisme.

h) *Calcul numérique (utilisation des machines Curta).*

i) *Logique et cartes perforées.*

Ce qui reste à faire:

a) L'ensemble $\mathbb{Q}$ (au C.E.S. Cazin).

b) En géométrie : translations planes, etc. (voir Annexe Géométrie).

c) Notions sur les réels.

III. — Méthodes pédagogiques.

Travail par groupes.

Les élèves de chaque classe sont répartis en groupes de 3 ou 4 (selon leurs affinités). Ces équipes peuvent d'ailleurs se modifier selon les désirs de ses membres.

L'intérêt du travail en groupe n'est plus à faire. Nous signalerons seulement à nos collègues l'article de M. Kerjan (*Bulletin de l'A.P.M.*, n° 269-270, *Travail sur fiches.*

Dès le début de la classe de Sixième, les élèves ont été accoutumés à travailler sur fiches. En Quatrième nous continuons d'utiliser cette méthode qui présente de nombreux avantages.

— Chaque élève travaille à son rythme.

— Il a constamment sous les yeux les renseignements dont il a besoin.

— Tous les élèves sont actifs.

— La fiche ne présente qu'un seul concept à la fois.

— Les fiches constituent un dossier personnel pour l'enfant.

— Un élève absent peut facilement combler son retard.

— Une fiche n'ayant pas donné satisfaction à l'usage peut être remplacée.

— Des fiches plus difficiles sont proposées aux meilleurs élèves.

Cette méthode de travail n'est pas une fin en soi. Elle est complétée par d'autres procédés pédagogiques.

— Certaines notions sont abordées par une discussion collective (ce procédé est plus fréquemment utilisé en Quatrième que dans les classes précédentes).

— A l'issue du travail sur fiches, une synthèse collective peut être élaborée par les élèves et le professeur.

— La structuration de la classe en équipes de 3 ou 4 peut être modifiée à l'occasion de problèmes ouverts.

Ces problèmes ouverts ont eu, par exemple, pour objet des questions de logique, d'algèbre (recherche d'exemples, de contre-exemples, recherche des tables de groupe parmi les carrés latins, etc.).

Outre le travail en classe, l'élève est amené, par moments, à chercher et à rédiger des exercices à la maison ; cela afin de perfectionner son expression écrite.

De tout ceci, il faut retenir qu'il n'y a pas « une » méthode mais des procédés très souples permettant le plein épanouissement de l'élève sans qu'il y ait de contrainte imposée par tel ou tel dogmatisme.

IV. — Difficultés, succès, échecs.

Il est certain que les nouveaux programmes de Quatrième présentent un écueil pour certains élèves. Alors qu'en Sixième et Cinquième on se limite à une approche naïve et intuitive de notions mathématiques, la classe de Quatrième marque une tendance très nette à l'axiomatique et dans certains cas, exige une démonstration de l'élève (notamment en géométrie). Cela est d'ailleurs normal. On constate qu'un nombre d'élèves, de plus en plus important, ressent la nécessité de « La » démonstration (par exemple, pour les propriétés des lois $+$ et $\times$ dans $\mathbb{Q}$ les enfants ne se contentent plus d'exemples numériques mais raisonnent à partir de l'expression générale d'un rationnel).

En géométrie des propriétés ont été établies à partir du théorème de

Chasles, de façon rigoureuse pour certains, de manière encore « intuitive » par d'autres.

On voit de nouveau surgir ce décalage entre les élèves à propos de la résolution d'équations dans un groupe. Beaucoup ont compris, une fois pour toutes, que le processus était le même et sont capables d'adapter à chaque cas particulier la méthode générale. Pour d'autres, au contraire, les conditions du problème sont contingentes et ils n'arrivent pas à dégager le modèle mathématique.

Il faut cependant signaler que, malgré les difficultés rencontrées, difficultés qui existaient par ailleurs dans l'enseignement des anciens programmes, il se dégage des expériences présentes certains faits qui nous laissent penser que nous sommes dans la bonne voie. Il suffit, pour cela, de constater que les enfants sont toujours parfaitement conscients des structures dans lesquelles ils opèrent. Il n'y a plus formation de stéréotypes provoquant par la suite les blocages intellectuels que nous déplorons tous. En algèbre, l'élève reste parfaitement maître de ses calculs; il n'y a pas mécanisation, mais réflexion à partir des propriétés de telle ou telle structure. En géométrie, notre expérience est trop récente et trop partielle pour tirer des conclusions définitives. Il s'agit, pour l'instant, d'établir un compromis entre, d'une part, l'accession aux structures importantes de la géométrie affine puis métrique, et d'autre part, l'aspect utilitaire dont ne peut se dégager cette partie de la mathématique. C'est une des raisons qui nous a amené à conduire ce programme en essayant de satisfaire ces deux points de vue.

A Limoges

Expérimentation en 4e.

Dans l'Académie de Limoges, depuis trois ans, de la Sixième à la Quatrième, des expérimentations existent dans deux Lycées de filles (5 classes), un C.E.S. (3 classes) et deux C.E.G. L'équipe comprend, sous la direction de M. Couty, professeur à l'Université de Limoges, un inspecteur-professeur, quatre certifiés, quatre P.E.G.C., un maître-auxiliaire. L'expérimentation est conduite dans six classes dites I et sept classes dites II.

Travail de préparation. L'équipe se réunit régulièrement le vendredi de 20 h 30 à 23 heures (ou plus) tous les quinze jours, avec la participation parfois de l'Inspecteur Pédagogique Régional. Ces réunions ont deux buts essentiels :

— faire le point sur les succès ou les échecs de la quinzaine passée; pour les causes d'échecs, la participation aux réunions d'un psychologue scolaire aurait peut-être rendu service;

— concevoir les fiches pour la quinzaine à venir.

La progression pour assurer l'étude complète du programme pendant l'année scolaire est sans cesse revue et aménagée selon les intérêts et les possibilités des enfants.

Après chaque réunion, les fiches étudiées, mises au point sont confiées au Centre Régional de Documentation Pédagogique qui assume la lourde tâche matérielle de diffuser les fiches pour les élèves des classes d'expérimentation.

Quelques constatations.

1° Élèves. — Si les fiches pour la classe de Sixième permettaient au professeur d'être un animateur de travail individuel, le progrès vers l'abstraction l'oblige au niveau de la Quatrième à agir plus souvent pour organiser des synthèses collectives pour obtenir un travail de pensée de plus en plus rapide.

A ce propos, nous déplorons en Quatrième que les élèves des classes II aient le même horaire que les classes I. Si nous pouvions disposer d'une heure de travail dirigé ou de soutien pour ces élèves, ils auraient moins de difficultés pour comprendre, puis utiliser les modèles mathématiques. Nous avons constaté que la méthode inductive, avec une approche plus lente des concepts, avait d'heureux effets sur les élèves moyens.

Les fiches sont collationnées dans un cahier sur lequel de temps en temps des lois générales sont inscrites. L'utilisation du cahier d'essai réservé à la mathématique, a très souvent rendu d'importants services pour consolider les connaissances des élèves moyens.

Le contrôle des connaissances est assuré par quelques fiches-tests, données dans toutes les classes d'expérimentation à des dates variables, car l'expérience nous a montré que pour certains concepts quelques classes allaient plus vite que d'autres, alors que parfois l'inverse se produisait. La remarque ci-dessus pour les classes II entraîne le professeur à limiter, pour celles-ci, les applications à des exercices numériques surtout.

2° Professeurs. — Le travail de conception en commun a permis d'éviter des hésitations dans les classes, de promouvoir un enseignement cohérent avec ses qualités et aussi ses défauts. Parfois, en ce qui concerne les démonstrations, nous avons été un peu ambitieux, en vue de la continuité avec les classes du second cycle. Certaines classes I ou II d'ailleurs ont joué le jeu, mais on a été obligé de revenir à la simple description du modèle mathématique dans d'autres classes. Nous restons persuadés qu'il faut obliger les enfants dès la Sixième, à user de la démonstration dans des cas très simples sur les ensembles $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Par exemple dans $\mathbb{Z}$:

$$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$$

alors que cette propriété est admise dans $\mathbb{N}$.

Notre travail nous paraît être une réussite en ce qui concerne le début du programme de Quatrième sur les groupes, nous avons obtenu la créativité des enfants et une recherche convenable de cette structure. En calcul numérique, nous avons l'impression d'une efficacité certaine, mais il faut attendre la classe de Seconde pour se prononcer définitivement. L'approche des réels par les encadrements, les intervalles a donné lieu à l'étude de lois de composition, interne ou externe dans l'ensemble de ces objets. Nous ne pensons pas avoir pleinement réussi. Pour les résolutions d'équations et la géométrie les enfants ont retrouvé un meilleur rythme de travail.

3° Aspect matériel. — A la joie du travail en commun succède toujours la rédaction des fiches, l'impression, la correction des épreuves. Après trois années, nous constatons que malgré beaucoup de précautions, sans ménager notre temps, nous avons laissé quelques imprécisions dans nos fiches. Certaines imprécisions sont issues de nos réunions, mais le plus souvent ce sont les élèves de quelques classes qui nous les ont révélées pendant leurs travaux.

Notre expérience montre qu'il est nécessaire que les établissements scolaires assurent une partie de la duplication pour que le travail par fiches soit efficace afin que les professeurs ne soient pas astreints à un travail matériel trop lourd.

Mise en œuvre du programme.

Les hypothèses de travail de l'équipe pour l'application du programme défini par la Commission Ministérielle ont été les suivantes :

— Continuité de l'enseignement mathématique de l'école élémentaire au second cycle;

— Construction des ensembles de nombres, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{R}$, par chaque enfant selon son propre rythme;

— Approche des notions par des manipulations physiques ou intellectuelles;

— Exercices d'application pour consolider les connaissances.

Ce qui revient à ce qu'a fort bien expliqué Gilbert Walusinski dans un *Bulletin de l'A.P.M.* il y a quelques années. L'enfant construira ses propres mathématiques selon le schéma suivant :

• de l'observation à la notion,

• de la notion à la théorie,

• de la théorie à l'application,

• de l'application à de nouvelles observations, et le cycle d'étude recommence.

L'enseignement donné s'est orienté dans deux directions complémentaires : affiner l'outil mathématique et vérifier dans les applications le bien fondé de cet affinage (applications dans les domaines des diverses sciences physiques et humaines). Nous avons essayé de discerner ces deux voies à chaque instant.

La continuité avec l'enseignement élémentaire se situe au niveau du numérique, et l'on peut regretter que la classe de Quatrième n'use pas plus des « opérateurs numériques » liés à $\mathbb{Q}$ pour présenter $\mathbb{R}$. En effet, les enfants de l'école élémentaire jouent avec plaisir avec cette notion de fonction dans des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$.

Les démonstrations, qu'elles soient algébriques ou géométriques, assurent une approche très intéressante des programmes du second cycle.

En ce qui concerne les ensembles de nombres, si la construction de $\mathbb{Z}$ en Sixième et Cinquième à partir de $\mathbb{N}$ a été aisée (réserves à faire au sujet de la multiplication dans $\mathbb{Z}$), la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{D}$ ne nous a pas satisfait complètement, c'est-à-dire que les enfants se sont sentis plus mal à l'aise. Les remarques ci-dessous ont entraîné un redoublement d'attention de notre part afin de faire coïncider nos hypothèses de travail et la lettre du programme.

Pour l'étude des ensembles de nombres, nous voulions respecter les programmes et aussi nos hypothèses de travail qui peuvent se résumer dans le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & Z \arrow[dr] & & \\ N \arrow[ur] \arrow[dr] & & Q \arrow[r] & R \\ & Q_+ \arrow[ur] & & \end{tikzcd} \qquad \text{avec } D \subset Q$$

Les programmes ne parlent pas de $\mathbb{Q}$, nous n'avons pas fait une étude mathématique de cet ensemble; nous avons construit $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{D}$. Nous nous sommes heurtés à un certain nombre de difficultés, mais en même temps nous avons fait découvrir l'unité de la mathématique à nos élèves.

a) Nos élèves ont appris à poser à l'école élémentaire une division et à effectuer des divisions avec des nombres décimaux. La division leur apparaît toujours possible. Implicitement ils raisonnent dans un corps et non dans un anneau. Nous avions avantage à considérer pour eux, afin d'être plus précis sur les structures mathématiques, l'inclusion $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

b) Les décimaux sont plus faciles à manipuler que les rationnels à cause de leur écriture. Les calculs numériques sont faciles à présenter. Mais nous sommes amenés dans l'approche de $\mathbb{R}$ à résoudre des équations telles que :

$\frac{a}{b} = x \Leftrightarrow a = bx$ vraies uniquement dans $\mathbb{R}$, or, le calcul pratique pour les enfants se fait apparemment dans $\mathbb{D}$.

c) Mathématiquement, $\mathbb{R}$ est un corps commutatif parce que $\mathbb{Q}$ en est un. Nous avons dû affirmer dans le passage $\mathbb{D}$ à $\mathbb{R}$ un certain nombre de résultats, qui peuvent être démontrés dans $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\left.\begin{matrix} a > b \\ c > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac > bc$	$\left.\begin{matrix} a > b \\ c > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} ac > bc \\ c > 0 \end{matrix}\right.$	$\left.\begin{matrix} a > b \\ c > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} ac > bc \\ c > 0 \end{matrix}\right.$
$a = bx \Rightarrow \frac{a}{b} = x$	$a = bx \Leftrightarrow \frac{a}{b} = x$	$a = bx \Leftrightarrow \frac{a}{b} = x$
$\left.\begin{matrix} a = b \\ c \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac = bc$	$\left.\begin{matrix} a = b \\ c \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} ac = bc \\ c \neq 0 \end{matrix}\right.$	$\left.\begin{matrix} a = b \\ a \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} ac = bc \\ c \neq 0 \end{matrix}\right.$

Admettre ... $\Leftrightarrow$ ... pour les enfants, alors que nous ne pouvons étudier dans $\mathbb{D}$ ... $\Rightarrow$ ... n'a pas été facile.

d) Les enfants ont très bien compris, malgré quelques lourdeurs dans les calculs, les constructions selon les processus suivants.

En Sixième, puis Cinquième, nous avons fait apercevoir la construction de $\mathbb{D}$ considéré comme sous-ensemble de $\mathbb{Q}$. Actuellement, la construction de $\mathbb{Q}^+$ est amorcée à l'école élémentaire par l'intermédiaire des « opérateurs ». Ainsi, en Sixième et Cinquième, nous avons fait comprendre les constructions de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ (avec $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$) par le passage aux ensembles quotients. Cette méthode de travail a plu aux enfants.

En Quatrième, le respect du programme et le manque de temps nous ont obligés à abandonner en partie cette attitude, et nos élèves n'ont pas toujours compris.

e) La construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{D}$ a permis de consolider les techniques de calcul pour la division. Sur des exemples numériques, nous avons essayé de suggérer que le corps $\mathbb{R}$ devait sa structure plus à $\mathbb{Q}$ qu'à $\mathbb{D}$. Ainsi, nous avons montré les liens qui existent entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, non seulement dans le sens du programme où $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, mais dans le sens du schéma ci-dessus :

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}.$$

f) Sur le plan pratique, on montre que les ensembles construits à partir des classes d'équivalence forment une « collection » distincte de $\mathbb{R}$. Pour le physicien, c'est la différence entre le dénombrable et le « continu physique ». Sans aucun doute, la construction de $\mathbb{R}$ par les encadrements est bénéfique pour les applications physiques.

A titre d'exemples, nous présentons trois fiches :

1° en Cinquième, Ordre dans $\mathbb{Z}$;

2° en Quatrième, Ordre dans $\mathbb{D}$;

3° en Quatrième, une approche de la géométrie.

Notre jeu de fiches est disponible au C.R.D.P. de Limoges, 44, cours Gay-Lussac.

***

Ordre dans $\mathbb{Z}$ (classe de 5e).

I

On considère la relation R définie dans $\mathbb{Z}$ par :

$$\boxed{\begin{array}{c} a \mathrel{R} b \Leftrightarrow (\text{il existe un entier naturel } x, (x \in \mathbb{Z}^+) \\ \text{tel que : } a = b + x.) \end{array}}$$

1° Vérifier que : $12 \mathrel{R} 5$; $\overline{13} \mathrel{R} \overline{17}$; $4 \mathrel{R} 0$;
$0 \mathrel{R} \overline{5}$; $9 \mathrel{R} \overline{14}$; $\overline{7} \mathrel{R} \overline{7}$.

2° La relation R est-elle réflexive? Symétrique? Antisymétrique? Transitive? Comment appelle-t-on une telle relation?

Notation : $a \mathrel{R} b$ se notera $a \geqslant b$ et on lira : « a supérieur ou égal à b »
ou aussi $b \leqslant b$ et on lira : « b inférieur ou égal à a ».

II

Choisir cinq éléments de $\mathbb{Z}^-$, puis cinq éléments de $\mathbb{Z}^+$ et les comparer à 0 à l'aide de la relation R; que remarquez-vous?

1° Montrer que si $a \in \mathbb{Z}^+$, alors : $a \geqslant 0$.

2° Compléter : $0 = a + \ldots$
en déduire que si $a \in \mathbb{Z}^-$, alors : $a \leqslant 0$.

III

1° Pour deux éléments a et b, de $\mathbb{Z}$, on a nécessairement :

$$a \geqslant b \quad \text{ou} \quad a \leqslant b$$

Compléter par l'un des symboles : $\geqslant$ ou $\leqslant$ en justifiant chaque fois :

$17 \ldots 15$;	$11 \ldots 18$;	$12 \ldots 12$;	$22 \ldots 48$
$\overline{14} \ldots 29$;	$13 \ldots \overline{51}$;	$17 \ldots \overline{10}$;	$\overline{3} \ldots 20$
$\overline{16} \ldots \overline{4}$;	$\overline{22} \ldots \overline{6}$;	$\overline{43} \ldots \overline{80}$;	$\overline{7} \ldots \overline{2}$

Que remarquez-vous?

2° Comparer a et b lorsque :

$a \in \mathbb{Z}^+$ et $b \in \mathbb{Z}^-$ (on utilisera II).

3° Montrer que :

$$a \geqslant b \Leftrightarrow \text{opp}\ (a) \leqslant \text{opp}\ (b)$$

en déduire une méthode pratique pour comparer a et b lorsque $a \in \mathbb{Z}^-$ et $b \in \mathbb{Z}^-$.

Exemple : $a = \overline{35} \Rightarrow \text{opp}\,(a) = \ldots$ ⎫ $\text{opp}\,(a) \ldots \text{opp}\,(b)$
$b = \overline{52} \Rightarrow \text{opp}\,(b) = \ldots$ ⎭ donc $a \ldots b$

écrire d'autres exemples.

Montrer les propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} a \geqslant b \Rightarrow a + c \geqslant b + c \\ a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \geqslant d \Rightarrow a + c \geqslant b + d \end{array}}$$

Attention

Si $a \geqslant b$ et $c \geqslant d$, on peut avoir soit $a + c \geqslant b + d$
soit $a + c \leqslant b + d$

trouver un exemple dans chacun de ces cas.

IV

Compléter le tableau suivant :

a	opp (a)	plus grand des 2 nombres : a et opp (a) (justifier)
8		
$\overline{19}$		
$\overline{43}$		
0		
162		

Définition: le plus grand des deux nombres a et opp (a) s'appelle *valeur absolue* de a : on le note $|a|$.

Comparer $|a|$ et 0.

Compléter : si $a \in \mathbb{Z}^+$ alors $|a| = \ldots$
si $a \in \mathbb{Z}$ alors $|a| = \ldots$

***

Exercices d'application.

I

Classer dans l'ordre croissant les nombres :

$7,\ \overline{18},\ \overline{24},\ 0,\ 2,\ 24,\ \overline{45},\ 3,\ \overline{2}$

II

Écrire l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}$ vérifiant :

1) $3 \geqslant x$

2) $\bar{7} \leqslant x$

3) $3 \geqslant x$ et $\bar{7} \leqslant x$

III

On considère la relation S de source $\mathbb{Z}$, de but $\mathbb{Z}^+$ et de lien verbal : « a pour valeur absolue ».

1) S est-elle une application? Une bijection?

2) Déduire de S une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$; préciser son lien verbal et donner des exemples de classes d'équivalence.

Ordre dans $\mathbb{D}$ (classe de 4[e]).

I. — Définition.

• Soit la relation R définie dans $\mathbb{D}$ par $a \mathrel{R} b \Leftrightarrow$ (il existe un élément x de $\mathbb{D}^+$ tel que $a = b + x$).

$$\mathbb{D}^+ = \{a \times 10^n / a \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

• Montrer que R est une relation d'ordre dans $\mathbb{D}$.

• Notation :

$a \mathrel{R} b$ se note $a \geqslant b$. On lit « a est supérieur ou égal à b » quels que soient a et b de $\mathbb{D}$: $a \geqslant b \Leftrightarrow b \leqslant a$ « $b \leqslant a$ » se lit « b est inférieur ou égal à a ».

• Montrer que, quels que soient a et b de $\mathbb{D}$:

$$a \geqslant b \Leftrightarrow a - b \geqslant 0$$

II. — Compléter le tableau suivant :

a	b	c	$a-b$	$a \geqslant b$ ou $a \leqslant b$	$a+c$	$b+c$	$(a+c)$ — $(b+c)$	$a+c \geqslant b+c$ ou $a+c \leqslant b+c$	$a-c$	$b-c$	$(a-c)$ — $(b-c)$	$a-c \geqslant b-c$ ou $a-c \leqslant b-c$
16,54	4,2	41,134										
7,$\bar{1}$23	3,7	$\bar{0}$.08										
12,$\bar{0}$08	5,$\bar{4}$2	23										
93,2991	104	1$\bar{4}$,12										
$\bar{1}$7	$\bar{2}$1	32										

• Comparer les résultats des colonnes 5, 9 et 13.

- **Démonstrations.**

— Calculer :

$$(a+c)-(b+c)$$
$$(a-c)-(b-c)$$

— Compléter :

$$a \geqslant b \Leftrightarrow a-b \ldots \Leftrightarrow (a+c)-(b+c) \ldots \Leftrightarrow a+c \ldots b+c$$

même travail pour $a-c$ et $b-c$.

- Conclusion :

Quels que soient a, b et c de $\mathbb{D}$:

$$a \geqslant b \Leftrightarrow a+c \ldots \Leftrightarrow a-c \ldots$$

- En déduire que, quels que soient a, b, c, d de $\mathbb{D}$:

$$(a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \geqslant d) \Rightarrow (a+c \geqslant b+d)$$

III. — Compléter le tableau suivant :

a	b	c	$a-b$	$a \geqslant b$ ou $a \leqslant b$	ac	bc	$ac-bc$	$ac \geqslant bc$ $ac \leqslant bc$
98	43	11						
$4\overline{4}$	$\overline{88}$	2,5						
$5\overline{1}$	18	$\overline{9}$						
72	168	125						
$1\overline{9}$	$2\overline{8}$	0,001						
37,1	$4\overline{3},03$	$\overline{4}$						
$1\overline{7}$	19,14	1 000						
49,273	$7,\overline{12}88$	0						

- Comparer les colonnes 5 et 9.
- **Démonstrations :**

— $(a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \geqslant 0) \Rightarrow (a-b \ldots \quad \text{et} \quad c \geqslant 0)$

$(a-b \quad \text{et} \quad c \geqslant 0) \Rightarrow (a-b)c \ldots$ car ...

$(a-b)c \ldots \Rightarrow ac-bc \ldots$ car ...

$ac-bc \ldots \Rightarrow ac \ldots bc$ car ...

Démontrer :

— $(a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant 0) \Rightarrow \ldots$

• **Conclusion.**

Quels que soient a, b, et c de $\mathbb{D}$:

$$(a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \geqslant 0) \Rightarrow$$
$$(a \geqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant 0) \Rightarrow$$

IV. — Valeur absolue.

• **Définition :**

On appelle valeur absolue de a ($a \in \mathbb{D}$) le plus grand de deux nombres a et $\boxed{a}$ (opposé de a).

Notation $|a|$.

Quel que soit a de $\mathbb{D}$:

$$a \in \mathbb{D}^+ \Rightarrow |a| = a$$
$$a \in \mathbb{D}^- \Rightarrow |a| = \boxed{a}.$$

• **Compléter :**

x	y	$x - y$	$\lvert x\rvert$	$\lvert y\rvert$	$\frac{\lvert x}{y\rvert}$	$\frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$	$\frac{\lvert\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert\rvert}$	$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	$x + y$	$\lvert x+y\rvert$	α	β

(α) Classer dans l'ordre croissant les nombres des colonnes 6, 8, 9.

(β) Classer dans l'ordre croissant les nombres des colonnes 9 et 11.

Une approche de la géométrie (classe de 4e).

I

1° Rappel : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples de nombres réels.

2° a) E est une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\mathrm{E} = \left\{(a\,;\,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Big/ \begin{matrix} a = 2\,x \\ b = 3\,x \end{matrix}\right\}$$

x pouvant prendre n'importe quelle valeur, compléter à l'aide l'un des signes : $\in$; $\notin$;

$(6;\ 9) \ldots E \qquad (18;\ 27) \ldots E \qquad (32;\ 45) \ldots E$

$(168;\ 252) \ldots E \qquad \left(\frac{2}{3};\ 1\right) \ldots E \qquad \left(\frac{1}{5};\ \frac{2}{7}\right) \ldots E$

Donner cinq éléments de E (autres que ceux déjà trouvés).

b) F est une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dont les éléments sont des couples du type $(ax\,;\ bx)$ où a et b sont *fixés* et où x est variable (x peut prendre n'importe quelle valeur).

Compléter, en justifiant chaque réponse, à l'aide de $\in$ ou $\notin$.

a) $(0;\ 0) \ldots$ F; *b*) $(a\,;\ b) \ldots$ F; *c*) $(2a\,;\ b) \ldots$ F.

c) Trouver les deux valeurs entières les plus petites possibles de a et b sachant que : $(12;\ 15) \in$ F.

d) G est l'ensemble des couples du type : $(8y\,;\ 12y)$, y *variable ;* comparer G et E.

II

A. — *a*) D_1, partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples du type $(x\,;\ 2x - 3)$ x *variable :*

— Donner cinq éléments de D_1.

— Compléter : $(\ldots;\ 5) \in D_1$

$(\ldots;\ \bar{1}) \in D_1$

$(3;\ \ldots) \in D_1$ $(\ldots;\ 19) \in D_1$

$(\bar{1}\bar{7};\ \ldots) \in D_1$ $\left(\frac{7}{5};\ \ldots\right) \in D_1$

$\left(\frac{\bar{1}}{2};\ \ldots\right) \in D_1$.

b) D_2 est l'ensemble des couples du type $(u\,;\ u + 1)$ u *variable :*

— Donner cinq éléments de D_2.

— Compléter : $(0;\ \ldots) \in D_2$

$(147;\ \ldots) \in D_2$

$(\ldots;\ 0{,}7) \in D_2$

$(4;\ \ldots) \in D_2$

Existe-t-il au moins un couple commun à D_1 et D_2?

B. — Déterminer cinq éléments de chacune des parties de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définies ci-dessous :

D_3 : ensemble des couples du type $\left(x,\ \frac{x}{2}\right)$, x variable.

D_4 : ensemble des couples du type $(u,\ u - 1)$, u variable.

c) On veut déterminer l'intersection des parties D_5 et D_6 définies par :
D_5 : ensemble des couples $(x, x - 1)$.
D_6 : ensemble des couples $(y, 5 - y)$.
Si l'intersection n'est pas vide, alors tout couple commun à D_5 et D_6 vérifie obligatoirement $x = y$; et $x - 1 = 5 - y$.
Ce qui amène a : $x - 1 = 5 - x$.
Résoudre l'équation $x - 1 = 5 - x$ et trouver le *seul* couple appartenant à l'intersection de D_5 et D_6.

Exercices :

Déterminer l'intersection des parties de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivantes :

1° D_1 : ensemble des couples $(x, x + 1)$ et D_2 ensemble des couples $(y, 2y - 4)$.

2° D_3 : $\left(x, \frac{x}{2}\right)$ et D_4 : $(x, 6 - x)$.

3° D_5 : $\left(x, \frac{x}{2} + 1\right)$ et D^6 : $\left(x, \frac{x}{2} + 5\right)$. Remarque sur $D_5 \cap D^6$?

4° D_7 : $(x, 1 - x)$ et D^8 : $\left(\frac{x}{3}, x - 7\right)$.

5° D^9 : $(x, 6x + 8)$ et D_{10} : $(x, 5x - 19)$.

6° D_{11} : $(x, 3x - 7)$ et D_{12} : $\left((x, 3x + \frac{5}{3}\right)$.

7° D_{13} : $(x, x - 7)$ et D_{14} : $(x, x - 7)$.

On cherche à répondre aux mêmes questions que dans les exercices précédents pour les parties.

$$D : (x, ax + 1) \qquad D' : (x, a'x + 4)\ a,\ a' \text{ sont fixés.}$$

— Quelle condition a et a' doivent-ils vérifier pour que $D \cap D' = \varnothing$ (retrouver ce cas dans les exemples précédents)?

— Quelle condition a et a' doivent-ils vérifier pour que $D \cap D' \neq \varnothing$ (même remarque)?

On considère les 2 parties de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$D : (x, ax + b) \qquad D' : (x, a'x + b')$$

En choisissant les valeurs de a, b, a', b', inventer :

a) Trois exemples où l'intersection de D et D' contient un seul point.

b) Trois exemples où l'intersection est vide.

c) On choisit : $b = b'$. Donner trois exemples à votre choix. Les trois intersections trouvées ont-elles un caractère commun? Lequel?

Justifier le résultat en cherchant l'intersection de :

$$D : (x, ax + b) \quad \text{et} \quad D' : (x, a'x + b)$$

Compléter : $a \neq a'$ $\quad D \cap D' =$

$a = a'$ $\quad D \cap D' = \dots$

$D = \dots$

Compléter alors ce tableau résumé des résultats précédents :

$$D \to (x, ax + b)$$
$$D' \to (x, a'x + b')$$

$a \neq a'$	$a = a'$ et $b \neq b'$	$a = a'$ et $b = b'$
intersection contient.......	$D \cap D' = \dots$	$D \cap D' = \dots$

Une partie $D \to (x, ax + b)$ contient les points $(3; 4)$ et $(5; 8)$: On veut calculer a et b.

Indication : *a*) $x = 3 \Rightarrow a \times 3 + b = 4$

b) $x = \dots \Rightarrow a \times \dots + b = \dots$

Existe-t-il plusieurs valeurs possibles pour a et b?
Même question pour D' $(x, ax + b)$ contenant les points $(0; 1)$ et $(2; 2)$.

D'' $(x, ax + b)$ contenant les points $(0; 3)$ et $(6; 0)$.

Exercices: Déterminer $D : (x, ax + b)$ dans les cas suivants :

1° $\quad (0; 1) \in D$ et $(3; 2) \in D$

2° $\quad (\bar{1}; 0) \in D$ et $(3; 1) \in D$

3° $\quad (1; 1) \in (D)$ et $(2; 2) \in D$

4° $\quad (3; 3) \in (D)$ et $(5; \bar{5}) \in D$

— Existe-t-il plusieurs possibilités dans chacun de ces quatre cas?
— Imaginer d'autres exemples (au moins 4).
— Combien trouvez-vous de possibilités à chaque fois?

Conclusion : Une partie $D \to (x, ax + b)$ est parfaitement connue si on connaît *deux* de ses éléments.

Autre énoncé : Il existe une seule partie D $(x, ax + b)$ contenant deux « points » donnés.

A Montpellier

L'équipe de Montpellier trouve les programmes trop longs. Elle développe son argumentation dans un premier rapport. Elle complète celui-ci par des remarques sur le programme de géométrie.

L'incertitude sur les programmes est à l'origine des tâtonnements qui caractérisèrent le début de l'expérience dans nos classes de Quatrième.

Après avoir travaillé trois semaines sur le projet de programme datant de juin 1970, nous avons poursuivi l'expérience d'après le projet mis au point en octobre de la même année et finalement, l'esprit du dernier projet (février 1971) en ce qui concerne la géométrie n'est plus tout à fait celui de l'avant-dernier projet qui a guidé notre expérience.

Toutes ces hésitations font que nous ne sommes pas certains de pouvoir, d'ici la fin de l'année scolaire, tester dans sa totalité le programme de Quatrième. Mais, par contre, nous avons abordé dans nos classes certains points qui ont disparu du dit programme.

Contenu de l'expérience et progression.

A) Arithmétique. Algèbre.

1° Arithmétique dans $\mathbb{Z}$: quatre semaines, horaire complet (4 h par semaine).

2° Les décimaux : trois semaines, horaire complet.

3° Les réels : depuis la mi-novembre, nous travaillons à raison de 2 heures par semaine sur les réels.

Au cours du troisième trimestre, il nous restera à étudier :

— puissances d'un réel non nul,
— notion de groupe,
— fonctions polynômes.

B) Géométrie.

Nous avons commencé à étudier la géométrie à la mi-novembre à raison de deux heures par semaine.

Au cours du troisième trimestre, il restera encore à étudier, pour le groupe le plus avancé :

— symétrie centrale,
— parallélogrammes,
— équipollence de bipoints; vecteurs;
— translations et addition des vecteurs;
— multiplication d'un vecteur par un réel;
— repères du plan; coordonnées cartésiennes.

Réussites et difficultés.

A) Arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

Manque d'enthousiasme et d'intérêt des élèves pour des questions déjà abordées dans $\mathbb{N}$, en Cinquième.

B) Décimaux et réels.

D'une façon générale, les décimaux et les réels ont beaucoup plu aux élèves, si ce n'est que parfois les calculs sont un peu longs donc fastidieux et l'usage des machines de bureaux dans cette étude se trouve alors pleinement justifié.

Dans l'ensemble, les décimaux peuvent figurer au palmarès des réussites et les réels ont été assez facilement assimilés.

Notons cependant les difficultés pour certains élèves :

— à reconnaître dans $0,\underbrace{000\ldots01}_{n \text{ chiffres}}$ l'inverse de 10^n;

— à admettre, au cours de l'introduction des réels, que l'intersection des segments emboîtés se réduit à un singleton;

— à comprendre la double représentation de certains réels tels que $1{,}499\ldots9\ldots$, alias $1{,}500\ldots0\ldots$;

— à surmonter les nombreux obstacles auxquels ils se sont heurtés dans l'étude de l'inverse d'un réel non nul. [Il est vrai que les deux derniers projets de programme demandent d'admettre que tout réel non nul a un inverse. Si en règle générale, nous n'aimons pas beaucoup admettre des résultats ce qui choque souvent les jeunes élèves, nous pensons que dans ce cas particulier, la prise de position du programme est justifiée];

— à ne pas s'affoler en voyant réapparaître avec les quotients le fantôme des fractions mal digérées à l'école primaire.

C) Géométrie.

L'introduction de la géométrie au niveau de Quatrième pose plus de problèmes que celle des réels. Les difficultés sont de deux ordres :

1° Faire sentir aux élèves les distinctions entre constatations, axiomes et démonstrations.

2° Faire comprendre les débuts de la géométrie affine, programme ambitieux avec des élèves de cet âge.

Signalons les points qui nous ont paru les plus délicats :

— le plan à quatre éléments, qui heureusement disparaît dans le dernier projet de programme;

— les premières démonstrations de théorèmes relatifs au parallélisme, faisant appel au raisonnement par l'absurde;

— les projections qui, sans être très difficiles, nécessitent de nombreuses manipulations ;

— la définition indigeste de la droite affine réelle;

— la mesure algébrique d'un bipoint par rapport à une projection du repère de son support sur une parallèle à ce support;

— la traduction d'une formule lorsque sont modifiés les noms des lettres qui y figurent, quelle que soit la signification de ces lettres (points, constantes...). Notons à ce sujet une erreur pédagogique qui est à l'origine de quelques-unes de nos difficultés. Très souvent, nous avons désigné le repère choisi sur une droite affine réelle par (O, I) c'est-à-dire qu'au point O nous avons associé le réel 0. Les élèves ont alors été un peu perdus lorsqu'il a fallu faire intervenir des repères tels que (A, B), (B, C)...

Parmi les réussites, signalons :

— la relation de Chasles que nous avons volontairement abordée sans aucune représentation matérielle;

— la notion de barycentre de deux points. [Par contre, les justifications de la construction de barycentres sont assez délicates];

— l'axiome de Thalès (énoncé proposé dans l'avant-dernier projet de programme) et la définition du plan affine.

Remarque

Il nous a semblé artificiel d'introduire la droite affine sans parler des applications affines donc en premier lieu des applications linéaires.

Ces applications linéaires ont révélé la nécessité de donner des contre-exemples variés. Pour les élèves, il semble tout à fait naturel que :

$$f(x + x') = f(x) + f(x')$$
$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Méthodes de travail.

Comme en Sixième et Cinquième, les élèves travaillent sur les fiches mises au point par les différents groupes des expérimentateurs. Ces fiches sont conçues et utilisées de façon différentes par les maîtres mais également à l'intérieur d'une même classe suivant la leçon proposée.

— Distribution avec ou sans commentaires de la fiche aux élèves travaillant individuellement ou en groupes.

— Lecture commentée de la fiche remplie en commun.

— Explication préalable de la leçon puis distribution des fiches qui reprennent les points les plus importants de cette leçon, fiches que les élèves doivent alors compléter soit en classe, soit à la maison.

— Dans la même optique, distribution après le cours d'un résumé rappelant démonstration et résultats essentiels, les élèves n'ayant rien à compléter.

Conclusion.

En conclusion, arithmétique et algèbre dans leur ensemble, sont assez facilement assimilables. Bien que plus ardue, la géométrie aussi peut être comprise par des élèves de Quatrième et constituer une bonne base de travail, moyennant certaines conditions.

— Exiger des élèves la connaissance parfaite des axiomes, définitions et principaux théorèmes rencontrés.

— Alléger le contenu du programme.

* Le professeur doit disposer du temps nécessaire :

— pour faire faire de nombreuses manipulations préparant au choix des axiomes,

— pour revenir souvent sur des notions délicates,

— pour enseigner aux élèves comment on déduit,

— pour leur apprendre à rédiger correctement,

— pour les entraîner au calcul algébrique et au calcul mental.

* Les élèves doivent disposer du temps nécessaire :

— pour étudier leurs leçons,

— pour avoir le temps d'assimiler une notion avant d'en aborder une autre,

— pour ne pas perdre l'habitude de réfléchir et se contenter d'emmagasiner.

Les programmes officiels veulent ignorer que :

— dans de nombreux établissements, le mois de juin est sérieusement amputé par différents examens,

— les Conseillers pédagogiques doivent confier leurs classes à de jeunes professeurs stagiaires, ce qui ralentit le rythme de la classe,

— les effectifs trop importants de la plupart des classes sont une cause de ralentissement.

Il nous paraît également très important de rappeler que le travail exigé d'un élève de Quatrième est sans commune mesure avec ce qui lui a été demandé en Sixième et Cinquième. C'est à ce niveau que les élèves optent pour une deuxième langue vivante et qu'un certain nombre étudie en plus le latin.

A un âge où souvent les enfants sont fatigués par la croissance et la formation, le professeur de mathématiques va, lui aussi, exiger plus de devoirs à la maison, un effort d'abstraction considérable en classe, des leçons plus substantielles.

Allègements proposés

Pour ne pas détruire l'homogénéité du programme, en plus de la suppression de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$, nous proposons :

— de reporter en Troisième les exemples de fonctions polynômes et le calcul sur les polynômes,

— de supprimer les exercices sur les barycentres de deux points, projections de barycentres, construction de barycentres.

Quelques remarques sur la géométrie en 4e.

G. AGUADO,
Professeur au Lycée du Mas-de-Tesse,
Montpellier.

Introduction.

Il a semblé à l'équipe des expérimentateurs de Montpellier que le point essentiel de la classe de Quatrième en géométrie est de bien faire sentir qu'il n'y a aucun point commun entre des constatations faites sur des « figures » et des déductions.

Nous avons donc cherché à montrer aux élèves que les constatations faites sur des figures permettent de choisir un certain nombre de règles du jeu, appelées en mathématiques axiomes, à partir desquelles ils pourront faire des déductions. Autrement dit, nous avons fait valoir que, le choix des axiomes étant arrêté, ils ne peuvent plus constater.

Bien entendu, il nous semble qu'en Quatrième, il ne peut être question d'interdire de faire des dessins. Cependant, ces dessins permettent de choisir un itinéraire parmi plusieurs possibilités, pour déduire à partir des axiomes.

Nous pensons que si, au départ de l'apprentissage de la géométrie, les distinctions entre :

— constatations,
— choix des axiomes,
— déductions,

sont nettement dégagées, alors il n'y aura plus de confusion dans l'esprit des élèves.

Ces considérations ont fait que nous nous sommes interdit de mettre dans une même fiche des parties « constatations » et des parties « déductions ». Pour chaque question, nous nous sommes efforcé d'établir trois types de fiches.

1° Une fiche de constatations, comportant éventuellement des constructions géométriques, c'est-à-dire tout ce qui se rapproche du dessin, de ce que nous avons appelé peut-être improprement des objets matériels.

2° Une fiche d'axiomes, montrant le choix des règles adoptées dans la théorie mathématique du cours.

3° Des fiches de déductions, c'est-à-dire de démonstrations faites à partir de ces axiomes, ou à partir d'axiomes, définitions et théorèmes acquis antérieurement.

Voici par exemple, et de façon schématique, comment nous avons abordé l'axiome de Thalès dans nos classes expérimentales.

Fiche n —1

Projection d'une droite sur une droite.

1° *Rappels.*

Dans ce paragraphe, nous avons extrait d'une fiche précédemment étudiée, quelques rappels relatifs à la projection.

2° *Tracés de parallèles.*

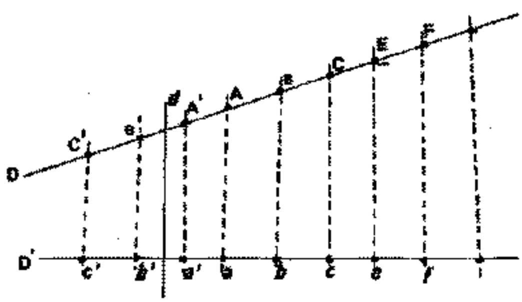
a) Construction classique à partir de la *règle* et de l'*équerre*.

Ce sont de simples manipulations à partir d'une « recette », le bagage mathématique des élèves ne leur permettant pas d'en comprendre le déroulement.

b) Construction de parallèles « équidistantes » avec intervention d'un nouvel outil le *compas* pour graduer une droite.

3° *Abscisse de la projection d'un point.*

On fait tracer aux élèves deux droites quelconques D et D′, parallèles ou non, du plan matériel et une troisième droite d, non parallèle à D et non parallèle à D′.



A l'aide d'un compas, D est alors munie d'une graduation que l'on projette ensuite sur D′ parallèlement à d. (Nous entendons, bien sûr, par graduation une graduation « équidistante ».)

On fait deux constatations :

a) A l'aide d'un compas, on vérifie qur : $\{a, b, c, \ \ldots, a', b', c', \ldots\}$ est une graduation de D′.

b) Si sur D on choisit un repère et si sur D′ on choisit comme repère la projection du précédent, un point de D et sa projection sur D′ ont même abscisse. (A l'aide du schéma, nous avons considéré de nombreux exemples dans différents repères.)

Fiche n

Axiome de Thalès.

Cela s'avérant nécessaire, nous décidons d'ajouter une nouvelle règle du jeu aux deux règles qui ont été précédemment admises (axiomes d'incidence) et cette nouvelle règle du jeu porte le nom d'axiome de Thalès que nous avons énoncé ainsi :

d étant une droite non parallèle à deux droites quelconques D et D', si l'on projette parallèlement à d, la droite D munie d'un repère (A, B) sur la droite D' munie du repère (A', B') projection de (A, B), alors tout point M de D et sa projection M' sur D' ont même abscisse.

On peut en déduire ensuite la définition du plan mathématique donné en annexe du dernier projet de programme.

Remarque.

Nous avons fait cette leçon conformément au $p^{\text{ième}}$ projet de programme qui suggérait la présentation de l'axiome de Thalès sous cette forme d'ailleurs aisément assimilable par les élèves. Depuis, le $(p+1)^{\text{ième}}$ projet propose de présenter cet axiome sous une nouvelle forme.

On peut d'ailleurs passer facilement de la première forme à la seconde.

Les élèves savent que sur une droite D' :

$\overline{mn}_{(a', b')} = k.\overline{mn}_{(a, b)}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.

De la première forme de l'axiome de Thalès, on déduit :

$\overline{mn}_{(a, b)} = \overline{\mathrm{MN}}_{(A, B)}$ (M, N, A, B appartenant à une droite D).

En définitive :

$\overline{mn}_{(a', b')} = k.\overline{\mathrm{MN}}_{(A, B)}$ qui est la seconde traduction de l'axiome de Thalès et qui deviendrait ainsi un théorème.

Fiche $n+1$

Applications de l'axiome de Thalès.

(Nous ne développerons ici que la première application).

1° Projection de barycentres.

(La notion de barycentre est déjà connue des élèves).

p désigne la projection d'une droite D sur une droite D' parallèlement à une droite d (d non parallèle à D et non parallèle à D').

D est munie d'un repère (a, b) et on choisit comme repère de D′ la projection (a', b') de (a, b). A, B, M sont trois points de D se projetant sur D′ respectivement en A′, B′, M′.

On suppose que M est le barycentre des deux points A et B affectés respectivement des coefficients α et β. Les élèves savent alors traduire cette hypothèse par la relation $\alpha.\overline{MA}_{(a,\,b)} + \beta.\overline{MB}_{(a,\,b)} = 0$.

On se propose de démontrer que M′ est le barycentre des points A′ et B′ affectés des coefficients α et β. Grâce à l'axiome de Thalès, les élèves, guidés par la fiche, établissent que :

$$\alpha.\overline{MA}_{(a,\,b)} + \beta.\overline{MB}_{(a,\,b)} = \alpha.\overline{M'A'}_{(a',\,b')} + \beta.\overline{M'B'}_{(a',\,b')}$$

et par conséquent que :

$$\alpha.\overline{M'A'}_{(a',b')} + \beta.\overline{M'B'}_{(a',\,b')} = 0$$

puisque

$$\alpha.\overline{MA}_{(a,\,b)} + \beta.\overline{MB}_{(a,\,b)} = 0$$

On fait ensuite remarquer aux élèves que seul le souci d'une démonstration simple utilisant l'axiome de Thalès sous sa première forme a présidé au choix du repère de D′ mais qu'en fait, la conclusion serait la même quel que soit le repère de D′ puisqu'ils savent qu'un changement de repère ne modifie pas le barycentre de deux points affectés de coefficients donnés.

Bien entendu, avant de poursuivre, on passe à la mise en forme du théorème résultant de la démonstration précédente.

La projection du milieu d'un bipoint apparaît comme un cas particulier de la projection de barycentre.

2° Application de l'axiome de Thalès au triangle et sa réciproque.

3° Construction de barycentres de deux points.

L'axiome de Thalès permet de faire découvrir aux élèves une construction du barycentre de deux points affectés de coefficients donnés, construction qui n'est pas une simple recette de la construction des parallèles « équidistantes»

Information :

DATES de parution et « THÈMES » des prochains bulletins :

— Septembre 1971 : Après les journées de Toulouse.
— Décembre 1971 : Sur l'enseignement élémentaire.
— Février 1972 : « Interdiscipline ».
— Avril 1972 : Les journées de l'A.P.M. (Caen, 11-12-13 mai).
— Juin 1972 : Bulletin spécial sur les classes de Troisième.

A Lyon

Trois équipes lyonnaises nous ont fait parvenir un rapport.

L'un d'eux insiste sur la modification pédagogique (groupes de niveaux) ayant accompagné l'expérimentation ; le troisième complète l'article sur la géométrie (cf. p. 350) rédigé par l'I.R.E.M. de Lyon.

Expérimentation en 4e.

Mme Morel,
Lycée Saint-Just, Lyon-5e.

Depuis deux ans, nous poursuivons, en Quatrième, une expérience d'enseignement des mathématiques modernes. L'an dernier, le programme de la Commission Lichnerowicz ayant été connu trop tard, nous avons expérimenté le programme d'algèbre. Le programme de géométrie a été vu au début de cette année, les élèves étant alors en Troisième. Cette année, nous avons pris comme base les nouveaux programmes ; nous utilisons les fiches Galion.

Depuis la rentrée 1969, plusieurs changements sont intervenus par rapport à l'enseignement traditionnel de notre lycée :

— Il s'agit de nouveaux programmes faisant suite à un enseignement reçu en Sixième et en Cinquième.

— Nous avons utilisé de nouvelles méthodes en introduisant en Quatrième l'enseignement par fiches.

— Conjointement, nous avons mis en place une nouvelle répartition des élèves en expérimentant un enseignement par niveaux.

Voici donc quelques remarques concernant nos activités, nos réussites, nos échecs, nos espoirs.

Nous nous réjouissons d'avoir obtenu, en Quatrième, des programmes modernes très formateurs et correspondant à l'orientation de notre enseignement scientifique à partir du second cycle. Cependant, ce programme est trop vaste. Notre système d'enseignement par niveaux nous permet d'en avoir nettement conscience. Nos élèves sont réparties en dix niveaux de 24 élèves ; les trois niveaux les plus faibles disposent d'une heure supplémentaire, c'est-à-dire de cinq heures hebdomadaires au lieu de quatre. Dans les niveaux faibles, nous nous heurtons aux limites d'assimilation de certains élèves, à la lenteur de beaucoup d'autres ; nous pouvons affirmer avec force que nous leur demandons trop. Au 1er avril, ils sont « essoufflés » alors que nous commençons l'étude des réels et que la géométrie n'a pas été abordée ; or, compte-tenu du calendrier des examens et des vacances, il reste deux mois de travail. Il est facile à un professeur d'une classe hétérogène de se déclarer satisfait lorsque quelques bons éléments réagissent très bien et donnent l'illusion que le programme « passe bien ». Dans l'enseignement traditionnel, beaucoup trop d'élèves restaient fermés aux mathématiques. Nous avons certainement obtenu une plus large audience. Cependant, en gardant des programmes trop ambitieux, compte tenu du temps dont nous disposons, nous abandonnons ou décourageons encore au moins 20 p. 100 des élèves. Faut-il considérer que ce « déchet » est normal dans le premier cycle ou bien devons-nous exiger des programmes minimums qui pourraient être assimilés par les élèves moins favorisés et qui laisseraient aux autres toutes possibilités de dépassement?

La méthode d'enseignement par fiches, permettant à chaque élève de progresser à son rythme, est utilisée avec une certaine souplesse. En général, nos élèves travaillent par groupes de deux ou trois, rarement individuellement.

Il nous semble indispensable que le professeur prenne toute sa classe en main régulièrement et ceci surtout dans les niveaux faibles, d'une part pour insister sur les résultats essentiels, d'autre part pour introduire des notions difficiles enfin pour corriger des exercices mal compris. La démonstration constitue une grosse difficulté pour la classe de Quatrième; la plupart des élèves ne la surmontent pas seuls. Étant donné qu'il est matériellement impossible au professeur de donner suffisamment de conseils à chaque élève en particulier, il faut revenir, à ce moment, au cours magistral. Mais, dès lors, les élèves, habituées à la réflexion et au travail personnel, participent plus activement qu'autrefois au travail réalisé en commun.

Parfois, nous prenons la parole au début d'une fiche, par exemple, pour définir un vecteur, ensuite, nous donnons aux élèves les exercices proposés. Quelquefois il est utile de faire une synthèse à la fin d'un chapitre, par exemple, après les encadrements de réels, pour mettre en évidence les méthodes utilisées et le vocabulaire à retenir.

Afin de rendre possible le travail collectif, nous évitons les grands décalages entre les élèves; ceci est relativement facile dans des groupes homogènes; il est tout de même nécessaire de fournir aux élèves plus rapides quelques exercices supplémentaires ou bien de donner aux plus lents des fiches à terminer chez eux.

Il faut demander de temps en temps un effort de mémoire et donner quelques résultats à apprendre. Nous estimons, par exemple, qu'après avoir manipulé des relations, des groupes, en Sixième et Cinquième, les élèves doivent connaître, en Quatrième, la définition d'une relation d'équivalence ou d'un groupe; ceci les oblige à formuler clairement ce qu'ils sentent de façon plus ou moins implicite. Nous donnons quelques devoirs à la maison mais, surtout, des fiches à terminer.

Le contrôle des résultats s'exerce, de façon permanente, en dialoguant avec chaque élève ou avec la classe et, de façon plus nette, au cours des interrogations écrites données, environ, chaque quinzaine. Ce travail personnel régulier est pour nous le meilleur moyen de tester les progrès réalisés.

Malgré quelques difficultés, nous avons obtenu des résultats très encourageants.

Il faut, bien sûr, considérer comme un échec le fait de ne pas terminer le programme; ceci laisse les élèves insatisfaits et, parfois, découragés. Il est certain que nous sacrifierons encore une partie de la géométrie.

Il faut constater aussi que nos élèves utilisent mal la déduction logique; cette difficulté est, semble-t-il, assez normale à leur âge.

Lors du travail sur fiches, il arrive que quelques élèves passent rapidement sur les commentaires pour ne faire que les exercices, ou bien s'intéressent peu à des exercices dont la marche n'est pas entièrement tracée. Ces inconvénients peuvent être partiellement évités par l'intervention du professeur.

Nos élèves font régulièrement des exercices de calcul avec ou sans machines; peut-être sont-ils un peu moins rapides qu'autrefois, mais ils sont, sans aucun doute, plus conscients. On rencontre *moins les grosses erreurs* faites par les élèves qui appliquaient simplement un mécanisme.

Les élèves de Quatrième ont, dans l'ensemble, assimilé les notions d'application, de loi de composition, les calculs dans l'ensemble des décimaux. Ils résolvent *correctement* les équations du premier degré.

Parmi les points essentiels très positifs, nous signalons le changement d'attitude de l'élève face au cours de mathématique; ceci était déjà constaté en Sixième et Cinquième. Le cours est plus agréable, passionnant pour certains.

Les élèves n'acceptent que ce qu'ils comprennent; ils sont plus exigeants dans leurs demandes d'explication. Les contacts élèves-professeurs sont plus profonds; des découragements sont évités. Le travail sur fiches semble être un facteur favorisant le travail en équipes dans une ambiance de liberté.

Le professeur doit accepter les discussions, les déplacements et aussi un niveau sonore un peu élevé. Il en résulte pour lui une plus grande fatigue qu'autrefois particulièrement s'il enseigne dans un niveau faible.

La méthode d'enseignement par niveaux comporte « quelques » inconvénients surtout au point de vue psychologique (difficulté des changements de groupes, hantise de « descendre » pour certains) mais, pour nous, elle présente surtout des avantages : les faibles ne sont plus écrasés par les forts, ils peuvent s'exprimer sans complexes; ils disposent d'une heure supplémentaire; les forts avancent sans s'ennuyer. Le maître peut davantage individualiser son enseignement, maintenir l'émulation qui n'existait que pour les têtes de classe.

L'expérimentation des nouveaux programmes a donc servi de prétexte à une profonde rénovation pédagogique, établissant des rapports psychologiques fructueux entre élèves et maîtres — et même, ce dernier aspect n'étant pas le moins important, au sein de l'équipe d'enseignants.

Expérience de mathématique au niveau des 4e.

Mme BUCHWALTER, M. LAUVERGNAT,
Lycée Jean-Perrin, Lyon-9e.

Cette année 1970-1971, 175 élèves de Quatrième, répartis en 6 classes, participent à l'expérience de Mathématique. Les élèves ont quatre heures de mathématique par semaine.

Ces quelques notes risquent de n'être pas très intéressantes dans la mesure où le programme expérimenté cette année comporte d'assez grandes différences avec celui officiellement adopté pour la prochaine rentrée.

La répartition cette année a été à peu près la suivante :

— Premier trimestre : ensemble et logique, lois de composition.
— Deuxième trimestre : groupes, ensemble des décimaux.
— Troisième trimestre : l'ensemble des réels, débuts de la géométrie.

Les élèves utilisent les fiches *Galion (4e)*; ils sont habitués au travail sur fiches depuis la classe de Sixième. ***Les avantages de la méthode.*** se sont confirmés tout au long de ces trois années, principalement sur les deux points suivants :

① *Travail individualisé* permettant à un élève lent de ne pas se sentir perdu, de pouvoir travailler à son rythme et dans bien des cas d'éviter le découragement.

② *Travail par équipes.* Les élèves travaillent souvent, sans que ce soit obligatoire, par groupe de 2 ou 3. Ils s'apportent mutuellement une aide qui s'est révélée être très efficace. Ils apprennent à expliquer aux autres, donc à préciser leur propre pensée.

Une difficulté toutefois : il est malaisé de faire des synthèses pour l'ensemble de la classe, les élèves ayant des écarts de fiches importants les uns par rapport aux autres; l'utilisation de fiches supplémentaires ne permet pas toujours de combler ce retard.

Nous pouvons toutefois affirmer, après trois ans d'expériences, que la *méthode utilisée est un succès:*

— élèves heureux de travailler et prenant leur travail au sérieux;
— pourcentage très faible, parmi les six classes, d'élèves en difficulté.

A remarquer que *le programme de Quatrième que nous avons expérimenté* nous paraît beaucoup trop lourd : la géométrie pratiquement ne pourra guère être abordée cette année. Par contre, nous regrettons bien vivement qu'aient disparu totalement du programme définitif les notions de logique. Les fiches correspondantes que nous avons expérimentées ont intéressé les élèves et elles ont été assez bien assimilées. Elles complétaient utilement les fiches relatives au langage des ensembles et préparaient utilement l'avenir...

Expérimentation d'un nouveau programme de 4^{e}.

Équipe du Lycée Ampère (Lyon).

Le nouveau programme de Quatrième-Troisième est connu depuis peu. Notre propos n'est pas ici de critiquer tel ou tel aspect de ce programme qui peut être considérablement amélioré. D'ailleurs, tout programme est mauvais !

Nous voulons simplement apporter le témoignage de ce qui a été fait, dans les classes expérimentales de Lyon, ou plutôt parler plus précisément de quelques points particuliers éclairés par le travail de plus d'une année.

Lorsque nous avons dû, en Quatrième, poursuivre notre expérimentation commencée en octobre 1967 en Sixième, *il n'y avait pas de programme de Quatrième à expérimenter.* Tout juste un texte sur lequel l'accord était très loin d'être réalisé; quelques bonnes idées pour l'étude des nombres, appelée couramment algèbre; une proposition pour la géométrie. En gros, la partie dite « algébrique » est celle qui est devenue officielle dans le nouveau programme de Quatrième : c'est ce qui fut expérimenté.

La partie « géométrique » a subi de nombreuses fluctuations. Nous avons tenté, en Quatrième, d'introduire ces notions géométriques à partir d' « axiomes » du milieu. Puis, nous avons abandonné cette voie pour essayer de bâtir autre chose à partir des idées contenues dans le programme actuel.

En fait, nous avons passé beaucoup de temps sur l'approche des réels, si bien que c'est en début de Troisième expérimentale que nous avons vraiment traité la partie géométrique, en tentant d'arriver le plus économiquement possible au plan vectoriel.

Il faut dire que, si les programmes rénovés de Sixième et Cinquième ne posent plus beaucoup de problèmes dans notre enseignement, il n'en va pas de même pour celui de Quatrième.

D'abord sa longueur, ensuite sa densité.

Si l'on veut tirer le bénéfice d'une notion telle que celle de « groupe », il faut bien d'abord parler des lois de composition sur des exemples simples, de leurs propriétés, ce qui est assez long.

Il faut ensuite « approcher les réels ».

La question, du seul point de vue intuitif, ne présente pas trop de difficultés contrairement à ce que l'on aurait pu croire. Mais la recherche d'encadrements par des décimaux est très longue, car elle doit être faite sur des exemples nombreux et variés.

Il reste ensuite à mettre en forme certaines règles opératoires dans $\mathbb{R}$, et étudier les applications-polynômes.

Si l'on a le souci de ne pas trop escamoter les problèmes, si l'on veut éviter trop de dogmatisme, tout cela prend beaucoup de temps.

Quant à la géométrie (dont la plus grande partie ne peut être abordée avant l'étude de $\mathbb{R}$), en dépit d'une « étude économique », on ne peut tout de même pas la traiter en quelques semaines. *Nous devons donc mettre les* *collègues en garde davantage contre cette longueur, que contre les difficultés rencontrées.*

Un travail assez lent, individualisé, avec fiches de travail ou autres documents, est très bien adapté aux classes de Sixième et Cinquième, Indiscutablement, on devra essayer d'aller plus vite en Quatrième.

Les documents de travail doivent être utilisés en général de façon nouvelle dans cette classe. Sans abandonner l'individualisation, la recherche personnelle, le travail en groupe, il faudra sans doute faire plus souvent un travail collectif plus rapide.

On pourra faire préparer certaines fiches à la maison, ou en devoirs.

Voici maintenant quelques points de détail.

④ Les lois de composition.

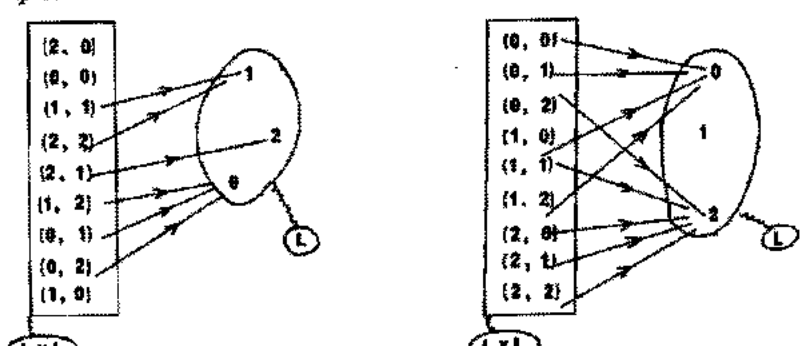
Les élèves de Sixième et Cinquième, habitués aux concepts de « *relations* », « *applications* », « *graphes* » n'ont pas de difficulté pour aborder les *lois de composition sur des ensembles finis*.

Une loi de composition dans E sera une application de $E \times E$ vers E.

Le qualificatif « *interne* » semble inutile si l'on utilise cette définition :

$$(x, y) \mapsto x * y$$

Exemples :



f *g*

g est une loi de composition dans L; *f* n'est pas une loi de composition(c'est une *opération* dans L).

Autres exemples de lois de composition :

L'addition dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{D}$.

La multiplication dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{D}$.

$\cap$, $\cup$, Δ dans $\mathcal{P}$ (E).

Composition des bijections dans E (ensemble fini).

Contre-exemple :

Soustraction dans $\mathbb{N}$.

On insiste beaucoup sur la *table de Pythagore*, instrument précieux pour l'étude des lois de composition sur un ensemble fini.

Exercice :

Voici trois tables :

2e composant (colonnes) ; 1er composant (lignes)

$*$	a	b	c
a	b	b	c
b	a	a	a
c	b	c	b

2e composant (colonnes) ; 1er composant (lignes)

$\perp$	a	b	c
a	b	c	d
b	a	c	a
c	c	b	a

2e composant (colonnes) ; 1er composant (lignes)

∇	a	b	c
a	a	c	b
b	b	a	
c	c	a	a

Lesquelles sont tables de Pythagore d'une loi de composition dans $\{a, b, c\}$? Il est intéressant de parler assez tôt de *carré latin*, table pour laquelle chaque élément de E figure une fois et une seule sur chaque ligne et chaque colonne.

Il est absolument indispensable de présenter de multiples exemples, avec des notations diverses, de faire exécuter des calculs nombreux sur ces exemples, en insistant sur le rôle des parenthèses, qui est loin d'être évident pour un enfant qui quitte la Cinquième.

L'étude des propriétés sera grandement facilitée par ces nombreux calculs; par exemple ceux dans lesquels on effectue $(a \mathrm{T} b) \mathrm{T} c$ et $a \mathrm{T} (b \mathrm{T} c)$ en trouvant des résultats différents.

La *commutativité* et l'existence du *neutre* ne posent pas de grands problèmes. Il n'en est pas de même pour l'*associativité* et la *distributivité* d'une loi de composition sur une autre; en effet, pour ces propriétés, la table n'est plus guère utilisable!

Il faut « tout vérifier » ou « faire une démonstration ».

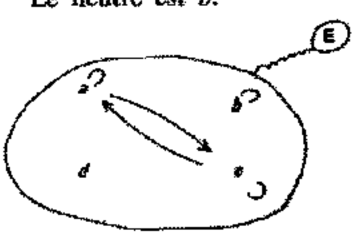
Alors, pour éviter des calculs longs et fastidieux, on « admettra » souvent l'associativité, si le professeur sait, lui, que la loi de composition est associative. Et puis, on présentera des contre-exemples.

La notion d'*éléments symétriques* ne pose pas trop de problèmes. On pourra faire étudier, dans E, la relation.

« ... *est élément symétrique de...* » pour une loi de composition donnée. et constater que cette relation est « symétrique » (!). et que dans certains cas c'est une bijection!

Exemple. Loi $*$ sur $\{a, b, c, d\}$.

Le neutre est b.



Relation "... est symétrique ..."

second composant (colonnes) ; premier composant (lignes)

$*$	a	b	c	d
a	b	a	b	b
b	a	b	c	d
c	b	c	b	a
d	a	d	a	a

Nous avons eu quelques mésaventures de vocabulaire :
« *symétrie* » de la table pour la commutativité.
« *symétrie* » en tant que propriété d'une relation.
« *éléments symétriques* ».

C'est la raison pour laquelle certains proposent « élément *neutralisant* de x » pour « élément symétrique de x »... A l'usage, ce vocabulaire est bien accepté par les enfants.

Nous avons aussi insisté sur « *absorbant* » pour une loi de composition.

Exemple :

0 est absorbant pour la multiplication dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$.
E est absorbant pour la loi de composition $\cup$ dans $\mathcal{P}^{(E)}$ etc.
Ce terme imagé est simple, commode et bien compris.

On arrive ainsi tout doucement aux *groupes*. Il n'est pas question d'en faire une théorie, mais on y vient tout naturellement; loin d'être une complication inutile, cette synthèse est très bien comprise, et bien utilisée par la suite. Il faudra bien sûr illustrer ce concept d'exemples et contre-exemples nombreux. Et surtout s'en servir *systématiquement* pour résoudre des équations.

Exemples :

$ax = b$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.
$\vec{u} \oplus \vec{x} = \vec{v}$ dans $(\mathcal{V}, \oplus)$, groupe additif des vecteurs géométriques.
$t_{\vec{x}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}}$ dans le groupe des translations $(\mathcal{T}, \circ)$.

② Un peu de logique.

Cette rubrique ne figure pas au programme. Il est pourtant difficile de se passer de quelques notions très simples pour bien comprendre certaines questions : propriétés de lois de composition, équations, raisonnement déductif, etc.

Nous avons traité, timidement et sans doute trop vite (car il faut traiter le reste!...) les questions suivantes :

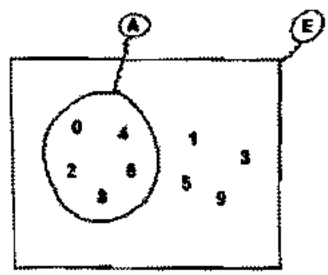
— *Moule à énoncés* (en évitant « prédicat »).
— *Connecteurs* $\vee$, $\wedge$, $\neg$.
— *Partie de E associée à un moule.* Usage de cartes perforées.
— Relation « ... *entraîne*... » entre... moules. (Notation $\vdash$).
— *Équivalence logique.*

Après bien (!) des discussions, nous n'avons pas voulu, pas pu, pas osé, (comme vous voudrez) parler de quantificateurs, ni du connecteur $\Rightarrow$. D'aucuns le regrettent, d'autres le déplorent; quelques-uns pensent que l'on aurait pu faire l'économie de cette « logique ». En fait l'expérience montre que c'est bénéfique. Peut-être même n'en avons-nous pas fait suffisamment; en particulier, on se passe difficilement de la quantification dans de nombreux cas simples.

Le moule à énoncés

L'expression n'est pas belle! Surtout lorsqu'on parlera de « relation dans un ensemble de moules »! Mais au diable le purisme! Nos élèves en ont retiré un bénéfice certain; nous nous en rendons compte chaque semaine :

$(\square + \Delta)^2 = \square^2 + \Delta^2 + 2\square\Delta$.
Équation dans $\mathbb{R}$: $2\,\square - 5 = 0{,}6$.
Équation de droite : $2u - 4v = 6$.
Inéquations : $a\,\square + b > 0$. Etc.
E est un ensemble de naturels.
P : « $\square$ est pair » n'est pas un énoncé : cette écriture sert à fabriquer des énoncés en mettant à la place de $\square$ des éléments de E.
« 8 est pair » est vrai : 8 *vérifie* le moule P.
« 1 est pair » est faux : 1 ne vérifie pas P.



Le sous-ensemble de E dont les éléments vérifient P est la partie associée à P : c'est A.

Il est important, au début, de ne pas désigner la « lettre muette » (ou la case vide...) par ... une lettre, mais par un signe cabalistique quelconque. Outre le pittoresque de l'écriture, on évitera des questions du genre : « Mais, Monsieur, quand vous écrivez $x \in \mathbb{Z}$, $2x = 5$, cela ne veut rien dire! Je sais bien que x n'est pas élément de $\mathbb{Z}$! »

Les connecteurs seront introduits très simplement, en liaison avec les lois connues de $\mathfrak{P}_{(E)}$.

p associé à la partie A de E
q associé à la partie B de E
$p \wedge q$ associé à la partie $A \cap B$
$p \vee q$ associé à la partie $A \cup B$
$\neg p$ associé à la partie $\bar{A}$

Bien sûr, dans les débuts, il y a eu des confusions... naturelles.

Deux moules p et q sont *logiquement équivalents* si, dans E, leurs parties associées sont égales.

Notation : $p \dashv\vdash q$.

La relation « entraîne » $p \vdash q$ signifie « tout élément qui vérifie p vérifie aussi q ».

L'étude de cette relation est relativement simple si, d'une part, E est fini et si d'autre part on considère un ensemble fini de moules très simples.

Exemple :

r : « x *est impair* ».

s : « x *est plus grand que* 8 ».

a) $G = \{11, 4, 12, 17, 6, 2, 20\}$.

Dans G, r entraîne-t-il s?

Dans G, s entraîne-t-il r?

b) Mêmes questions en remplaçant G par H :

$$H = \{3, 7, 6, 15, 2, 4, 23\}$$

c) Mêmes questions en remplaçant G par K :

$$K = \{2, 13, 6, 27, 0\}$$

d) Inventer une partie L de $\mathbb{N}$ telle que, dans L, aucun des deux moules r, s n'entraîne l'autre.

Tout cela se complique — au point d'être inexploitable ou presque — si E est un ensemble infini. Il faut alors un raisonnement avec la quantification sous-jacente. Mais peut-on espérer tout faire à la fois? N'est-ce pas déjà préparer le terrain que présenter une notion importante assez tôt, sur des situations simples?... « tôt et progressivement », comme dit « qui-vous-savez »!

③ Des décimaux aux réels.

Il pouvait sembler téméraire de donner, aux élèves de Quatrième, une idée du corps ($\mathbb{R}$, +, ×), en court-circuitant les fameux rationnels, qu'une habitude déjà séculaire place « logiquement » entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$.

Les expérimentateurs sont à peu près unanimes à reconnaître que cette innovation très importante est excellente. Cette initiation aux réels est plus facile à donner qu'on aurait pu le supposer, cela à plusieurs conditions :

— D'abord bannir absolument toute espèce de théorie de $\mathbb{R}$ plus ou moins déguisée. Après une mise en ordre sur les décimaux, on fait prendre conscience de la nécessité de nombres non décimaux sur des exemples, puis $\mathbb{R}$ est introduit par les propriétés de ($\mathbb{R}$, +, ×, $\leqslant$), qui prolongent et complètent celles de ($\mathbb{D}$, +, ×, $\leqslant$).

— Ensuite, utiliser au maximum les structures simples (ordres, groupes...) dégagées peu à peu depuis deux ans sur des ensembles finis.

— Disposer de temps et de moyens (machines à calculer) pour effectuer de nombreux calculs d'encadrements par des décimaux.

Avantages de cette présentation

— Réhabilitation des décimaux, outil de calcul par excellence pour le physicien.

— Réhabilitation de la notion d'encadrement et d'approximation, totalement négligée dans les « anciens » programmes.

— On redonne à $\mathbb{Q}$ sa juste place, non historique peut-être, mais bien normale en mathématique.

— Motivations de calculs numériques nombreux.

— Présentation claire, rapide et efficace des règles opératoires avec des réels écrits sous forme fractionnaire, du type $\frac{5}{7}$ ou $\frac{2}{0,3}$, en utilisant systématiquement les propriétés admises de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

— Possibilité d'utiliser $\mathbb{R}$ dès le deuxième semestre de Quatrième, notamment en géométrie.

Problèmes qui se posent

— On ne soulèvera pas de questions théoriques. Cependant, elles sont bien présentes, et il n'est pas toujours facile d'en donner une idée même simple et concrète.

Exemples : addition, multiplication de réels et encadrements,
suite illimitée, décimaux non inversibles.

— Il faut beaucoup de temps pour trouver des encadrements, sur des exemples variés. Et, pourtant, l'élève doit faire ces calculs lui-même! Il n'est pas question de les parachuter.

— On ne peut pas vraiment dire « ce qu'est un nombre réel ».

Mais peut-on le dire beaucoup mieux en classe terminale?

Il n'est pas question ici d'entrer dans le détail, mais seulement d'évoquer quelques points particuliers.

Sur les notations et le langage

Jusqu'en début de la classe de Quatrième, nous avons conservé, pour les entiers, les notations 3^+, ou 3, et 3^-. L'avantage de cette notation, ou d'une notation voisine, est incontestable, et sur ce point je ne suis pas d'accord avec les remarques de notre collègue Loi (pour la tradition : *Bulletin*, 277, p. 92). Pour avoir enseigné les *deux* notations (3^- et (-3)), nous pouvons affirmer que la première permet d'éviter de très nombreuses erreurs.

Mais il faut bien reconnaître que cette notation est gênante pour certaines écritures et que, par ailleurs, nous devons faire en sorte que nos élèves puissent lire les ouvrages de mathématique, où l'on écrit (-3) et non 3^-.

Écritures gênantes : $2^{(4^-)}$ qui risque de devenir $(2^4)^- \ldots (3^-).a$, qui n'est pas plus simple que $-3a$, et risque de devenir $3-a$ (en passant par 3^-a).

Pour cette raison, tout en autorisant encore 3^- pour opp(3), nous sommes progressivement venus à (-3). Cela n'a pas été très simple dans les débuts.

Après des flottements, les choses semblent maintenant claires et les deux notations sont employées, selon les circonstances.

Nous tenons beaucoup à opp(a); à inv(a) pour l'inverse. Le « parallélisme » des propriétés de ces opérateurs est très précieux dans le calcul.

La notation a^{-1} pour $\frac{1}{a}$ ou inv(a) est facilement admise ; il semble cependant que son utilité soit assez réduite.

Le réel 0,2 peut s'écrire $\frac{2}{10}$ ou $\frac{1}{5}$, $\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}$, qui sont des *écritures fractionnaires* différentes du même réel. Le mot *fraction* est pratiquement inutile. Sont totalement inutiles des mots comme « rapport », « proportion »; « quotient de réels » suffit dans toutes les circonstances rencontrées.

$\sqrt{2}$ est lu « radical deux » plutôt que « racine de deux ».

Son opposé est noté opp($\sqrt{2}$) ou ($-\sqrt{2}$).

« $\mathbb{R}$ privé de 0 » est noté sans problème $\mathbb{R}^*$.

Les moules tels que $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ sont notés dans un premier temps $(\square + \bigcirc)^2 = \square^2 + \bigcirc^2 + 2\square\bigcirc$

L'avantage de cette notation est évident, nous l'avons constaté, par exemple dans le passage de $(a+b)^2$ à $\left(3a + \frac{b}{5}\right)^2$.

Les polynômes sont d'abord présentés comme des *applications* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$f : x \mapsto 2x^2 - 4x + 5$$

Par la même occasion, signalons quelques notations en géométrie.

Le vecteur $\vec{u}$, classe de (A, B) est noté aussi $\overrightarrow{AB}$.

Son opposé est noté opp($\vec{u}$), puis accessoirement ($-\vec{u}$) (qui n'est pas très bon).

Certains élèves proposent d'écrire $\overleftarrow{u}$ pour opp($\vec{u}$). Les maîtres devraient bien méditer cette proposition.

Le vecteur neutre pour l'addition est noté $\vec{\theta}$ et non $\vec{0}$.

Certes, on a déjà beaucoup parlé de notations; nous apportons ici un témoignage. Il ne s'agit pas de changer pour le plaisir de changer. Mais incontestablement, certaines notations sont dangereuses. Il faut essayer d'éviter ces dangers, donc essayer des notations nouvelles, mais cela avec des élèves qui n'en ont jamais vu d'*autres* : à cette condition seulement l'expérience est probante. Il faut aussi que le maître joue honnêtement le jeu et se déconditionne lui-même.

Enfin, signalons à l'A.P.M.E.P., dans les colonnes du *Bulletin*, que de très nombreux collègues souhaitent que nous nous mettions d'accord au moins sur les notations les plus courantes, sur le vocabulaire. Le travail de Chevallier et de la Commission du Dictionnaire est considérable. Il faut absolument que chacun fasse l'effort de donner son avis sur telle ou telle notation, puis accepte ensuite une décision unificatrice.

④ **Et la géométrie...**

La géométrie à elle seule mériterait *deux* bulletins. Il y a tellement à dire! Idées, critiques, suggestions, axiomatiques, vectoriel, suppression... Nous n'allons pas nous engager dans cette voie, déjà très fréquentée.

Après bientôt deux ans de tâtonnements, d'essais, de discussion, nous sommes arrivés sensiblement aux conclusions suivantes :

— Le nouveau programmme de géométrie de Quatrième n'est pas enthousiasmant.

— Il constitue cependant un progrès sur l'ancien.

— La « liberté du choix des axiomes » est une très bonne chose, mais compte tenu des notions présentées, la liberté de manœuvre est-elle bien grande?

— La partie « axiomes d'incidence » ne présente qu'un intérêt limité. Elle peut être traitée très simplement et très rapidement.

— Après avoir présenté « l'énoncé de Thalès », avec la bijection du plan sur $\mathbb{R}^2$, on peut très vite arriver au plan vectoriel, aux translations, et utiliser ce vectoriel comme outil mathématique.

Lorsqu'on en est là, tout devient simple. La présentation initiale présente seule, ou presque, quelques difficultés. Les élèves sont relativement à l'aise en algèbre linéaire.

On objectera que certaines questions ne sont pas traitées de manière intrinsèque... Mais que signifie « intrinsèque »? Le physicien, qui utilise la géométrie euclidienne, fait-il des choses intrinsèques?

N.D.L.R. — Le plan suivi par nos Collègues, pour la présentation de la géométrie, est présenté et développé pages 350 à 378.

Information :

TRAVAIL DES COMMISSIONS A.P.M.E.P. (année 1971-1972)

Le Bureau de l'A.P.M.E.P. réuni le 12 juin 1971 a proposé le calendrier suivant :

— 21 novembre 1971 : Commission Second cycle;

— 19 décembre 1971 : Commission Premier cycle;

— 19 mars 1972 : Commission École élémentaire et E.N.;

— 19 avril 1972 : Commission Enseignement technique.

Les Régionales sont invitées à préparer ces diverses réunions.

Pour chacune de ces journées, la trésorerie de l'A.P.M. prendra en charge les frais de déplacement d'un délégué par Régionale.

4

En marge des programmes : les problèmes de fond

La simple rédaction des nouveaux programmes ne peut pas résoudre tous les problèmes ; elle en résout certains, mais en pose d'autres. Nous proposons maintenant une série d'articles moins scolaires qui, nous le souhaitons, engendreront un débat fructueux.

D'abord Louis Duvert explicite les questions posées par l'apparition de démonstrations en classe de Quatrième. Jacques Chayé fait ensuite des propositions pour l'apprentissage de la déduction et de la rigueur, puis Mme Motte montre comment créer les conditions affectives favorables à cet apprentissage. Enfin Jacques Bastier livre ses réflexions inspirées par la Recherche Pédagogique menée dans l'Académie de Bordeaux ; cet article servira de conclucion au Bulletin *car, en dehors des contingences du moment, il soulève les problèmes posés par l'enseignement de la Mathématique dans le premier cycle, dans les années à venir, et suggère quelques réponses.*

Paraissant également dans le Courrier de la Recherche consacré aux nouveaux programmes de Quatrième, les articles de J. Chayé et Mme Motte sont publiés avec les autorisations de M. le Directeur de l'I.N.R.D.P. et des auteurs.

Sur l'expérience en 4e

Louis Duvert,
Lyon.

La classe de Quatrième est marquée par l'apparition des « démonstrations » et par le début du « calcul algébrique ». Les difficultés habituelles subsistent, mais le travail sur fiches permet au maître de mieux les étudier, de voir les erreurs « à l'état naissant ».

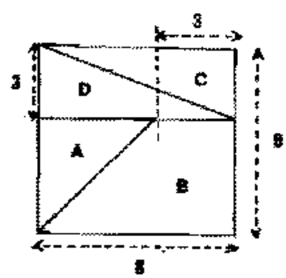
① D'abord, quel est le sens du mot « démontrer »? Il serait ambitieux de prétendre en Quatrième en donner une définition irréprochable!

Un premier effort, important, consiste à faire prendre conscience aux élèves de la *nécessité* logique de démontrer, au lieu de se fier à quelques cas particuliers :

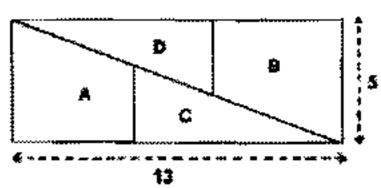
a) En géométrie, c'est délimiter le rôle des figures, c'est faire la différence entre une constatation expérimentale (et, par là-même, souvent approximative) et une démonstration, indépendante du « cas de figure ».

Les « paradoxes géométriques » peuvent nous y aider. En voici un exemple, propre à ébranler une confiance excessive en la loyauté des figures :

Un carré de côté 8 (l'unité étant l'interligne d'une feuille quadrillée) est subdivisé en quatre surfaces A, B, C, D. Son aire est 64 (carreaux).



On découpe ces quatre surfaces et on les dispose de la façon suivante :
Elles constituent un rectangle, dont l'aire est : 13 × 5, c'est-à-dire 65.
D'où vient le « carreau » supplémentaire?
(Extrait de : Northrop. Fantaisies et paradoxes mathématiques.)



b) En algèbre, certaines propriétés des lois de composition se prêtent bien à des réflexions utiles :

1° Pour démontrer qu'une loi est commutative, il ne suffit pas d'exhiber quelques exemples. On risque de fausser leurs idées en laissant écrire ou dire aux élèves, même jeunes :

« 3 + 5 = 5 + 3, *donc* l'addition des naturels est commutative »
ou encore :

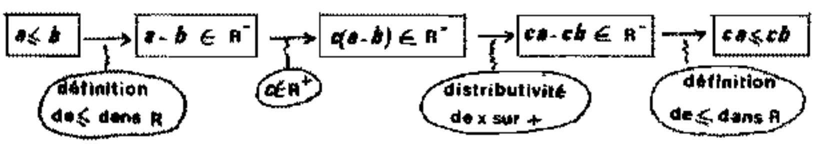
« L'addition des naturels est commutative; *en effet*, $11 + 4 = 4 + 11$ ». Il faut distinguer entre des *exemples* qui *illustrent* la commutativité et une *démonstration* de la commutativité.

S'il s'agit d'un ensemble fini E, une façon de la démontrer consiste à contrôler « en extension » que *chaque* élément de $E \times E$ vérifie le moule $a * b = b * a$, par exemple par un examen complet de la table de Pythagore. Mais il peut exister d'autres sortes de démonstrations, même pour un ensemble fini.

2° Pour démontrer qu'une loi est non-commutative, au contraire, un seul « contre-exemple » suffit; la définition de la commutativité comporte un quantificateur universel, donc sa négation comporte un quantificateur existentiel. Une erreur se rencontre fréquemment : « non-commutativité » signifierait qu'aucun élément de $E \times E$ ne vérifie $a * b = b * a$...

Ce qui amène à poser un certain nombre de questions :

A quel niveau introduire les quantificateurs? Les notions logiques de négation, de déduction, de contraposition? Peut-on s'en passer dans l'initiation à la démonstration? Quel sort réserver aux « petits mots » comme : « or », « donc », « il vient », « on a », etc.? Quelles sont la validité et l'efficacité pédagogique des « organigrammes » (ou « déductogrammes »?) tels que le suivant :



② Une fois l'élève à peu près convaincu de la nécessité des démonstrations, comment l'aider à comprendre les démonstrations qu'on lui présente et mieux encore à en faire lui-même?

Peut-être est-il bon, au cours de cette initiation, de sérier les problèmes; par exemple de distinguer entre la découverte, ou plutôt la *construction*, d'une démonstration, et sa *rédaction;* de proposer des exercices « spécialisés ».

Les uns où on ne viserait que la construction.

D'autres où la construction serait donnée, ou préalablement élaborée en classe collectivement, et où l'effort de l'élève porterait uniquement sur la rédaction.

D'autres encore où on laisserait à l'élève le soin de rédiger l'énoncé (qui n'aurait pas été donné par écrit dans les formes requises).

On peut aussi proposer des « puzzles mathématiques » : le maître rédige soigneusement une démonstration, puis la découpe en morceaux tels que la reconstitution du « bon ordre » soit possible (éventuellement de plusieurs manières); et c'est cette reconstitution qu'on demande aux élèves.

Exemple : L'axiome A_5 s'énonçait, cette année-là, de la façon suivante :

« L'équipollence est transitive »

et la propriété 4 de la fiche G6 (édition expérimentale).

« Si M, N, P sont les milieux respectifs de (A, B), (A, C) et (B, C),

(N, M) eq (P, B)

et (N, M) eq (C, P) »

« Une démonstration a été découpée en treize morceaux qu'on a mélangés :

(1) l'axiome A_5 permet de déduire :
(2) Pour cela, on introduit le milieu M de (A, C).
(3) On considère dans le plan quatre points A, B, C, D.
(4) On veut démontrer que (I, J, K, L) est un parallélogramme.
(5) « (L, K) eq (A, M) » entraîne « (A, M) eq (L, K) ».
(6) Donc (I, J, K, L) est un parallélogramme.
(7) On appelle I, J, K, L, les milieux respectifs de (A, B), (B, C), (C, D), (D, A).
(8) Comme la relation « ...est équipollent à... » dans l'ensemble des couples de points est symétrique.
(9) (I, J) eq (A, M).
(10) De (I, J) eq (A, M) $\wedge$ (A, M) eq (L, K),
(11) D'après la propriété 4 de la fiche G6
(12) et (L, K) eq (A, M)
(13) (I, J) eq (L, K).

En les remettant dans le bon ordre, retrouve cette démonstration ».

③ L'élève de Quatrième qui a compris ce qu'exige une démonstration exige à son tour du professeur une précision plus grande dans le vocabulaire.

Par exemple, il repousse le mot « montrer », dont on ne sait jamais s'il requiert une démonstration ou s'il signifie simplement... simplement quoi?

Démontrer, montrer, établir, illustrer, contrôler, vérifier, admettre, supposer, poser comme axiome, déduire, ... : à nous de clarifier toute cette terminologie si nous ne voulons pas accroître inutilement les difficultés de nos élèves.

Apprentissage de la déduction

Jacques Chayé,
Poitiers.

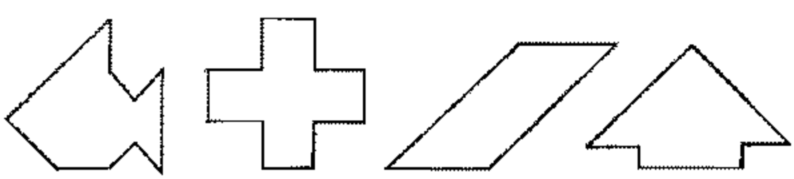
Un regard un peu rapide sur le renouveau actuel de l'enseignement des mathématiques dans le premier cycle pourrait laisser croire que non seulement les méthodes et les contenus, mais encore les objectifs de cet enseignement n'ont plus guère de points communs avec ceux d'autrefois. Certes, il ne faut pas minimiser les « révisions déchirantes » qui ont dû et qui doivent encore être faites, mais il serait abusivement simpliste de prétendre par exemple que l'apprentissage de la déduction est tombé en désuétude! Il est vrai que les clichés sur « la géométrie, école privilégiée de la déduction » ou sur « la classe de Quatrième, âge du déductif » sont passés de mode, mais l'éducation du raisonnement n'en demeure pas moins une des préoccupations de l'enseignement modernisé de la mathématique.

Le présent article se propose, sans indication précise de niveau ou de classe, de montrer comment une préparation logique et une préparation psychologique étroitement mêlées peuvent contribuer à former chez le jeune élève le goût de la déduction et le sens de la rigueur; pour des raisons de commodité nous utiliserons une certaine progression éclairée à chaque étape d'exercices pratiqués en 1969-70 dans une classe du premier cycle : ce découpage un peu artificiel est à interpréter avec beaucoup de souplesse.

• Indépendamment de tout enseignement mathématique, **l'enfant même très jeune est capable d'une certaine déduction** lorsqu'il se trouve, à l'occasion d'un jeu par exemple, amené à opérer un choix ou imaginer une stratégie; mais habituellement il n'en prend pas conscience car il est uniquement motivé par le résultat à atteindre et ses « raisonnements » plus ou moins explicités ne lui apparaissent pas comme une aide dans sa recherche.

Certains « casse-tête » sont assez précieux à ce sujet, car pour les résoudre, la seule intuition est insuffisante, ce qui conduit l'enfant à procéder par élimination; il le fait souvent de façon très « locale » et désordonnée; **il est alors opportun de lui faire découvrir les avantages de la réflexion.**

On trouve par exemple dans le commerce, des boîtes constituées de sept plaquettes représentées ci-dessus, à l'aide desquelles il est demandé de reconstituer certaines figures comme les suivantes :



Immédiatement, des incompatibilités, des impasses apparaissent; le joueur en déduit que seules certaines positions sont possibles et de proche en proche il obtient la solution ou les solutions.

Ce genre d'activités encourage l'étude méthodique et réfléchie; ce ne sont pas encore des mathématiques, mais il n'est pas mauvais que l'enfant soit passé par ce stade pour acquérir **le goût de la recherche raisonnée.**

D'un niveau plus élevé, la pratique du jeu de dames ou celle du jeu d'échecs est dans cette optique très recommandable, mais elle n'a pas pour tous le même attrait.

• Sans vouloir tuer l'intuition il est nécessaire d'apprendre aux jeunes élèves à **se méfier de l'évidence.** A cet effet, de nombreux paradoxes pourront épisodiquement leur être présentés; ils constitueront une motivation supplémentaire au raisonnement; citons, parmi bien d'autres, l'exemple suivant : une bouteille et son bouchon coûtent ensemble 11 F, la bouteille coûte 10 F de plus que le bouchon, combien coûte la bouteille? (réponse irréfléchie : 10 F; réponse exacte à laquelle permet d'aboutir un petit raisonnement : 10 F 50 centimes).

• Dans le même ordre d'idée, on peut remarquer que **l'enfant se satisfait souvent de quelques vérifications pour établir une loi générale ;** des exercices de mise en garde seront d'un grand profit.

Exemple : soit $f(n) = n^2 - n + 41$.

Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, etc.

Les nombres obtenus sont-ils premiers?

On trouve : $f(0) = 41$, $f(1) = 41$, $f(2) = 43$, $f(3) = 47$, $f(4) = 53$, $f(5) = 61$, ...

Tous ces nombres sont premiers et la propriété « marche » jusqu'à 40 compris; pourtant il est immédiat de vérifier que $f(41)$ n'est pas premier.

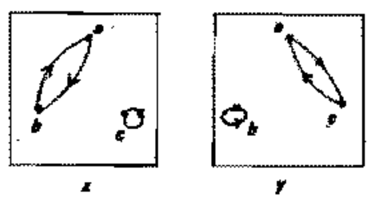
A ce propos il faut veiller à ne pas donner aux élèves l'impression que pour certaines questions, comme par exemple l'associativité d'une opération, on se contente de quelques contrôles avant d'affirmer une règle dans toute sa généralité; il est important de préciser que les sondages ne sont faits que pour faire découvrir la propriété ou pour donner bon espoir quant à sa validité, ils ne dispensent pas, soit d'une preuve par exhaustivité dans le cas fini (pas trop grand!), soit d'une démonstration à l'aide de variables. Si on est obligé d'admettre la propriété parce que le niveau de la classe ne permet pas d'en établir la preuve il faudra le dire expressément; si enfin la « propriété » est en fait choisie comme un axiome de la structure étudiée, le cas est totalement différent puisqu'il n'est pas question de **contrôles** à l'intérieur de la structure elle-même, mais d'**expériences** portant sur le domaine concret à mathématiser, elles n'ont aucun caractère de preuves. C'est bien là que réside la plus grande difficulté des présentations axiomatiques de la géométrie, car malgré les précautions oratoires qui pourront être prises il n'est pas sûr que les élèves saisissent la différence entre les **lois** de la géométrie physique constatées expérimentalement et les **axiomes** choisis dans la théorie pour mathématiser la situation (choisis non parce qu'ils ont été prouvés, mais parce qu'ils constituent une description assez adéquate du support concret).

• **La lassitude ou l'ennui** que peut procurer la démonstration par exhaustivité d'une propriété dans un cas fini même peu élevé **fournit l'occasion de rechercher une preuve plus économique et élégante.**

Prenons par exemple le cas de l'associativité de l'addition ou de la multiplication dans les entiers modulo 3 ou modulo 4; l'épuisement de tous les cas nécessiterait le contrôle de 27 ou 64 égalités, alors que la démonstration classique ou une préfiguration même approximative de celle-ci apportera un soulagement indéniable et l'impression de disposer d'un outil très fort.

• Avant tout exemple de démarche axiomatique des exercices préparatoires seront utilement proposés, pour lesquels **l'utilisation systématique de certaines règles** permet une étude rapide et complète.

Exemple : soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble de trois éléments; soient x et y les deux bijections de E représentées ci-contre et soit i la bijection identique de E; construire la table de composition des six bijections : i, x, y, $x \circ y$, $y \circ x$, $x \circ y \circ x$.



La construction des 36 diagrammes sagittaux n'est pas du tout nécessaire; la situation est complètement décrite par exemple par les règles suivantes :

— l'opération est associative (propriété démontrée antérieurement d'une façon générale),

— l'élément i est neutre,

— $x \circ x = y \circ y = i$,

— $x \circ y \circ x = y \circ x \circ y$.

Les enfants ne découvriront pas immédiatement le résultat tel qu'il vient d'être énoncé, mais il est possible de les amener à utiliser au moins partiellement ces règles pour la construction de la table; on peut ensuite revenir sur l'exercice ou sur un cas isomorphe.

• **Un point de vue plus abstrait** consiste à s'imposer les quatre règles ci-dessus pour l'ensemble : $\{i;\ x;\ y;\ x \circ y;\ y \circ x;\ x \circ y \circ x\}$ muni d'une loi notée $\circ$, soit à partir d'une situation qui en donne l'idée, soit au contraire avant d'en chercher une interprétation.

Détaillons dans cet esprit un autre exercice (qui d'ailleurs conduit au même groupe S_3) : soit G un ensemble de six éléments e une opération $*$ dans G; on suppose que :

— l'opération est associative,
— l'élément i de G est neutre,
— les éléments a et b de G vérifient :

$$a * a * a = i, \qquad b * b = i, \qquad b * a = a * a * b,$$

— les trois autres éléments de G peuvent s'écrire respectivement :

$$a * a, \qquad a * b, \qquad b * a.$$

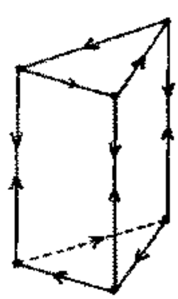
Construire la table de l'opération $*$ dans G.

Les règles sont aisées à appliquer et les enfants se piquent au jeu; par exemple, pour « calculer » le composé de b par $a * a$ ou celui de $b * a$ par a, on écrira, en tenant constamment compte de l'associativité :

$$\begin{aligned} b * a * a &= a * a * b * a \\ &= a * a * a * a * b \\ &= i * a * b \\ &= a * b. \end{aligned}$$

Ici, contrairement au cas de la géométrie, le caractère axiomatique apparaît nettement, ce qui n'empêche pas que les interprétations concrètes de cette structure soient multiples, citons par exemple la suivante :

Une « mouche savante » se déplace d'un sommet à un autre sur le prisme ci-dessous, en suivant les instructions qui lui sont données :



Instruction a : quel que soit le sommet où elle se trouve, la mouche doit se dépacler horizontalement en décrivant une seule arête dans le sens de la flèche.

Instruction b : la mouche doit changer de niveau en décrivant une arête verticale.

Pour aller d'un point à un autre, plusieurs suites d'instructions sont possibles; on peut chercher les plus simples puis constater que la suite de deux instructions simples peut souvent elle-même être simplifiée. Finalement les instructions réduites sont au nombre de six et leur « succession » est décrite comme dans le groupe précédent par des règles qui permettent de construire la table de Pythagore, de résoudre des « équations », de « simplifier » des instructions, etc.

Le passage *situation concrète-mathématisation* et le passage dans l'autre sens *structure mathématique-interprétation* sont toujours possibles et souhaitables dans de tels exemples.

• C'est donc à apprendre à appliquer la règle du jeu et à en donner le goût que tendaient les exercices précédents mais, conjointement, l'apprentissage de la déduction doit comporter l'**acquisition d'un certain bagage logique** propre à garantir le bien-fondé des raisonnements formulés ; insistons seulement sur trois points :

1° **le langage et la pensée ensemblistes** sont de précieux auxiliaires pour cette formation logique; soit $P = \{x/x \in E/p(x)\}$ et $Q = \{x/x \in E/q(x)\}$, rappelons le parallélisme :

$x \in \complement_E P$	$\neg\, p(x)$
$x \in P \cap Q$	$p(x) \wedge q(x)$
$x \in P \cup Q$	$p(x) \vee q(x)$
$x \in \complement_E P \cup Q$	$p(x) \Rightarrow q(x)$
$x \in \complement_E (P \,\Delta\, Q)$	$p(x) \Leftrightarrow q(x)$
$P = E$	$\forall x,\ p(x)$
$P \neq \varnothing$	$\exists x,\ p(x)$
$P \subset Q$	$\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$
$P = Q$	$\forall x,\ p(x) \Leftrightarrow q(x)$

2° **les notions de conséquence, de réciproque, d'équivalence,** sont à inculquer dès que possible. Il est important que l'élève sache faire la distinction entre le cas où une proposition est une conséquence d'une autre, sans qu'il y ait réciprocité et le cas où il y a équivalence. On objectera que le discours, l'écriture, la lecture, s'effectuent dans le temps « en sens unique », mais précisément, plus on attendra pour apprendre à raisonner par équivalence (lorsque c'est possible) plus l'étape sera difficile à franchir et les rébarbatifs raisonnements par analyse et synthèse (?) sont de ce point de vue de piètres serviteurs. Il est faux de dire qu'un enfant de Cinquième ou de Quatrième ne peut pas faire la distinction entre les deux cas :

« $x + 2 > 3$ revient au même que $x > 1$ »

« si $x + 2 > 3$ alors $x > 0$ »;

de même, il sait très bien que $A = B$ n'est pas synonyme de $A \subset B$.

3° **l'usage de propositions quantifiées et de leurs négations** est un aspect important de cette formation logique; les propriétés éventuelles des relations dans un ensemble (réflexivité, symétrie, etc.) ou des lois de composition interne (commutativité, associativité, etc.) sont autant d'occasions de se familiariser avec ces notions par la recherche d'exemples et de contre-exemples.

***

Nous avons essayé d'analyser les moyens d'amener progressivement l'enfant de la déduction primitive, inconsciente, fragmentaire et inorganisée à la déduction mathématique proprement dite. Une préoccupation dont nous n'avons pas encore parlé et qui, quoique un peu en marge du sujet, est pourtant une des composantes non négligeable de l'art de la démonstration, est **la mise en forme du raisonnement**; celle-ci est nécessaire à la communication et elle contribue en outre à clarifier la structure de la déduction elle-même.

Lorsque pour la première fois les élèves ont à prouver une propriété dont la démonstration est un peu ramifiée, il peut être utile pour les guider de leur soumettre un schéma visualisant l'organisation du raisonnement.

Exemple : pour démontrer que, quels que soient les décimaux a, b, c, d,

« si $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$, alors, $a + b \leqslant c + d$ »

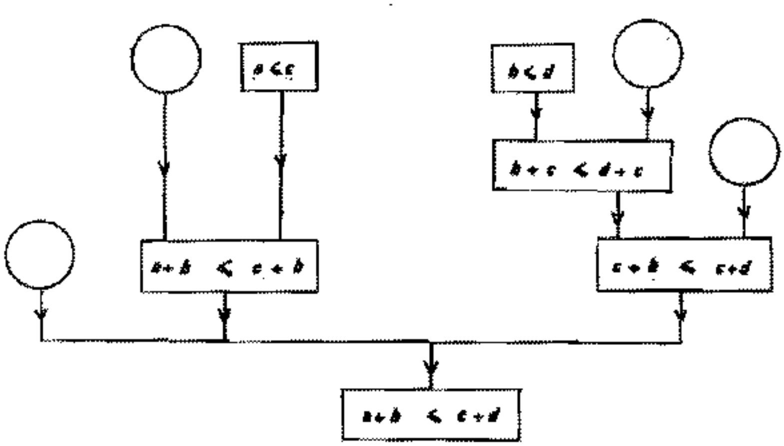
sachant déjà que :

1. quels que soient les décimaux x, y, z,

si $x \geqslant y$, alors, $x + z \geqslant y + z$

2. l'addition des décimaux est commutative.

3. la relation $\leqslant$ dans l'ensemble des décimaux est transitive. On demande, de compléter le schéma suivant en indiquant dans les cases rondes le numéro de la propriété utilisée :



Cependant, il faudra tôt ou tard que l'élève sache de lui-même, exposer clairement les tenants et les aboutissants d'un problème mathématique.

Utilisera-t-il alors les symboles logiques des connecteurs et des quantificateurs dans sa rédaction? Peu importe, pourvu que, s'il s'en sert, il le fasse à bon escient et que, s'il ne s'en sert pas, sa pensée soit juste et limpide.

Dans ces conditions, l'enseignement des mathématiques aura atteint un de ses buts : contribuer efficacement à l'éducation du jeune citoyen en lui apprenant à formuler des jugements réfléchis, rigoureux et compréhensibles.

En marge de l'apprentissage de la déduction

M. MOTTE,
Lycée Bonaparte de Toulon.

M. Chayé ayant évoqué le problème de l'apprentissage de la déduction, je m'attarderai volontiers, pour ma part sur des préoccupations voisines : la création des conditions affectives favorables à cet apprentissage.

On voit que les grandes lignes de l'apprentissage que décrit J. Chayé peuvent inspirer notre travail dès la classe de Sixième. J'y vois au moins deux avantages sur la situation antérieure :

• *L'initiation est très progressive: les mots « hypothèse », « conclusion », « prouver » ne sont plus rencontrés avec la brutalité d'autrefois;* on évite ainsi des malentendus.

En même temps on a davantage d'ambition : on essaya de faire comprendre ce qu'est un objet mathématique; comment il naît de nos décisions inspirées par le modèle qu'on veut décrire; comment des conséquences en découlent qui ne doivent rien à l'observation du modèle.

Et l'expérience montre que cette ambition est payante : elle, aussi, éloigne les malentendus.

• *Une autre cause d'inhibition disparaît: la ligne de démarcation entre les élèves qui trouvaient les démonstrations géométriques et les autres.* C'est ce que j'observe dans ma classe expérimentale (Troisième); mais à ce prix : que les problèmes proposés en Quatrième et en Troisième restent de types variés et ne se placent pas tous dans le cadre d'un édifice axiomatique important; que le professeur ne marque pas, par son attitude, une plus grande estime pour le travail de déduction formelle que pour les activités d'observation, de classement, d'organisation.

Je me suis demandée s'il n'existerait pas d'autre « préalable » au succès de l'apprentissage de la déduction. Nous voulons amener nos élèves à démontrer. Mais quand et pourquoi démontrons-nous? Quand cherchons-nous avec acharnement une démonstration?

La réponse à cette question est complexe; mais *un* de ses termes est certainement « lorsque le problème nous intéresse ».

Le goût de la recherche, de la découverte, précéderait ainsi celui de la démonstration, et pousserait tôt ou tard nos jeunes chercheurs vers les moyens les plus puissants.

C'est bien ce que l'on observe.

L'éveil et la préservation du goût de la recherche chez nos élèves ne peuvent donc être laissés au hasard — ce qui risque d'être le cas si nos préoccupations sont polarisées par le contenu des programmes et son découpage en tranches, ou si nous nous laissons enfermer dans le cadre de tel ou tel manuel — *et ils ne doivent pas être subordonnés à l'introduction des enfants dans des domaines formalisés.*

Il s'agit donc de mettre nos apprentis devant des situations leur posant des questions suffisamment excitantes, auxquelles ils soient cependant *tous* susceptibles de donner un début de réponse.

Actuellement chacun de nous n'est pas très riche de telles situations — en dehors de la combinatoire —. Il est probable que ces situations existent et que nous finirons par les découvrir : leur recherche est un travail de longue haleine à laquelle nous devons tous nous atteler car il ne faut pas espérer qu'elles vont être très nombreuses dans les nouveaux manuels.

Il ne suffit pas que la situation soit intéressante : il faut que le jeune élève soit convaincu qu'il peut la maîtriser. Il le sera s'il obtient rapidement des bouts de réponse qui l'encourageront à aller plus loin; plus généralement *si la situation lui suggère une action.* Souvent ce serait une erreur que de vouloir le guider vers *une* démarche : il ne sait pas encore se laisser guider. Au contraire plus la situation permet des attaques différentes mieux elle convient.

Les problèmes fermés, directifs, ne conviennent pas à ce stade.

Voici quelques exemples de situations répondant à ces préoccupations, toutes — sauf une — utilisables à partir de la Sixième.

Pour le travail en équipes — où le problème peut être plus difficile.

1. On propose d'écrire un entier naturel, puis les entiers qu'on peut obtenir en le divisant par un nombre premier et en itérant cette opération. On peut suggérer la représentation sagittale où la flèche signifie « ... divisé par un nombre premier donne... », autrement dit l'ébauche du treillis des diviseurs du nombre considéré (cf. fiches « Relations » de Z. P. Dienes). De nombreux problèmes se posent qu'on peut laisser les enfants formuler, en les aidant : organisation des schémas dans le plan et dans l'espace; comparaison des schémas; recherche des nombres pouvant habiller un schéma donné, etc.

2. Quels nombres peut-on atteindre à partir de 3 et 5 en ajoutant 3 ou 5 autant de fois qu'on veut? Ou : quelles sommes pourraient-on payer si on possédait uniquement des pièces de 3 F et de 5 F?

3. Dénombrement des chemins entre deux nœuds d'un quadrillage (cf. fiche « Problèmes ouverts des Documents de la R.T.S. et article de M. Roumanet, p. 88 dans « Actes du I[er] Congrès international de l'Enseignement Mathématique »).

4. (Dus à J. J. Fletcher.) « Dans une machine sont disposés en file, trois gobelets. Quand on appuie sur le bouton C la machine retourne le gobelet de gauche et échange les deux autres sans les retourner. Quand on appuie sur le bouton D la machine retourne le gobelet de droite et échange les deux autres sans les retourner. » Tel était le début d'une fiche dont j'avais longuement médité la rédaction pour amener, en six questions, des élèves de Quatrième à explorer complètement cette situation. Je ne sais pourquoi je n'avais pas vu que je tenais une situation en or pour la libre activité des élèves. Je m'en suis heureusement avisée à temps et, lorsque le moment m'a paru favorable à l'introduction de cette étude, j'ai lu deux fois le paragraphe reproduit ici et dit : « Voilà : je crois que vous pouvez vous passer d'une fiche mais si une équipe préfère être guidée la fiche est prête, qu'elle la demande! »

Une très belle activité a suivi : s'il m'a toujours été possible de m'entretenir avec toutes les équipes qui désiraient un avis par contre je n'ai pu « photographier » la démarche et les tâtonnements des huit équipes.

Voici ce que j'ai noté :

18 novembre : « Trois équipes s'intéressent spontanément à un arbre donnant tous les états qu'on peut atteindre à partir d'un état en agissant sur les boutons. Deux ou trois autres équipes viennent un peu plus tard à cet arbre. »

21 novembre : « Plusieurs équipes découvrent qu'à partir d'un état on ne peut pas atteindre n'importe quel état et réorganisant leur travail avec une représentation sagittale des bijections :

« .devient. en appuyant sur D », « .devient. en appuyant sur C. »

« Une équipe a étudié toutes les transformations que peut réaliser la machine je me demande si elles ont cherché tous les couples de chaque composée. »

Le 25 novembre, une dernière séance est consacrée à ce travail, en mon absence. Le 28, de l'avis général « personne n'a plus d'idée », il faut faire une synthèse. C'est alors que l'équipe qui avait établi dès le 21 la table de composition nous apprend que « c'est exactement pareil que pour le dictionnaire vénusien réduit (*) : les règles de simplification sont les mêmes. »

Les élèves n'attendent nullement de moi que je leur révèle la solution : je n'ai donc aucune difficulté à m'en tenir à la ligne de conduite que je me suis fixée : ne rien révéler, laisser les enfants aller leur chemin.

Au fond je ne sers généralement qu'à activer une prise de conscience ou à les rassurer sur leur audace.

(*) Un travail à partir du monoïde engendré par a, b.

Voilà, lorsqu'une équipe m'appelle, ce que je puis entendre : « Madame nous pensons nous donner comme but de recherche toutes les dispositions des gobelets que peut donner la machine. Est-ce que vous pensez que c'est une bonne question? » ou bien : « Joëlle a eu l'idée d'un tableau cartésien : on était d'accord, mais ça ne marche pas très bien ». Moi : « que devrait-il donner ce tableau? » etc. « Oui, c'est ça on sentait bien que ça n'allait pas, on va chercher autre chose. »

Pour le travail individuel à la maison :

1. (D'après Rosensthiel et Mothes : Mathématiques de l'action.)

On considère quatre points disposés en carré et, au centre, un cinquième point. Entre ces points on a le droit de tracer quatre segments à condition :

— de ne pas former une ligne brisée fermée,

— de ne pas laisser un point isolé.

Il faut :

a) Trouver toutes les figures possibles.

b) Étudier, sur l'ensemble des figures trouvées, la relation « on peut passer de la figure x à la figure y en déplaçant un seul segment ».

Devoir très bien accueilli (Sixième) : bien entendu l'ensemble des figures est remis sans commentaire mais on peut lire, dans la présentation même, le reflet de préoccupations de recherche méthodique.

Les copies ont des physionomies très variées la question *b*) ayant suggéré des initiatives et recherches très différentes.

2. Parties de $\mathbb{Z}$ stables pour l'addition (Quatrième).

a) Cherche une partie P de $\mathbb{Z}$ telle que l'addition soit une loi de composition interne sur P.

b) Cherche d'autres parties répondant à cette condition : de telles parties de $\mathbb{Z}$ sont appelées « parties stables pour l'addition ».

As-tu trouvé des parties stables finies?

c) Pour chaque partie stable P trouvée, examine si (P; +) est un groupe.

La formulation des questions *a*) et *b*), où une seule question paraît suffire, vise à rassurer l'élève — qu'un sujet qu'il pressent vaste effraie, non sans raison — et à fixer son attention sur la définition d'une partie stable avant que son imagination soit entraînée vers la recherche d'autres parties. Cette formulation n'ôte aucune liberté aux jeunes chercheurs; d'où les remarques et les initiatives trouvées dans les copies. Quelques-uns se proposent de prouver qu'il n'y a pas de partie stable finie autre que $\varnothing$ et $\{0\}$ et il ne manque à une de ces démonstrations que quelques... raffinements pour être la nôtre. Certains affirment « l'ensemble $a.\mathbb{Z}$ des multiples de a est une partie stable, quel que soit a »; très peu explicitent le raisonnement; mais n'est-ce pas suffisant pour autoriser à penser qu'un plus grand nombre a fait ce raisonnement mais a jugé inutile de l'exposer? Dans un prolongement de ce travail, sur les parties de $\mathbb{Z}$ stables pour la soustraction, je demandais :

a) Tu as trouvé des parties de $\mathbb{Z}$ stables pour l'addition : sont-elles stables pour la soustraction?

b) Il te reste donc à chercher des parties de $\mathbb{Z}$ stables pour la soustraction et non stables pour l'addition.

c) Récapitule dans un tableau :

$P \subset \mathbb{Z}$	P stable pour $+$	P stable pour $-$	$(P, +)$ groupe

d) En te limitant à l'ensemble des parties examinées quels énoncés peux-tu faire?

Voici quelques réponses :

C. C. : « Si $P \subset \mathbb{Z}$, si P est stable pour la soustraction, alors P est stable pour l'addition. »

F. F. : « Toute partie de $\mathbb{Z}$ stable pour la soustraction est stable pour l'addition. »

F. M. : « Dans $\mathbb{Z}$ toute partie stable pour la soustraction est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. »

I. V. : « *En me limitant aux parties étudiées* je vois qu'une partie P stable pour l'addition est stable pour la soustraction si et seulement si la partie P munie de l'opération addition est un groupe. »

Ainsi se trouvent atteints certains objectifs : les élèves se sont posé des questions; ils ont pris l'initiative de démonstrations; ils ont formulé correctement des observations en utilisant les connecteurs « si... alors », « si et seulement si. »

• *Éveiller et préserver...* • Éveiller sera l'affaire des classes de Sixième et Cinquième... en attendant mieux. Mais préserver ce goût et la confiance de l'enfant dans ses possibilités demandera toute notre attention *pendant la période assez longue où la sensibilisation et l'aptitude à la déduction formelle s'éveillent et se développent très inégalement dans la classe.*

J'ai parlé plus haut de l'importance de *continuer à admettre dans les classes de Quatrième et Troisième des exercices de types variés* sans privilégier la géométrie déductive. On en trouvera plusieurs exemples. Les deux premiers se placent dans le cadre de l'exploration intuitive des permutations d'un quadrillage ou d'une tapisserie : les suivants sont consacrés à l'introduction de la notion de distance. Dans ces derniers on peut remarquer des situations allant d'une démonstration [δ vérifie : $\delta(x;y)+\delta(y;z) \leqslant \delta(x;z)$] que l'élève pourra établir aussi bien avec un arbre épuisant les cas possibles pour les valeurs de $\delta(x;y)$ et $\delta(y;z)$ que par le raisonnement économique interprétant le premier membre comme la longueur d'un chemin de x à z — à l'étude d'une somme

$$\sum_{i=1}^{i=30} (|a-b|+|b-c|)$$

en passant par la manipulation de relations ternaires, de « lieux géométriques » etc.

Corrélativement l'attitude du professeur ne devrait pas conduire l'enfant à l'idée qu'il y a des activités mathématiques nobles et d'autres moins nobles.

Il faut ajouter à cela l'importance de *continuer* pendant cette période *la pratique du travail en équipes*. Je n'ose m'étendre ici sur ce qui est une question de méthode dans la conduite de la classe. Pourtant le travail en équipes nous ramène aux conditions affectives : je vois que ce mode de travail permet d'entretenir chaque enfant, quels que soient les accidents de sa scolarité (santé, problèmes familiaux, baisse momentanée de l'intérêt) dans la conviction qu il peut *faire* des mathématiques; permet de proposer des travaux plus difficiles, donc plus intéressants ou plus proches des vrais problèmes; permet à l'enfant des *audaces* qu'il n'aurait pas toujours seul : il s'enhardit à dire « nous avons essayé de prouver », à combiner astucieusement les égalités, à critiquer... exactement comme, avec des camarades, il appprend à grimper aux arbres et à sauter des ruisseaux même s'il est un peu chétif ou d'un naturel un peu timoré.

Pour conclure : les inhibitions, qui ont pesé si lourd dans l'apprentissage de la déduction, devraient disparaître.

• Les programmes de Sixième et de Cinquième nous offrent un cadre favorable à l'apprentissage de la recherche et de la déduction — objectifs qui doivent nous préserver de réduire ces programmes à l'acquisition d'un vocabulaire et de quelques techniques sur les décimaux relatifs.

• Le programme de Quatrième en préparation n'a pas tenu compte des observations et avertissements des expérimentateurs sur les inconvénients qui résulteraient d'une place privilégiée donnée à la géométrie; à « l'approche des réels », « dont l'étude est nécessairement directive, il juxtapose un programme de géométrie assez important. J'espère que, malgré tout, les maîtres trouveront le moyen de préserver dans ces classes l'esprit et les méthodes des classes précédentes et que ces quelques lignes les y aideront tant soit peu.

Quelques réflexions

Jacques BASTIER,
Bordeaux.

Nous proposons ici quelques réflexions suggérées par la recherche pédagogique que nous menons, ou observons, dans l'académie de Bordeaux et qui touche, depuis au moins trois ans, plus de 20 classes d'élèves non sélectionnés d'origine soit urbaine, soit rurale.

De l'importance relative des programmes.

Il n'est pas possible de changer brusquement et profondément les programmes car, pour les maîtres comme pour les élèves, le présent de chaque jour se situe toujours entre un passé et un avenir dont on ne dispose pas, ou pas totalement. D'ailleurs, la seule réforme véritable se fera avant tout dans les classes et par ***une évolution progressive des méthodes et de l'esprit de l'enseignement.*** Elle sera possible à la condition qu'on admette, dans l'exécution des programmes, une certaine souplesse sur le fond et une grande souplesse dans la forme. Ce principe semble admis en général mais la réussite de la réforme dépendra en définitive surtout de ***la liberté réelle des maîtres*** qui est conditionnée, d'une part par les aptitudes développées en eux par une information et un recyclage appropriés et d'autre part par ***la pression du milieu socio-professionnel.*** Or, sur ces derniers points la tâche à accomplir est immense et est à peine commencée.

De l'ambition de l'enseignement traditionnel.

Admettons que, passé l'âge de 11 ans, n'importe qui puisse apprendre n'importe quoi, avec suffisamment de temps et des méthodes appropriées, s'il en a vraiment le désir. Cela expliquerait que l'enseignement traditionnel des mathématiques ait survécu si longtemps sans que l'on constate une faillite totale. Conçu en partie pour une élite et en partie pour la formation pratique d'un certain type de citoyen, les maîtres ont essayé en vain de concilier l'inconciliable, en cherchant à appuyer les pratiques sur les théories, la réflexion et le raisonnement. Notre expérience actuelle nous permet d'affirmer, contrairement peut-être aux apparences, que nous tentions d'***expliquer l'automobile avant la brouette***, ou si l'on préfère ***la structure euclidienne sur les réels avant la structure de groupe!*** A quoi aboutissait en fait notre enseignement? A apprendre à se servir d'une automobile à des gens qui n'auront jamais l'occasion d'utiliser autre chose qu'une bicyclette! Remarquons bien d'ailleurs que cet enseignement fondé sur le ***pourquoi*** n'aboutissait le plus souvent qu'à une ***réussite sur le comment*** : conséquence inévitable de la complexité des notions considérées.

Enseignant, dernier artisan.

Il ne s'agit pas ici de dénigrer l'artisan, mais de constater que celui-ci est pratiquement condamné dans notre société qui invente chaque jour des techniques plus rentables que les siennes. Or, si nous n'y prenons pas garde, la partie la plus importante de notre enseignement et celle qui est à première vue la plus efficace, est l'apprentissage de techniques que nous qualifierons d'artisanales, abandonnées partout, sauf à l'école et par certains bricoleurs peu évolués durant leurs loisirs! C'est, par exemple, le cas pour un certain genre de calcul numérique que les calculatrices mécaniques ou électroniques rendent caduc. Il ne faut pas d'ailleurs en déduire que le calcul numérique sans machine doive disparaître de notre enseignement mais seulement qu'il faut le concevoir en tenant compte de cette évolution.

De la vanité des programmes en général.

Nous ne contesterons pas qu'actuellement les programmes comme les examens soient un mal nécessaire au niveau de toute formation spécialisée. Au niveau de la formation générale du premier cycle ne serait-il pas possible d'évoluer vers une suppression de ces maux et de leur nécessité? Observons qu'à ce niveau précisément, il devient très difficile de trouver des critères permettant de choisir avec quelque certitude les connaissances ou les techniques qu'il conviendrait d'apprendre en priorité. Comment déterminer ce qui est vraiment fondamental ou le plus utile au plus grand nombre? Quant à la culture elle va résider sans doute beaucoup plus en mathématique, dans la capacité de l'homme de se servir des machines et surtout de réaliser ce qu'elles sont incapables de réaliser que dans son aptitude à faire plus lentement et moins sûrement le travail des machines. Peut-être nos élèves pressentent-ils cela mieux que nous lorsqu'ils montrent si peu d'enthousiasme à apprendre par cœur ce qui est dans les livres ou les mémoires d'ordinateurs, où ils savent pouvoir le trouver si un jour ils en ont besoin pour une tâche sérieuse. De même lorsqu'ils oublient si vite ce qu'il fallait apprendre pour l'interrogation du lundi. Peut-on leur reprocher aussi de se désintéresser de l'apprentissage d'une technique lorsqu'ils constatent que, quoiqu'ils fassent, ils resteront dans cette technique beaucoup plus lents que plusieurs de leurs camarades mieux doués, ou qu'ils ont conscience que cette technique est déjà dépassée? Mais alors que faire?

Des nombres et de la géométrie comme base de l'enseignement général.

Dans les années qui viennent nous constatons que les programmes du premier cycle ne seront pas profondément bouleversés. Les nombres et la géométrie en constituent apparemment toujours l'essentiel avec une timide apparition des ensembles et de quelques notions de logique et sur les groupes. La mathématique d'aujourd'hui s'applique un peu dans tous les domaines et se trouve aussi presque partout, mais il faut reconnaître que nous sommes peu habitués à la voir ailleurs que dans le domaine traditionnel. De plus, sans faire appel à un matériel coûteux ou encombrant ou à des connaissances spécialisées, peut-être est-il difficile de trouver des domaines aussi favorables à l'enseignement, même réformé, que nous souhaitons mettre en œuvre. Mais, dans ces conditions, il conviendrait de ne plus considérer les nombres et la géométrie comme des buts, mais comme des moyens dont le privilège n'est plus absolue. Dès lors de nombreuses règles, de nombreux théorèmes ou définitions deviennent relativement accessoires et peuvent ne plus être appris, ou oubliés sans inconvénient; il en sera de même pour la plupart des techniques. Paradoxalement un problème ne sera intéressant que dans la mesure où son étude rend l'élève capable de résoudre ceux qui ne lui ressemblent pas! Paradoxalement aussi il sera souhaitable d'abandonner en général l'apprentissage d'un mécanisme au moment où l'élève commence à le maîtriser et, devenant une machine, n'a plus à réfléchir. Bien sûr cela n'est guère compatible avec les examens de type traditionnel qui jugent essentiellement de l'aptitude du candidat à résoudre rapidement quelques problèmes types dont l'intérêt général paraît aujourd'hui très douteux. Comme les maîtres jouent un rôle essentiel dans le choix des sujets et la correction il doit dépendre d'eux que cela change progressivement.

Perspectives d'avenir.

Plutôt que de faire ici un exposé, fastidieux pour tous, de réussites ou d'échecs déjà observés dans nos tentatives beaucoup trop partielles pour être très probantes, essayons d'indiquer les dangers qui guettent le maître et les avantages qu'il peut espérer exploiter dans l'évolution amorcée. Il peut en effet sortir du meilleur ou du pire de ces nouveaux programmes de Quatrième et de Troisième. Du pire, si on s'engage inconsidérément en Quatrième dans les nombres sans se fixer de limites précises. L'apprentissage des techniques du calcul, en effet, ne sera jamais fini. Certains élèves retombent pendant des années et périodiquement dans les mêmes confusions, d'autres restent malhabiles, lents ou étourdis. Si on insiste trop, on peut décourager des élèves susceptibles pourtant de bien réussir en mathématique par la suite; si on s'attarde et si on répète c'est une perte d'un temps précieux pour la plupart. Dans le domaine du calcul numérique ou littéral, on trouve à la fois des justifications de règles et des théorèmes qui se prêtent bien à l'initiation aux démonstrations raisonnées mais de nombreux autres qui ne s'y prêtent pas du tout. Or, il semble également fâcheux d'intercaler constamment, au milieu d'énoncés démontrés, des énoncés admis parce qu'on ne peut s'en passer et que leur démonstration est trop compliquée pour nos élèves. Nous pensons même qu'il faut absolument éviter les pseudo-justifications intuitives ou particulières de tels énoncés car les élèves n'ont déjà que trop tendance à y faire appel ou à s'en contenter. Du pire aussi, si la géométrie devient essentiellement de la géométrie analytique. A première vue cela est pourtant très séduisant car les élèves parviennent à résoudre ainsi de nombreux problèmes avec un minimum de connaissances, d'effort cérébral et de réflexion. Cette économie et cette facilité ont apparemment un grave revers : les élèves perdent le plus souvent de vue l'origine du problème, les démarches logiques et la signification des résultats, éléments qui semblent pourtant les plus importants pour ceux, les plus nombreux, qui ne se spécialiseront pas dans un tel domaine. Le meilleur peut en sortir, par contre croyons-nous, si on profite du changement pour retenir surtout les lignes de force des nouveaux programmes, indépendamment de l'habillage relativement classique qui a été conservé et de toute signification concrète exclusive trop particulière. Ces lignes de force sont les bijections, les groupes, les corps ordonnés, et certains espaces vectoriels, affines et euclidiens de dimension 1 ou 2 essentiellement. Il ne s'agit pas de remplacer l'étude d'une théorie particulière par l'étude des théories plus générales qui la contiennent, mais d'élargir l'horizon de nos élèves en faisant appel souvent à d'autres exemples, généralement plus simples à embrasser dans leur ensemble, des structures en question, très souvent des structures finies. De tels exemples ont commencé à être découverts et utilisés avec un grand profit ces dernières années. Comme leur intérêt est surtout pédagogique et limité sans doute à un niveau bien déterminé un travail important de recherche reste à faire dans ce domaine. Une collaboration étroite entre des spécialistes de ces structures, parfois encore en voie d'élaboration actuellement, et des maîtres du premier cycle ayant quelque imagination pour trouver et mettre au point des exemples adaptés aux élèves paraît, soit dit en passant, une tâche d'un intérêt certainement considérable.

Formation du raisonnement logique et à l'esprit de la mathématique contemporaine.

La vérité mathématique est une vérité hypothético-déductive de structure. D'une certaine façon, cela signifie que la certitude mathématique porte davantage, sinon essentiellement, sur les relations d'inférence entre diverses propositions à l'intérieur d'une théorie déterminée que sur la vérité, toute relative, de ces propositions. Ce fait paraît primordial pour une formation logique et mathématique vraiment moderne. Or le rôle historique de la proposition d'Euclide montre déjà que les domaines traditionnels se prêtent mal à comprendre ce fait; il a fallu près de deux millénaires, en effet, aux mathématiciens pour découvrir les géométries non euclidiennes et, ainsi la relativité de la vérité de la fameuse proposition. Il est bien évident que ce n'est pas par cet intermédiaire que nous pourrons faire comprendre à nos élèves du premier cycle ce qu'est un axiome et une théorie ou une structure, ou simplement une vérité dans la mathématique contemporaine, et comment on la démontre. Pour y parvenir il faut trouver et utiliser d'autres familles de structures, apparentées comme les diverses géométries euclidiennes et non euclidiennes, mais beaucoup plus simples et dont on peut avoir une vue d'ensemble en quelques heures. Nous pouvons affirmer que ces structures existent et sont utilisables au niveau qui nous occupe, si on accepte, là aussi, d'ouvrir notre horizon aux structures finies en particulier. Il ne s'agit que d'appliquer aux structures un vieux principe pédagogique qui veut que, pour mieux faire comprendre l'énoncé du type : la conjonction de a, b et c entraîne d, on donne des exemples où a, b, c, ne sont pas simultanément vérifiés, et où on observe l'influence que cela peut avoir sur d. A notre époque, ne vaut-il pas mieux, au niveau du premier cycle, former nos élèves à situer une règle ou un théorème dans le contexte où ils sont valables et à ne pas les considérer comme des vérités absolues, même si, en contre-partie, nous devons les entraîner moins bien à utiliser certaines de ces règles ou théorèmes d'une façon mécanique et réflexe ?

Nous demandons au lecteur de nous excuser d'être autant resté au niveau des généralités; cela est, avouons-le, en partie volontaire et en partie une nécessité. Volontaire, car le principal problème que devront résoudre les maîtres, dans les années qui viennent, sera le problème de choix de ce qu'ils retiendront pour constituer leur enseignement parmi une documentation qui deviendra progressivement vaste et variée : manuels scolaires, émissions de télévision, fiches d'élèves, publications pédagogiques diverses. En effet, ce problème a déjà été le problème principal dans notre expérimentation, alors que nous ne disposions pourtant que d'une documentation relativement beaucoup plus réduite. Essayer de dégager quelques critères pour un tel choix nous a semblé, de ce fait, aussi important que de contribuer à accroître l'embarras de ce choix en enrichissant la dite documentation. Nécessité aussi car les documents les plus réussis que nous avons pu réaliser ont déjà été publiés ou diffusés voire repris et améliorés par d'autres. Nous indiquerons cependant quelques thèmes qui méritent notre attention et que nous avons déjà utilisés avec succès, ou regretté de ne pas l'avoir fait davantage et plus tôt.

Quelques thèmes qui méritent d'être exploités.

A partir de la Sixième : en liaison avec les diagrammes de Venn et de Carroll tableau (vrai-faux ou 0-1) d'appartenance des éléments d'un référentiel à diverses de ses parties; illustration par des cartes perforées; démonstration de quelques égalités ensemblistes par ces diverses méthodes. Exemples de compositions d'applications et de bijections et de groupes de bijections (à 6 éléments au plus pour fixer les idées). Exemples de classification des objets d'un référentiel selon certaines de leurs propriétés, cas des partitions, en utilisant des tableaux rectangulaires ou des arbres.

A partir de la Cinquième : notions sur les connecteurs logiques par les tables de vérité et sur les quantificateurs; propriétés et classification de certaines relations par les propriétés ensemblistes de leurs graphes (cela peut conduire à utiliser des définitions inhabituelles). Exemples de groupes opérant dans des ensembles à partir, en particulier, de machines engendrant certains changements d'états d'un système physique. Exemples d'anneaux d'endomorphisme de groupe commutatif à partir de télécommande avec relais, de telles machines. Par ce procédé il semble que l'on puisse introduire de façon très concrète les anneaux ou corps à 2, 3 ou 4 éléments et peut-être quelques espaces vectoriels ou modules très simples (les endomorphismes du groupe de Klein semblent très intéressants à ce sujet). Préparation à la géométrie affine par un premier contact avec les plans à 4 ou à 9 points et les axiomes communs avec ceux du plan usuel.

Remarque. — Contrairement à ce qu'on pourrait penser ou être tenté de faire, il est préférable de placer, le plus souvent, ces exemples de structures finies avant l'étude des structures classiques apparentées car elles sont plus simples, plus concrètes et permettent de comprendre la signification et l'intérêt des axiomes communs, comme principes de base indépendamment d'une signification concrète particulière. C'est un tel procédé qui peut permettre de partir en Quatrième sur la notion de nombre en admettant essentiellement qu'il existe un corps commutatif ordonné « contenant » les naturels ou les entiers, les élèves étant préparés à comprendre une telle affirmation sans qu'on ait à l'accompagner de justification douteuse ou génératrice d'idées fausses.

En Quatrième : si elle a été préparée suffisamment on peut exploiter assez systématiquement la notion de groupe en géométrie comme en algèbre; centrer l'étude de la géométrie autour des groupes de transformations (dilatations, homothéties, translations, bijections affines d'une droite) semble possible et présenter des avantages sérieux. Introduire le corps des nombres d'une géométrie affine à partir des homomorphismes du groupe des translations conservant les directions, ou si l'on préfère des homothéties vectorielles, procédé que nous avons utilisé avec succès, permet de développer efficacement l'essentiel du nouveau programme en équilibrant la part du numérique et de la géométrie sans réduire cette dernière à la géométrie analytique. Cela permet aussi des analogies entre une ou deux géométries finies et la géométrie affine usuelle. Cela donne beaucoup de cohérence à l'ensemble tout en limitant les propositions admises à un petit nombre, les premières très simples à forme géométrique et les dernières à forme plus algébrique qui n'interviennent que lorsque les élèves ont acquis le maturité suffisante. Malgré les tâtonnements et pertes de temps inévitables d'une première expérimentation, nous constatons que dans les classes qui ont utilisé cette progression, à la fin du second trimestre de la classe de Troisième, l'étude du nouveau programme du premier cycle est presque achevée. Pourtant, nous avons utilisé des méthodes assez lentes : le travail des élèves en classe, par groupe de 4 ou parfois de 2 selon des directives plus ou moins détaillées présentées souvent sur des fiches remplaçant fréquemment le cours magistral.

En *Troisième* seulement : la géométrie métrique selon un procédé très proche de celui indiqué dans le nouveau programme.

Conclusion.

Nous avons conscience de laisser le lecteur sur sa faim. Mais il est impossible de renouveler un enseignement modelé au cours de plusieurs siècles après une expérimentation d'un an dans chaque classe menée par quelques dizaines de professeurs. Nous espérons simplement que notre travail aidera nos collègues dans les orientations et les choix des années qui viennent. Nous croyons à la mathématique moderne pour tous parce que nous sommes persuadés aujourd'hui que ce qui est général est plus simple et sera plus formateur et plus utile au plus grand nombre sans être obligatoirement plus abstrait que ce qui est particulier. Mais la mathématique moderne est née et s'est développée dans un milieu très spécialisé et on trouve, maintenant encore, plus facilement des théories des ensembles ou des groupes pour étudiant bien doué que des situations familières et des progressions propres à faire saisir, à de jeunes élèves, ces notions sans les dénaturer. L'adaptation nécessaire à chaque niveau va dépendre, pour l'essentiel des professeurs enseignant à ce niveau. Nous pensons que la tâche de chacun d'eux sera facilitée si elle peut s'accomplir à l'intérieur de petites équipes elles-mêmes en relation dans le cadre d'organisme plus vaste comme l'A.P.M.E.P.

Indications bibliographiques

Remarques préliminaires.

Par sa conception, ce *Bulletin* spécial est centré sur la mise en application du nouveau programme de Quatrième tel que polémiques, oppositions, avatars et conciliation finale l'ont fait. Cela ne signifie pas que les maîtres enseignant dans cette classe doivent s'en tenir strictement à cette documentation. D'abord, il y a beaucoup de manuels et il y en aura d'autres. Ensuite il y a des ouvrages de toutes sortes dans lesquels chacun puisera des idées. Nous tentons de rappeler ci-dessous ceux qui nous paraissent susceptibles de rendre service aux Collègues.

Tout choix est arbitraire; nous en sommes conscients. Aussi bien l'omission d'un titre ne signifie aucunement jugement réprobatif.

De même, toute classification a sa part d'arbitraire. Nous distinguerons cependant les ouvrages par des signes :

1. Ouvrages divers.

○ Considérations générales sur l'enseignement ou les principes de la réforme.

∇ Ouvrage dans lequel le lecteur trouvera des suggestions pour la rénovation de son enseignement.

□ Manuel (pour telle classe indiquée).

*, ** Ouvrage pour la formation mathématique des maîtres (* les plus élémentaires, *** d'un niveau élevé).

ADLER

1* *Mathématique d'aujourd'hui* (O.C.D.L.). Première initiation; exercices avec corrigés; traduit de l'américain.

ALEXANDROFF

2* *Introduction à la théorie des groupes* (Dunod). Une présentation élémentaire, illustrée de nombreux exemples, par un grand mathématicien qui a su être simple; traduit du russe.

BOUVIER

3* *La théorie des ensembles* (P.U.F.). Sous le petit volume d'un « Que sais-je », notre Collègue de l'I.R.E.M. de Lyon donne un exposé « naïf » mais très complet allant jusqu'à la définition des cardinaux et donnant pour finir des aperçus sur *les* axiomatiques de la théorie des ensembles.

CARROLL (Lewis)

4* *Logique sans peine* (Hermann). Par l'auteur d'*Alice au Pays des Merveilles*, un classique recommandé.

CHOQUET (Gustave)

5** *L'enseignement de la géométrie* (Hermann). Présentation d'une axiomatique qui a inspiré, de plus ou moins près, les rédacteurs du programme 1971 de Quatrième.

COLOMB et GLAYMANN

6 ▽ *Logique, ensembles et cartes perforées* (O.C.D.L.). Nombreuses suggestions d'exercices.

CORNE et ROBINEAU

7 ▽ *Les mathématiques nouvelles dans notre vie quotidienne* (Casterman-poche). Des exemples suggestifs.

DECAILLOT (A.-M.)

7* *Cahiers mathématiques* (Mouton et Gauthier-Villars). Deux volumes d'exercices avec corrigés; suggestions pour des exercices.

DEDRON et ITARD

8* *Mathématiques et Mathématiciens* (Magnard). Des idées précises sur l'histoire des mathématiques de base à partir de l'analyse de textes originaux.

DIENES (Z. P.)

9 ○ *Construction des mathématiques* (P.U.F.).

10 ○ *Comprendre la mathématique* (O.C.D.L.). Dans ces deux ouvrages, l'auteur expose sa théorie de l'apprentissage mathématique et l'illustre d'exemples; en particulier, dans la 2e édition française du premier livre, on lira ce qui concerne l'enseignement de la géométrie et on le rapprochera de

DIENES et GOLDING

11 ▽ *La géométrie par les transformations.*

DUMONT (M.)

12 ▽ *Étude intuitive des ensembles* (Dunod).

13 ▽ *Algèbre* (Dunod). Les deux ouvrages sont écrits pour des jeunes élèves tels que ceux du premier cycle secondaire.

DUPONT (Evariste)

14* *Apprentissage mathématique* (Sudel). Ouvrage spécialement écrit pour la formation permanente des maîtres.

DUVERT, GAUTHIER, GLAYMANN

15* *Travaux pratiques de mathématiques* (O.C.D.L.). Trois recueils de fiches contenant de nombreux exercices.

FAUVERGUE et BRIANÇON

16* *Initiation à la mathématique moderne* (Hachette). Deux volumes pour la F.P.M.

FLETCHER (T.)

17* ▽ *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui* (O.C.D.L.). Ouvrage collectif, traduit de l'anglais, spécialement recommandé pour la richesse des aperçus qu'il propose.

GALION (E.)

18* *Le langage mathématique* (O.C.D.L.). Ouvrage collectif sur un sujet qui est au centre des préoccupations des pédagogues.

GLAYMANN et JANDOT

19 □ *Apprentissage du calcul numérique* (O.C.D.L.). Bien qu'une circulaire ministérielle récente sur le sujet prête, selon le lecteur, à sourire ou à pleurer, tous les Collègues apprécient les ouvrages leur proposant, comme ces 60 fiches, des exercices utilisables.

KAUFMANN

20* ▽ *Des points et des flèches... la théorie des graphes* (Dunod).

KUNTZMANN

21** *Méthodes numériques* (Hermann). Avec nombreux exercices corrigés; livre recommandé pour la F.P.M.

LABORDE

22 □ *Tables numériques de fonctions élémentaires* (Dunod). Les plus complètes et les plus récentes.

LUCAS

23 ▽ *Récréations mathématiques* (Blanchard). Quatre volumes.

PAPY (G.)

24* *Groupes* (Dunod).

25* *Groupoïdes* (P.U.F.).

26* *Le premier enseignement de l'analyse* (Eyrolles).

PICARD (N.)

27* ▽ *Mathématique et jeux d'enfants* (Casterman-poche).

POLLE (R.)

28* *Notions de mathématique moderne* (Delagrave).

REVUZ (A.)

29 ○ *Mathématique moderne, mathématique vivante* (O.C.D.L.).

STEINHAUS

30* ▽ *Mathématiques en instantanés* (Flammarion).

31* ▽ *Cent problèmes* (Gauthier-Villars).
Deux ouvrages traduits du polonais, riches en suggestions.

WALUSINSKI (G.)

32 ○ *Pourquoi une mathématique moderne* (A. Colin).

WARUSFEL (A.)

33* *Les nombres et leurs mystères* (Le Seuil).

34* *Les mathématiques modernes* (Le Seuil).

2. *Pour la formation permanente des maîtres.*

A des ouvrages déjà cités plus haut, nous ajoutons, sous la mention spéciale F.P.M., soit les publications de l'A.P.M.E.P. dont c'est le premier but, soit quelques ouvrages spécialement recommandés (même s'ils sont d'un niveau élevé.

35 ▽ *Bulletin de l'A.P.M.E.P.*, paraît cinq fois par an. Organe national de l'association ouverte à tous les maîtres de l'enseignement public « de la Maternelle à l'Université ». Rappel : n° 269-270 de 288 pages, « *la Mathématique en Sixième par ceux qui l'enseignent* » (prix de ce n° spécial, 10 F).

36 ▽ *Chantiers de Pédagogie Mathématique*, six cahiers de 32 pages par année scolaire, bulletin de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P.; l'abonnement 10 F. C.C.P. Paris 25-108-63 au nom de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. En préparation : un numéro spécial sur « préparer la réforme de l'enseignement du premier cycle ».

37* *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent*, dictionnaire sur fiches élaborées par la Commission du Dictionnaire. Édition 1967 (A) : 25 F. Suppléments : Millésime 1968 (B) : 4 F; Millésime 1969 (C) : 5 F. Édition 1969 ($A \cup B \cup C$) : prix 32 F.

38 ○ *Charte de Chambéry*, 1969, 1971, 1973, 1976, 1980, ... Étapes et perspectives de la réforme, octobre 1968, 32 p.; prix 2 F.

39** A. et G. REVUZ : *Le Cours de l'A.P.M.*, tome III, Éléments de topologie, 250 p., prix 27 F.

40** L. GUERBER et P.-L. HENNEQUIN :
1° *Initiation à la statistique* (240 p.; prix 25 F, cartonné 30 F);
2° *Initiation aux probabilités* (232 p.; prix 25 F, cartonné 30 F).

41* J. ITARD : *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes*, 32 p., prix 3 F.

42 ○ *Première étape... vers une réforme de l'enseignement mathématique dans les classes élémentaires*, 48 p., prix 3 F.

43* F. FRENKEL : *Angles*, 32 p., prix 3 F.

44* J. ADDA et W. FAIVRE : *Éléments de logique pour servir à l'enseignement mathématique*, 52 p., prix 4 F.

N.B. — Pour toutes les publications de l'A.P.M.E.P. (n°s 35 et 37 à 44) utiliser le virement postal Paris 5708-21; envoi franco.

Aux ouvrages précédents, édités au prix coûtant par l'A.P.M.E.P. sont venus s'ajouter des ouvrages à se procurer dans les librairies. Malgré leurs prix souvent plus élevés, nous citons ceux qui nous paraissent spécialement dignes de figurer dans les bibliothèques des professeurs (et en particulier celles des établissements).

ARTIN

45*** *Algèbre géométrique*, 212 p., Gauthier-Villars, édit.

CHOQUET (G.)

46*** *Cours d'analyse, tome II: Topologie*, 318 p., Masson, édit.

DIEUDONNÉ (J.)

47*** *Éléments d'analyse*, 3 volumes, Gauthier-Villars, édit.

48** *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, 224 p., avec de nombreux exercices, Hermann, édit.

DIXMIER (J.)

49** *Cours du premier cycle*, 2 volumes, Gauthier-Villars, édit.

GLAESER (G.)

50** *Mathématiques pour l'élève professeur*, 204 p., Hermann, édit. [Ouvrage spécialement conçu pour les maîtres du second cycle secondaire mais pouvant être fort utile pour ceux du premier. Sommaire : l'activité mathématique; le langage mathématique; science de la démonstration; théorie des ensembles; questions métriques et topologiques.]

GODEMENT (R.)

51*** *Cours d'algèbre*, 664 p., avec de nombreux exercices, Hermann, édit.

MAC LANE et BIRKHOFF

52*** *Algèbre*. Tome 1 : Structures fondamentales (408 p.). Tome 2 : Les grands théorèmes (344 p.). Nombreux exercices. Très bonne traduction de l'américain par J. WEIL qui a su ajouter des notes fort utiles au lecteur français. Gauthier-Villars, édit.

SCHWARTZ (L.)

53*** *Analyse*. Deuxième partie : Topologie générale et analyse fonctionnelle, 432 p., Hermann, édit. [Développement et nouvelle rédaction du Cours de Polytechnique qui intéressera les maîtres.]

ZIGLON (R.)

54** *Vers les structures*, nouvelle pédagogie des mathématiques, un volume de 200 p. environ à paraître en 1971, rédigé par des animateurs de l'I.R.E.M. de Lyon, Hermann, édit.

3. Revues.

Pour finir, nous donnons les titres de quelques revues intéressées par l'enseignement des mathématiques et qui pourront être consultées dans les bibliothèques des établissements (à condition de les y faire abonner). Pour celles qui intéresseront spécialement le lecteur, nous sommes à sa disposition pour lui donner des références plus précises dont il aurait besoin.

I. *Les Cahiers Pédagogiques* édités par la Fédération des C.R.A.P. sont les héritiers directs des « classes nouvelles ».

II. *L'Éducateur* est la revue mensuelle de l'I.C.E.M. Pédagogie Freinet. Nombreux cahiers spécialisés, BT ou BTS, dont certains directement inspirés par la réforme au premier cycle.

III. *Educational Studies in Mathematics*, édité par le Pr FREUDENTHAL de l'Université d'Utrecht.

IV. *L'Enseignement mathématique* édité par l'Institut mathématique de l'Université de Genève.

V. *Mathematical Gazette*, 4 numéros par an, éditée par the Mathematical Association de Grande-Bretagne.

VI. *Mathematica et Paedagogia*, revue trimestrielle de la Société Belge de Professeurs de Mathématiques.

VII. *Mathématiques et Sciences humaines*, revue trimestrielle éditée sous la direction de nos Collègues M. BARBUT et G. Th. GUILBAUD.

VIII. *The Mathematics Teacher*, revue mensuelle du Conseil national des Professeurs de Mathématiques des U.S.A.

IX. *Mathematics Teaching*, revue trimestrielle de l'Association of Teachers of Mathematics (A.T.M.) de Grande-Bretagne. Une des meilleures revues du genre.

P.-S. — Je recevrai volontiers toutes observations sur cette bibliographie incomplète et partiale. Il faudrait tout lire, mais un lecteur n'y suffit pas. Il faudrait tout citer, mais une revue n'y suffirait pas.

G. W.

Printed in France *Le Directeur de la publication :* P. VISMO

FD - Imp. Alençonnaise, B.P. 57, 61-Alençon - Dépot légal 1971 ; 9.453 - C.P.P.P. 35.996