différence, n. f. 1970-1/3

[différent]

Us. : Fait, pour deux ou plusieurs êtres, de pouvoir être distingués entre eux. Ce sens bifurque vers un sens qualitatif (*a*) : ce par quoi deux (ou, plus vaguement, plusieurs) êtres diffèrent — et vers un sens quantitatif (*b*) : de combien deux nombres, deux grandeurs diffèrent.

1. Théorie des ensembles.

1.1. *Différence symétrique de deux ou plusieurs ensembles.* C'est, dans le cas de deux ensembles A et B, la traduction exacte du sens (*a*). Généralement notée $A \Delta B$, elle est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'un ou à l'autre sans appartenir aux deux; c'est donc le complémentaire, par rapport à $A \cup B$, de $A \cap B$. Il est immédiat que $A \Delta \varnothing = A$ et $A \Delta A = \varnothing$. On vérifie que la « loi-différence symétrique » est commutative et associative, ce qui permet de définir la différence symétrique de plusieurs ensembles indépendamment de leur ordre.

Hormis cet emploi, la notion de différence en mathématiques est toujours relative à *deux* objets et non symétrique.

1.2. *Différence de deux ensembles.* La différence de deux ensembles A et B, notée $A \setminus B$ ou $A - B$, est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B, autrement dit le complémentaire, par rapport à A, de $A \cap B$. Il est immédiat que $A - A = \varnothing$ et $A - \varnothing = A$, mais cette fois $\varnothing - A = \varnothing$. (Noter que certains restreignent l'emploi de cette notion au cas où $B \subset A$; si l'on fait cette convention, la dernière écriture n'a pas de sens en général.)

2. Algèbre.

Différence de deux nombres. Ce sens précise le sens usuel (*b*) évoqué plus haut : ainsi la *différence* de 5 et de 2, pris dans cet ordre (ou bien, en rompant plus nettement la symétrie : l'*excès* de 5 sur 2), notée $5 - 2$, est le nombre qu'il faut ajouter à 2 pour retrouver 5. Plus généralement, en présence d'une opération interne commutative notée additivement, s'il existe un élément unique c tel que $b + c = a$, on dira que c est la différence, notée $a - b$, de a et de b.

Cette notion se rattache simplement à **[1,2]** par le fait que, si $B \subset A$, card $(A - B)$ = card A — card B, Mais on notera que, dans les deux emplois ensemblistes **[1.1]** et **[1.2]**, le mot *différence* désigne indifféremment une opération ou son résultat, alors qu'en algèbre il ne s'applique qu'au résultat de l'opération, laquelle est appelée *soustraction.*

du moins lorsque cette écriture est non ambiguë (c'est-à-dire pour card B < card A ou pour card B = card A fini).

3. Calcul numérique.

Différences tabulaires. Les différences au sens **[2]** jouent un rôle important dans la tabulation des fonctions à valeurs réelles d'une variable réelle.

3.1. *Définitions.*

Soit une table numérique dont le pas h est constant, c'est-à-dire une suite, écrite verticalement, de nombres $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, tels que $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1}$, auxquels on fait correspondre une suite de valeurs $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$.

On appelle :

- table de *différences premières*, la table qu'on obtient en écrivant dans une 3e colonne :

$y_1 - y_0$ sur la ligne située entre les lignes de y_0 et y_1,

$y_2 - y_1$ sur la ligne située entre les lignes de y_1 et y_2,

et ainsi de suite;

- table de *différences secondes* (ou d'ordre 2), celle qu'on obtient en formant dans une 4e colonne la table des différences premières de la table des différences premières;

différence, n. f. 1970-2/3

[différent]

- table de *différences troisièmes* (ou d'ordre 3), celle qu'on obtient en formant dans une 5^e colonne la table des différences premières de la table des différences secondes;
- etc...

(La table des valeurs de la fonction est parfois considérée comme la table des différences d'ordre zéro).

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & y_1 - y_0 & & & \\
x_1 & y_1 & & y_2 - 2y_1 + y_0 & & \\
 & & y_2 - y_1 & & y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 & \\
x_2 & y_2 & & y_3 - 2y_2 + y_1 & & \\
 & & y_3 - y_2 & & & \\
x_3 & y_3 & & & &
\end{array}
$$

Exemple numérique emprunté à la fonction :

$$x \mapsto x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$$

Arg^t	Fonct	Différences					
	(0^0)	1^0	2^0	3^0	4^0	5^0	6^0
— 2	21						
		— 25					
— 1	— 4		28				
		3		— 30			
0	— 1		— 2		24		
		1		— 6		0	
1	0		— 8		24		0
		— 7		18		0	
2	— 7		10		24		
		3		42			
3	— 4		52				
		55					
4	51						

3.2. *Remarques.*

3.2.1. Une même différence $y_{k+1} - y_k$ peut être considérée de trois façons différentes, pour lesquelles il est commode de disposer de dénominations et de notations distinctes : on pourra par exemple l'appeler soit *différence première avant* en la notant Δy_k, soit *différence première arrière* en la notant ∇y_{k+1}, soit *différence centrale* en la notant $\delta y_{k+\frac{1}{2}}$. Plus généralement on pourra appeler

$\Delta^n y_k = \Delta^{n-1} y_{k+1} - \Delta^{n-1} y_k$ *différence* n^{me} *avant*,
$\nabla^n y_{k+1} = \nabla^{n-1} y_{k+1} - \nabla^{n-1} y_k$ *différence* n^{me} *arrière*,
$\delta^n y_{k+\frac{1}{2}} = \delta^{n-1} y_{k+1} - \delta^{n-1} y_k$ *différence* n^{me} *centrale.*

(Dans cette dernière formule, $2k$ est entier, mais pas nécessairement k).

Par exemple :

Différences avant Différences arrière Différences centrales

$$
\begin{array}{llll}
y_0 & & & \\
 & \Delta y_0 & & \\
y_1 & & \Delta^2 y_0 & \\
 & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 \\
y_2 & & \Delta^2 y_1 & \\
 & \Delta y_2 & & \\
y_3 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
y_0 & & & \\
 & \nabla y_1 & & \\
y_1 & & \nabla^2 y_2 & \\
 & \nabla y_2 & & \nabla^3 y_3 \\
y_2 & & \nabla^2 y_3 & \\
 & \nabla y_3 & & \\
y_3 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
y_0 & & & \\
 & \delta y_{\frac{1}{2}} & & \\
y_1 & & \delta^2 y_1 & \\
 & \delta y_{\frac{3}{2}} & & \delta^3 y_{\frac{3}{2}} \\
y_2 & & \delta^2 y_2 & \\
 & \delta y_{\frac{5}{2}} & & \\
y_3 & & &
\end{array}
$$

3.2.2. On montre que les différences $n^{\text{ièmes}}$ s'expriment en fonction de $(n+1)$ valeurs consécutives de la fonction et des coefficients du binome :

$$
\Delta^n y_k = y_{n+k} - C_n^1 y_{n+k-1} + C_n^2 y_{n+k-2} - \dots + (-1)^p C_n^p y_{n+k-p} + \dots + (-1)^n y_n
$$

3.2.3. La définition des différences est valable quelle que soit la suite des valeurs numériques $y_0, y_1, y_2, \dots$. Toutefois dans la pratique ces différences sont surtout utilisées dans le cas où les valeurs tabulées sont celles d'une fonction continûment dérivable jusqu'à un certain ordre, dans un certain intervalle où sont prises les valeurs de l'argument $x_0, x_1, x_2, \dots$. On montre en effet qu'il existe alors un réel $\theta_{n,\,k}$ compris entre 0 et n tel que $\Delta^n y_k = h^n f^{(n)}(x_k + \theta_{n,\,k} h)$, formule qui permet d'approcher la dérivée $n^{\text{ième}}$ dans (x_k, x_{k+n}) par $\dfrac{\Delta^n y_k}{h^n}$ [INTERPOLATION].

3.3. *Différences divisées.* La table numérique ne correspond plus en général à des arguments équidistants et l'on définit cette fois :

- les *différences divisées premières*

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}$$

- les *différences divisées secondes*

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_i, x_{i+1}) - f(x_{i+1}, x_{i+2})}{x_i - x_{i+2}}$$

Exemple :

$$\begin{array}{lllll}
x_0\ f(x_0) & & & & \\
 & f(x_0, x_1) & & & \\
x_1\ f(x_1) & & f(x_0, x_1, x_2) & & \\
 & f(x_1, x_2) & & f(x_0, x_1, x_2, x_3) & \\
x_2\ f(x_2) & & f(x_1, x_2, x_3) & & f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \\
 & f(x_2, x_3) & & f(x_1, x_2, x_3, x_4) & \\
x_3\ f(x_3) & & f(x_2, x_3, x_4) & & \\
 & f(x_3, x_4) & & & \\
x_4\ f(x_4) & & & &
\end{array}$$

Remarques :

a) Par définition les différences divisées sont des fonctions symétriques des arguments et l'ordre qui semble intervenir dans les notations est factice;

b) Même dans le cas particulier où le pas de la table serait constant et égal à 1, les différences divisées diffèrent des différences non divisées sauf pour les ordres 0 et 1.

différent, adj.

Synonyme de *non égal.* On notera que le signe $\neq$ symbolise la forme *verbale* « est différent de » et non pas l'adjectif, comme son énonciation habituelle pourrait le laisser croire.