racine, n. f. 1970-1/2

Us. : Le sens propre est botanique : partie, en général souterraine, de la plante par laquelle celle-ci se fixe et se nourrit. De là découlent des sens fig. : base, source ; parmi eux le sens linguistique (la « racine » d'où dérivent des mots apparentés) et le sens math. originel (un nombre considéré comme « racine » de ses puissances).

1. Racines n-ièmes.

1.1. *Définition générale.* Soit un ensemble E muni d'une loi interne associative, notée multiplicativement, et n un naturel non nul; soit f_n l'application de E dans E qui, à tout élément de E, fait correspondre sa puissance n-ième. On appelle *racine n-ième* d'un élément a de E tout antécédent de a par f_n. (Toutefois l'usage est de dire *racine carrée* et *racine cubique* au lieu de « racine deuxième » et « racine troisième »).

Du fait que f_1 est l'application identique, tout élément de E a une « racine unième » unique, qui lui est égale; mais cette notion est d'intérêt mineur. Pour $n > 1$, l'existence de racines n-ièmes n'est assurée pour tout élément de E que si f_n est surjective; par exemple, dans le cas où F est $\mathbb{Q}^+$, f_2 n'est pas surjective; cette découverte, après avoir scandalisé les premiers Pythagoriciens, achemina les Grecs vers les nombres irrationnels.

1.2. *Racine n-ième dans* $\mathbb{R}^+$. Si $E = \mathbb{R}^+$, f_n est bijective quel que soit n; donc tout réel positif ou nul a a une racine n-ième *unique*; ainsi se trouve définie une fonction telle que l'image de a est désignée indifféremment par $a^{\frac{1}{n}}$ [EXPOSANT] ou $\sqrt[n]{a}$.

Le symbole $\sqrt[n]{}$ s'appelle *radical n-ième*, et n est appelé son *indice*; on omet habituellement l'indice 2. L'écriture $\sqrt[n]{a}$ se lit *radical n-ième de a*; l'appellation « racine n-ième de a » est dangereuse par la confusion qu'elle crée avec la notion beaucoup plus générale de racine n-ième; l'ancienne énonciation « racine n-ième arithmétique de a » n'est pas à conseiller non plus.

Les règles du calcul des radicaux se déduisent aisément de celles du calcul des exposants naturels; elles sont formellement identiques à celles qui régissent les exposants fractionnaires. Mais il serait très dangereux de les étendre hors de leur domaine de validité $\mathbb{R}^+$ (voir ci-dessous 1.3.2.).

1.3. *Racines n-ièmes dans* $\mathbb{R}$. Si $E = \mathbb{R}$, les racines n-ièmes (quand elles existent) prennent le nom de *racines n-ièmes réelles.* Quel que soit n, le réel nul a une racine n-ième réelle unique, elle-même nulle.

Pour les réels non nuls, deux cas sont à distinguer suivant la parité de n :

1.3.1. Si n est pair ($n = 2p$), f_{2p} n'est ni injective, ni surjective. Aucun réel négatif n'a de racine ($2p$)-ième réelle; tout réel positif a a deux racines ($2p$)-ièmes réelles, l'une positive, pour laquelle la notation $\sqrt[2p]{a}$ ainsi que l'énonciation « radical ($2p$)-ième de a » demeurent légitimes, l'autre négative, naturellement désignée par $-\sqrt[2p]{a}$. (Ne pas confondre deux faits entièrement distincts : 1° le radical n'a de sens que si le radicande a est positif ou nul; 2° s'il a un sens, il représente par définition un nombre positif ou nul).

1.3.2. Si n est impair ($n = 2p + 1$), f_{2p+1} est bijective. Tout réel a a exactement une racine ($2p + 1$)-ième réelle unique qui, si le signe de a est connu, s'écrit naturellement, pour a positif : $\sqrt[2p+1]{a}$, et, pour a négatif : $-\sqrt[2p+1]{|a|}$.

Malheureusement, si le signe de a n'est pas connu a priori, l'écriture $(\text{sg } a)\sqrt[2p+1]{|a|}$ devient fastidieuse, surtout lorsque a est une expression tant soit peu compliquée. Bien qu'imparfaite, l'écriture qui reste la plus usuelle consiste à étendre l'usage de la notation $\sqrt[2p+1]{a}$, qu'il vaut mieux alors lire « *racine* ($2p + 1$)-*ième réelle de* a; si l'on craint des confusions, il est d'ailleurs loisible d'introduire quelque notation différenciée, par exemple $\sqrt[2p+1]{\vec{a}}$.

De toute façon, si l'unicité de la racine justifie la notation fonctionnelle, il ne faut pas perdre de vue que cette notation, quelle qu'elle soit, *échappe aux règles du calcul des radicaux ou des exposants* : pour a négatif, le réel positif $\sqrt[6]{a^2}$ n'est égal ni à $\left(\sqrt[6]{a}\right)^2$, qui est dénué de sens, ni à $\sqrt[3]{a}$, qui est négatif; et le danger serait encore plus grand d'introduire ici des exposants fractionnaires qui ne permettraient même pas de distinguer entre les deux premières écritures.

1.4. *Racines n-ièmes complexes.* Si $E = \mathbb{C}$, les racines n-ièmes prennent le nom de *racines n-ièmes complexes.* Quel que soit n, le complexe nul a une racine n-ième complexe unique, qui est 0; tout complexe non nul en a n.

Les racines carrées complexes de -1 sont habituellement désignées par i et $-i$, i étant le complexe de module 1 dont les arguments sont congrus (modulo 2π) à $\frac{\pi}{2}$. Il est également usuel de poser $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$; alors les racines cubiques complexes de 1 sont 1, j, j^2.

N.B. On prendra garde que les physiciens, soucieux de réserver la lettre i pour désigner des intensités de courant, emploient couramment j avec le sens qui est ici attribué à i.

De façon générale, k décrivant l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, les racines n-ièmes complexes de l'unité sont n complexes r_k de module 1, les arguments de r_k étant congrus (modulo 2π) à $k\frac{2\pi}{n}$. Quel que soit n, l'ensemble H_n de ces racines est stable pour la multiplication des complexes; la loi induite confère à H_n une structure de groupe commutatif. Est dite racine n-ième *primitive* de l'unité toute racine r_k telle que le sous-groupe de H_n qu'elle engendre est H_n lui-même; cela équivaut à dire que n et k sont étrangers (premiers entre eux).

Vu la pluralité des racines n-ièmes complexes, leur notation au moyen de radicaux est à proscrire rigoureusement jusqu'à un niveau relativement élevé. Alors seulement l'écriture $\sqrt[n]{z}$ peut redevenir acceptable dans certaines conditions (uniformisation préalable de la fonction par une coupure dans le plan de z, ou bien passage par continuité d'une « branche » à une autre d'une « fonction multiforme »).

2. Racines d'une équation.

2.1. *Racines d'une équation, d'une fonction polynominale.* Comme les solutions des équations entières les plus simples peuvent s'exprimer, à partir des coefficients de l'équation, au moyen de radicaux, le sens de *racine* a glissé vers celui de : solution d'une équation (le plus souvent entière) et celui de : zéro d'une fonction polynomiale. (Ce sens dérivé ne doit pas inciter à penser que toute équation entière est résoluble par radicaux; on sait que cette résolution est impossible en général dès que le degré dépasse 4).

2.2. *Fonctions symétriques des racines.* Tout polynome P_n de degrés n, à coefficients dans un corps algébriquement clos, y est décomposable en n facteurs du premier degré, et y admet donc n racines, deux à deux distinctes ou non, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; leur somme σ_1, la somme σ_2 de leurs produits deux à deux, la somme σ_3 de leurs produits trois à trois,... s'expriment sous forme de quotients des coefficients de P_n. Or toute fonction rationnelle symétrique en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ peut se transformer en une fonction rationnelle en $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$; donc toute fonction rationnelle symétrique des racines de P_n peut être mise sous forme d'une fonction rationnelle des coefficients de P_n.

2.3. *Corps des racines.* [CORPS].