cardinal, n. m.

Etym.: Au sens propre le *cardo* était l'ensemble du pivot *(cardo masculus)* et de la crapaudine *(cardo femina)* permettant la rotation du battant de porte; dès l'Antiquité apparaît un sens fig. : la ligne Sud-Nord déterminée par l'augure pour prendre les auspices, d'où *points cardinaux*. De là le sens usuel de l'adj. : primordial, essentiel. Son emploi par les grammairiens pour qualifier certains adjectifs numéraux a donné naissance au sens très spécialisé du substantif en mathématiques.

Théorie des ensembles.

Sans essayer ici d'exposer une théorie formelle, pour laquelle nous renvoyons aux ouvrages spécialisés, nous nous bornerons à un point de vue « naïf ».

1.1. *Cardinal d'un ensemble.* On dit que deux ensembles A et B sont *équipotents* ou qu'ils ont même *puissance* s'il existe une bijection de A sur B.

L'équipotence est visiblement réflexive, symétrique, transitive; mais on ne peut l'appeler « relation d'équivalence sur un ensemble » puisque le concept de « l'ensemble de tous les ensembles » conduit à des paradoxes. La même difficulté fait obstacle à l'idée, assez naturelle *a priori*, d'associer à chaque ensemble X sa « classe d'équivalence », qui ici ne serait pas un ensemble. C'est pourquoi on préfère souvent associer aux ensembles équipotents à X un nouvel ensemble appelé *cardinal de* X et noté card X (c'est le point de vue adopté par Bourbaki). Nous ne chercherons pas à préciser autrement la définition de ce cardinal, nous bornant à signaler qu'il est astreint aux deux conditions suivantes :

1° quel que soit l'ensemble A, card A est équipotent à A;

2° quels que soient les ensembles A et B, l'équipotence de A et B équivaut à card A = card B.

1.2. *Cardinaux finis et infinis.* Une façon de caractériser un ensemble fini est la suivante : c'est un ensemble tel qu'il n'existe de bijection de lui-même sur aucune de ses parties propres. Les cardinaux des ensembles finis, ou *cardinaux finis,* constituent un ensemble qui s'identifie à $\mathbb{N}$. Au lieu de dire : « A a pour cardinal le naturel cinq » on dit usuellement : « A a cinq éléments ». En particulier le cardinal de l'ensemble vide est 0, et le cardinal des singletons est 1. Tout cardinal qui n'est pas fini (ex. : card $\mathbb{N}$) s'appelle un *cardinal infini.*

Très simple si elle se bornait aux cardinaux finis, la théorie des cardinaux a été conçue en vue d'étendre aux cardinaux infinis au moins certaines propriétés des cardinaux finis.

1.3. *Relation d'ordre sur les cardinaux.* S'il existe une injection d'un ensemble A dans un ensemble B, on écrit card A $\leqslant$ card B. C'est une relation d'ordre : la réflexivité et la transitivité sont évidentes, le théorème de Bernstein établit l'antisymétrie.

Remarque: Dans le cas des ensembles *finis,* si l'injection de A dans B n'est pas bijective, on peut affirmer card A $<$ card B. Il n'en va pas de même pour les ensembles infinis : il peut alors exister simultanément une injection non bijective de A dans B et une injection non bijective de B dans A; par exemple on peut prendre pour A l'ensemble $2\mathbb{N}$ des naturels pairs et pour B l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels.

Moyennant l'axiome du choix on montre que : 1° l'ordre sur les cardinaux est un bon ordre; 2° quel que soit E, le cardinal de $\mathfrak{P}$(E) est strictement supérieur à card E; donc il ne saurait y avoir de cardinal maximal.

Par suite du bon ordre, l'ensemble des cardinaux infinis inférieurs ou égaux à un cardinal infini donné possède un plus petit élément, qu'on note $\aleph_0$ (lire : aleph zéro); c'est le cardinal de $\mathbb{N}$, appelé aussi « puissance du dénombrable ». De même l'ensemble des cardinaux strictement supérieurs à $\aleph_0$ et inférieurs ou égaux à un cardinal infini donné possède un plus petit élément qu'on note $\aleph_1$ (aleph un), qui est le suivant de $\aleph_0$. On définirait de même

$\aleph_2, \aleph_3, \ldots$; mais il importe de remarquer que les cardinaux infinis ne forment pas un ensemble, *a fortiori* qu'ils ne sont pas dénombrables, comme pourrait le laisser supposer l'écriture indicielle qui précède.

On démontre que card $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ = card $\mathbb{R}$; on l'appelle « puissance du continu », notée c. On a donc $c > \aleph_0$ et par conséquent $c \geqslant \aleph_1$. Il découle du théorème de Cohen (1963) que, du point de vue de la cohérence, rien ne permet de préférer l'une à l'autre des deux théories qu'on peut bâtir en prenant, comme axiome soit l'« hypothèse du continu », c'est-à-dire $c = \aleph_1$, soit $c > \aleph_1$.

1.4. *Opérations sur les cardinaux.* On définit usuellement sur les cardinaux trois opérations : addition, multiplication, exponentiation, dont la restriction à l'ensemble des cardinaux finis coïncide avec les opérations classiques de même nom.

Addition. Si deux ensembles sont disjoints, la somme de leurs cardinaux est, par définition, le cardinal de leur réunion. On notera que, si α est un cardinal *infini* et β un cardinal inférieur ou égal à α, (en particulier si β est un cardinal fini), $\alpha + \beta = \alpha$.

Multiplication. Le produit des cardinaux de deux ensembles est, par définition, le cardinal de leur produit cartésien. Ici encore, si α est infini et si $\beta \leqslant \alpha$, $\alpha \times \beta = \alpha$.

Exponentiation. Le cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble A dans un ensemble B se note $(\text{card B})^{\text{card A}}$. En particulier card $\mathcal{P}(\text{A}) = 2^{\text{card A}}$. d'où $c = 2^{\aleph_0}$.