Les réels en Quatrième

Exposé de B. Dehame

(stage des expérimentateurs en Cinquième. Poitiers, 11-12 mars 1970)

1. Pourquoi introduire les réels en Quatrième.

1.1. Si on envisage le premier cycle comme un cycle d'initiation, comme une préparation aux études de second cycle et aux études supérieures, il importe de familiariser les élèves de Quatrième avec les structures mathématiques dont ils auront besoin à partir de la Seconde tant en mathématiques qu'en physique. C'est dans cet esprit qu'on peut concevoir l'approche intuitive des réels en Quatrième; il ne s'agit pas d'une théorie des réels, mais d'une série d'exercices destinés à développer chez les élèves une intuition correcte de $\mathbb{R}$.

Les difficultés pédagogiques de l'introduction des notions d'analyse dans le second cycle (notions de limite, de continuité, de borne supérieure) sont dues non seulement à un manque de familiarisation avec les notions logiques sous-jacentes (quantificateurs) mais aussi à un manque de familiarisation avec l'être mathématique ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$) auquel s'appliquent ces notions.

Un enseignement préparatoire à l'enseignement de l'analyse ne peut pas se borner à des exercices de logique pure et à des études de structures finies; un contact intuitif avec l'infini, sous ses différents aspects, est indispensable. Dès la classe de Quatrième, les élèves peuvent manipuler des suites infinies et distinguer entre deux suites égales, deux suites égales jusqu'à un certain rang, deux suites égales à partir d'un certain rang; ils ont maintes fois l'occasion d'utiliser la densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$), de se rendre compte que dans $\mathbb{D}$ ou dans $\mathbb{R}$ un élément n'a pas de successeur immédiat, etc... Tout cela se fait sans théorie (donc sans vocabulaire spécialisé) : ainsi, dans cette initiation à l'analyse, la difficulté conceptuelle apparaît seule, séparée de la difficulté des notions logiques sous-jacentes.

1.2. Si on pense aux élèves les moins doués pour lesquels le premier cycle débouche sur la vie active, le calcul numérique doit occuper une place importante dans l'enseignement des mathématiques jusqu'à la fin de la Troisième. L'introduction des réels en Quatrième motive, dans cette classe, la poursuite des exercices de calcul numérique (à la main et à la machine) entrepris dès la Sixième.

Aux exercices traditionnels mettant en jeu « les quatre opérations » s'ajoutent des exercices d'encadrement, de calcul d'erreur, aptes à développer chez l'élève le sens du numérique (ordre de grandeur, précision d'un résultat).

2. Définitions axiomatiques de $\mathbb{R}$.

Bien que l'introduction des réels en Quatrième ne soit qu'une approche intuitive, il est utile de savoir sur quelle « théorie des réels » débouche cette introduction.

Les constructions de $\mathbb{R}$ (à partir des suites de Cauchy ou des coupures de Dedekind) peuvent être réservées aux spécialistes. Pour les utilisateurs de $\mathbb{R}$ (analystes, physiciens, probabilistes, etc...), une définition axiomatique suffit : les axiomes 1 et 2 ci-dessous permettent de démontrer toutes les propriétés de $\mathbb{R}$, le seul théorème que les « non spécialistes » doivent se résigner à admettre est qu'ils sont non contradictoires et qu'ils définissent une structure à un isomorphisme près.

2.1. Une définition axiomatique commode au niveau du second cycle.

$\boxed{\text{Axiome 1}}$ $\mathbb{R}$, muni des lois internes notées $+$ et $\times$, et de la relation binaire notée $\leqslant$, est un *corps commutatif totalement ordonné.*

Cela signifie que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif, que la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$, et que

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \forall c \in \mathbb{R}, \qquad a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$$
$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \forall c \in \mathbb{R}, \qquad a \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant c \Rightarrow ac \leqslant bc$$

Conséquences de l'axiome 1.

Tout corps commutatif totalement ordonné K *contient un sous-corps isomorphe à* $\mathbb{Q}$.

Le principe de la démonstration est le suivant :

1) le carré de tout élément est positif :

En effet, si $a \geqslant 0$, $a^2 \geqslant 0$

si $a \geqslant 0$, $a^2 = (-a)^2 \geqslant 0$;

2) l'élément unité e est strictement positif :

$$e = e^2 \geqslant 0$$

Or, dans tout corps, $e \neq 0$. Donc $e > 0$;

3) $n \mapsto ne\ (= \underbrace{e + e + e + \ldots + e}_{n})$ est une injection de $\mathbb{Z}$ dans le corps K.

En effet,

$$2e = e + e > e \qquad 3e > 2e, \text{ etc...},$$

et finalement,

$$\ldots -2e < -e < 0 < e < 2e < 3e < \ldots < ne \ldots$$

4) En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, ne est inversible dans K. K contient donc l'ensemble $\mathbb{Q}'$ des éléments de la forme

$$(pe)(qe)^{-1} \qquad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*$$

5) On démontre que si $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'}$ alors $(pe)(qe)^{-1} = (p'e)(q'e)^{-1}$ et que l'application de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}'$ définie par $\dfrac{p}{q} \mapsto (pe)(qe)^{-1}$ est un isomorphisme qui respecte la relation d'ordre.

Si on convient d'identifier les éléments de $\mathbb{Q}'$ à ceux de $\mathbb{Q}$ au moyen de cet isomorphisme, *on peut considérer* $\mathbb{Q}$ *comme un sous-corps ordonné de* $\mathbb{R}$.

Axiome 2 Pour toute suite de segments emboîtés $[a_n, b_n]$ telle que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad b_n - a_n < \frac{1}{p}, \qquad (1)$$

il existe un réel x et un seul tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in [a_n, b_n]$$

(autrement dit, l'intersection de toute suite de segments emboîtés vérifiant la condition (1) est un singleton de $\mathbb{R}$).

Remarque. On peut remplacer l'axiome 2 par *l'axiome 2'* obtenu en remplaçant la condition (1) par

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad b_n - a_n < \frac{1}{10^p} \qquad (2)$$

2.2. Autres définitions axiomatiques de $\mathbb{R}$.

Les propriétés suivantes sont des conséquences des axiomes 1 et 2 :

a) *la propriété des segments emboîtés*
Pour toute suite $[a_n, b_n]$ de segments emboîtés telle que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad b_n - a_n < \varepsilon,$$

Il existe un réel x et un seul tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in [a_n, b_n]$$

b) *la propriété d'Archimède* :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad b < na$$

c) *la propriété de la borne supérieure* :
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
On peut remplacer les axiomes 1 et 2 par

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Axiome 1}\\ \text{Propriété (a)}\\ \text{Propriété (b)}\end{array}\right. \qquad \text{ou par} \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{Axiome 1}\\ \text{Propriété (b)}\\ \text{Propriété (c)}\end{array}\right.$$

2.3. Axiomatique sous-jacente à l'introduction des réels en Quatrième.

$\mathbb{R}$ sera introduit comme une extension de l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux (les lois de composition, d'ordre, dans $\mathbb{R}$ prolongeant les lois de composition et la relation d'ordre dans $\mathbb{D}$) satisfaisant aux axiomes 1 et 2', Autrement dit, la définition théorique des réels en quatrième serait la suivante (mais ce n'est pas sous cette forme qu'on la présentera aux élèves) :

$\mathbb{R}$ est un ensemble muni de deux lois internes $+$, $\times$ et d'une relation binaire $\leqslant$, satisfaisant à

(*Axiome 1*) : $(\mathbb{R}, +, \times, \geqslant)$ est un corps commutatif totalement ordonné.
(*Axiome surabondant*) : $(\mathbb{D}, +, \times, \leqslant)$ est un sous-anneau ordonné de $\mathbb{R}$.
(*Axiome 2'*) : Toute suite de segments enboîtés $[a_n, b_n]$ de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad b_n - a_n < \frac{1}{10^p}$$

a pour intersection un singleton de $\mathbb{R}$.

3. Les décimaux en Cinquième et en Quatrième.

3.1. Théoriquement, on peut construire l'anneau $\mathbb{D}$ des décimaux de la façon suivante :

On cherche un sur-anneau de $\mathbb{Z}$ dans lequel toute équation de la forme

$$10^n x = a \qquad (n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{Z})$$

a une solution $\left(\text{notée } \dfrac{a}{10^n}\right)$.

On est conduit à identifier $\dfrac{a}{10^n}, \dfrac{10a}{10^{n+1}}, \ldots, \dfrac{10^p a}{10^{n+p}} \ldots$ et à définir sur ces éléments les lois de composition :

$$\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^p} = \frac{10^p a + 10^n b}{10^{n+p}}$$

$$\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^p} = \frac{ab}{10^{np}}$$

On vérifie que l'ensemble $\mathbb{D}$ de ces éléments, muni de ces deux lois, est un anneau commutatif unitaire contenant un sous-anneau isomorphe à $\mathbb{Z}$ (l'ensemble des classes de séléments $\left.\dfrac{a}{10^0}\right)$, dans lequel toute équation

$$10^n x = a \qquad (n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{Z})$$

a une solution.

Cette construction théorique n'a qu'un intérêt mathématique assez mince : c'est une partie de la construction de $\mathbb{Q}$.

Mais, si on s'adresse, comme c'est le cas actuellement, à des élèves déjà familiarisés avec les décimaux et peu expérimentés sur les fractions, cette construction a sur celle de $\mathbb{Q}$ l'avantage de la simplicité :

les décimaux sont notés avec une virgule (122,317 au lieu de $\dfrac{122\,317}{10^3}$ par exemple) et les règles de calcul sur les nombres à virgule reçoivent ici une justification théorique très simple, qui débarrasse le concept de décimal de ses attaches avec la géométrie et le système métrique.

3.2. En classe de Cinquième (ou de Quatrième), cette construction de $\mathbb{D}$ ne peut pas être présentée comme une définition des décimaux (que les élèves croient déjà connaître) mais peut servir de ligne directrice à une série d'exercices de révision sur le calcul des décimaux :

Soit par exemple à calculer le produit ces décimaux

$$a = 2{,}13 \qquad b = 0{,}017$$

Par définition,

$$100\,a = 213 \qquad 1\,000\,b = 17$$

d'où

$$100\,000\,ab = 213 \times 17 = 3\,621$$

et

$$ab = 0{,}036\,21$$

L'ordre dans $\mathbb{D}$ peut être défini par :

$$x \leqslant y \text{ si et seulement si } y - x \in \mathbb{D}^{+},$$

c'est-à-dire par :

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \,/\, 10^{n}(y - x) \in \mathbb{N},$$

ou encore par :

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \begin{cases} 10^{n}y \text{ et } 10^{n}x \in \mathbb{Z} \\ 10^{n}y \leqslant 10^{n}x \end{cases}$$

Par exemple, pour comparer 7,322 et 7,325 1, on compare leurs produits par 10 000 :

$$73\,220 < 73\,251$$

donc

$$7{,}322 < 7{,}325\,1$$

Dans l'introduction des réels, la structure ordonnée de $\mathbb{D}$ jouera un rôle primordial. Il est donc nécessaire de pousser assez loin son étude :

— compatibilité de l'ordre avec l'addition dans $\mathbb{D}$:

$$a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + 0 \text{ et ses conséquences}$$

$$a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d \Rightarrow a + c \leqslant b + d$$

$$a \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant -a$$

— compatibilité avec la multiplication par un positif :

$$a \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant c \Leftrightarrow ac \leqslant bc$$

et sa conséquence

$$0 \leqslant a \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant c \leqslant d \Rightarrow 0 \leqslant ac \leqslant bd$$

— exercices faisant intervenir l'ordre large et l'ordre strict,

— encadrements de décimaux (on peut introduire à ce propos la notion de distance de deux décimaux :

$$d(a; b) = |a - b|).$$

4. Motivation d'une extension de $\mathbb{D}$.

Les équations

$$ax = b \quad (a \in \mathbb{D}^{*}, b \in \mathbb{D})$$

$$x^{2} = a \quad (a \in \mathbb{D}^{+})$$

n'ont pas toujours une solution dans $\mathbb{D}$.

On peut sensibiliser les élèves à ce problème en commençant par étudier de telles équations dans le cas où elles admettent des solutions dans $\mathbb{D}$: notion de quotient exact $\left(\text{la solution de } ax = b \text{ est notée } \frac{b}{a}\right)$ et de racine carrée (la solution positive de $x^2 = a$ est notée $\sqrt{a}$ et s'appelle « radical de a »).

L'équation $3x = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{D}$ (si elle en avait une, il existerait un entier n tel que l'équaiton $3x = 10^n$ ait une solution entière, ce qui est faux puisque

$$10^n = 3 \times \underbrace{333\,3 \ldots 3}_{n \text{ chiffres}} + 1)$$

L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{D}^+$ (si elle en avait une, ce serait un décimal non entier : $x = 1, \ldots, \alpha$; quel que soit le chiffre $\alpha \neq 0$, x^2 serait un décimal terminé par l'un des chiffres 1, 4, 9, 6, 5).

Pour donner des solutions à ces équations, on introduit de nouveaux nombres $\left(\text{notés } \frac{1}{3}, \sqrt{2}\right)$ que l'on encadre (sans justification) par des décimaux :

$$0{,}333 \ldots 3 \leqslant \frac{1}{3} \leqslant 0{,}333 \ldots 4$$

$$1{,}414 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}415 \text{ (calculs à la machine).}$$

Cet encadrement non justifié correspond à l'introduction tacite d'une partie des axiomes de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est ordonné, et la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ prolonge la relation d'ordre dans $\mathbb{D}$).

On remarque que les valeurs approchées par défaut figurant dans les encadrements de $\frac{1}{3}$ s'obtiennent toutes en tronquant une même suite illimitée de chiffres,

$$0{,}333\,333\,33\underline{3} \ldots$$

Cette remarque conduit à introduire la notion suivante.

5. Suites décimales illimitées.

Il est facile de donner des exemples de suites périodiques :

$$17{,}429329\,329\,3\underline{293} \ldots \text{ (la période est soulignée)}$$

et non périodiques :

$$1{,}202\,002\,000\,200\,002\,000\,002 \ldots$$

On admet que toute suite décimale illimitée définit un nombre x et un seul. Ce nombre est encadré par des décimaux de la façon suivante :

a) cas d'une suite non précédée du signe — :

$$x = 1{,}202\,002\,000\,200\,002\,000\,002 \ldots$$

Par définition,

$1 \leqslant x \leqslant 2$	$d(1\,;2)$	$= 1$
$1{,}2 \leqslant x \leqslant 1{,}3$	$d(1{,}2;\ 1{,}3)$	$= \frac{1}{10}$
$1{,}20 \leqslant x \leqslant 1{,}21$	$d(1{,}20;\ 1{,}21)$	$= \frac{1}{100}$
etc.	....	

b) cas d'une suite précédée du signe — :

$$y = -1{,}202\,002\,000\,200\,002\,000\,002\ldots$$

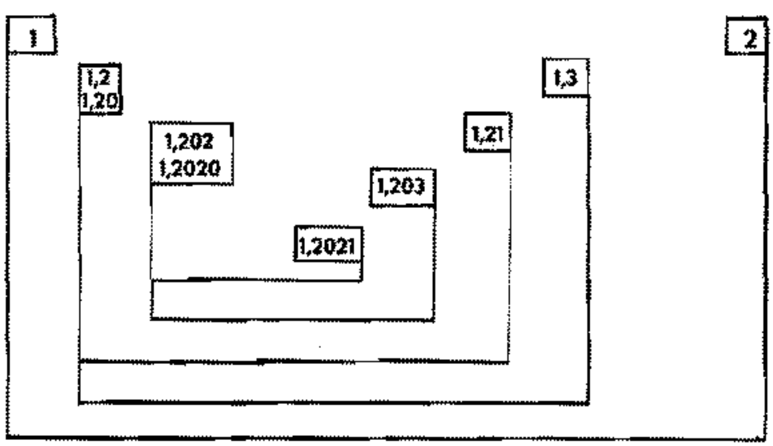
Par définition,

$$\begin{array}{lll}
-2 \quad < y < -1 & d(-2\,;-1) & = 1 \\
-1{,}3 \quad < y < -1{,}2 & d(-1{,}3\,;-1{,}2) & = \dfrac{1}{10} \\
-1{,}21 < y < -1{,}20 & d(-1{,}21\,;-1{,}20) & = \dfrac{1}{100} \\
\text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

Différents types de schémas permettent de rendre plus intuitive cette introduction des réels :

— *Schémas à une échelle déterminée* (avec agrandissements successifs)

— *Schémas sans échelle*



— *Suites décimales illimitées définissant un décimal.*

Si on écrit les encadrements définis par les suites décimales illimitées.

$$1{,}782\,000\,000\,00\underline{0}\ldots$$

et

$$1{,}781\,999\,999\,99\underline{9}\ldots$$

on constate que ces encadrements définissent le même nombre, qui est un décimal : 1,782 (les schémas sont très parlants dans ce cas).

On admet que ce cas est le seul où deux suites décimales illimitées distinctes définissent le même nombre (mis à part le cas de $0 = 0{,}0\underline{0}\ldots = -0{,}0\underline{0}\ldots$).

Les nombres définis par des suites décimales illimitées s'appellent des **réels**. Un réel est donc, soit une paire de suites décimales illimitées :

$$\{1{,}782\,00\underline{0}\ldots\ldots;\quad 1{,}781\,99\underline{9}\ldots\ldots\}$$
$$\{0{,}00\underline{0}\ldots\ldots\ldots;\ -0{,}00\underline{0}\ldots\ldots\ldots\}$$

soit un singleton de l'ensemble des suites décimales illimitées :

$$\{0{,}333\,33\underline{3}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

Malgré cette distinction subtile entre les suites et les ensembles de suites, il est commode d'utiliser le signe $=$:

$$x = 1{,}782 = 1{,}782\,00\underline{0}\ldots = 1{,}781\,99\underline{9}\ldots$$
$$y = \frac{1}{3} = 0{,}333\,333\ldots$$

6. Ordre dans $\mathbb{R}$.

Jusqu'à présent, on sait comparer les décimaux entre eux; on sait aussi comparer un réel à ses valeurs décimales approchées. On pourra comparer deux réels quelconques en postulant la transitivité de la relation $<$ dans R :

Soit à comparer $2{,}73\underline{2}\ldots$ et $2{,}732\,\underline{732}\ldots$.

On sait que

$$1{,}732\,\underline{22}\ldots \leqslant 2{,}732\,3$$
$$2{,}723\,3 < 2{,}732\,7$$
$$2{,}732\,7 \leqslant 2{,}732\,\underline{732}\ldots$$

On en déduit que

$$2{,}732\,\underline{22}\ldots < 2{,}732\,\underline{732}\ldots$$

En somme $x < y$ si et seulement s'il existe des décimaux a, b appartenant aux encadrements canoniques de x et de y respectivement, tels que $x \leqslant a$, $a < b$ et $b \leqslant y$.

Remarque. — On ne peut pas intercaler de décimaux entre $1{,}781\,999\ldots$ et $1{,}782\,00\underline{0}\ldots$. On trouve ainsi une autre motivation de l'égalité de ces réels.

7. Addition des réels.

Si deux réels x et y sont encadrés par des décimaux dont la distance est 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ..., $\frac{1}{10^n}$, leur somme est encadrée par des décimaux dont la distance est 2, $\frac{2}{10}$, ..., $\frac{2}{10^n}$. Puisque $\frac{2}{10^n} < \frac{1}{10^{n-1}}$, on peut trouver les encadrements canoniques de $x + y$ aussi loin qu'on veut.

Remarque. — On postule ici l'existence de l'addition dans $\mathbb{R}$, le fait qu'elle prolonge celle des décimaux et qu'elle possède vis-à-vis de l'ordre les mêmes propriétés que dans $\mathbb{D}$.

On peut aussi admettre sans démonstration les propriétés de groupe abélien de $(\mathbb{R}, +)$ et le fait que l'opposé d'un réel défini par une suite décimale (non précédée du signe —) est défini par la même suite précédée du signe —.

Les cas très simples de l'addition d'un réel et d'un décimal, et de la soustraction de deux réels de même partie décimale peuvent faire l'objet d'une étude particulière.

8. Multiplication des réels.

Des encadrements de deux réels positifs x, y, on déduit des encadrements du produit xy. Pour les réels négatifs, on admet la règle des signes (on admet que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau).

Le cas très simple de la multiplication par 10^p peut faire l'objet d'une étude particulière.

Signalons l'application suivante :

Montrer que $x = 7{,}029\,029\ \ldots$ est le quotient exact de deux naturels.

$$\begin{array}{rl} 1\,000\,x &= 7\,029{,}\underline{029}\ \ldots \\ x &= 7{,}\underline{029}\ \ldots \\ \hline 999\,x &= 7\,022 \\ x &= \dfrac{7\,022}{999} \end{array}$$

La même méthode permet de retrouver l'égalité des réels définis par

$$1{,}781\,99\underline{9}\ \ldots \quad \text{et} \quad 1{,}782\,00\underline{0}\ \ldots$$

9. Inverse, quotient exact.

Pour achever cette étude, il faudrait montrer que les exigences du paragraphe 4 (donner une solution à toute équation de la forme $ax = b$ avec $\neq 0$ et à toute équation de la forme $x^2 = a$ avec $a > 0$) sont satisfaites, non seulement si a et b sont des décimaux, mais aussi si a et b sont des réels quelconques.

Une partie de cette étude (assez longue) peut être reportée à la classe de Troisième.

En Quatrième, on peut se contenter de faire quelques calculs sur des fractions simples; par exemple pour calculer

$$\frac{2}{7} + \frac{5}{3},$$

on utilise la définition :

$$x = \frac{2}{7} \quad \text{signifie que} \quad 7x = 2$$

$$y = \frac{5}{3} \quad \text{signifie que} \quad 3y = 5.$$

On en déduit :

$$21x = 6, \qquad 21y = 35$$

d'où

$$21(x + y) = 41$$

$$x + y = \frac{41}{21}$$

L'existence d'un inverse pour tout réel non nul peut faire l'objet d'un axiome, mais cet axiome ne présente d'intérêt pour les élèves que s'il est accompagné de calculs numériques conduisant à l'encadrement de l'inverse d'un réel défini par une suite décimale illimitée. On est conduit, pour cela, à utiliser des propriétés telles que

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

dont la démonstration nécessite une certaine habitude du maniement des fractions littérales.

Il n'est peut-être pas mauvais de réserver pour la Troisième ce genre d'exercice, de façon à assurer la continuité de l'enseignement du calcul numérique au cours du premier cycle.

10. Conclusions et commentaires.

Les nombres réels sont introduits progressivement au cours des quatre années du premier cycle :

— d'abord les naturels et les décimaux positifs en liaison avec la mesure;

— ensuite, de façon plus algébrique, mais en faisant encore appel à des jeux, les entiers relatifs et les décimaux relatifs;

— en Quatrième les nombres connus sont débarrassés du support concret qui avait servi à les introduire, et l'extension de $\mathbb{D}$ à $\mathbb{R}$ est motivée de manière purement algébrique. La pratique fréquente du calcul numérique doit permettre aux élèves de s'intéresser aux nombres pour eux-mêmes. L'intuition de « la droite numérique », c'est-à-dire de $\mathbb{R}$, doit se développer petit à petit chez l'élève, ce qui ne serait pas possible si la notion de nombre restait attachée aux mesures physiques;

— dans le même esprit, mais avec un recours plus fréquent aux calculs littéraux et aux démonstrations, l'étude de $\mathbb{R}$ (et de son sous-corps $\mathbb{Q}$) sera poursuivie en Troisième.

Si, comme tout le laisse espérer jusqu'à présent, cette expérience réussit, les élèves sortant de Troisième auront une assez bonne connaissance de $\mathbb{R}$:

— pratique des calculs numériques et littéraux;

— connaissance de certaines propriétés fondamentales correctement énoncées;

— idée intuitive d'autres propriétés fondamentales rencontrées seulement sur des exemples (propriétés des segments emboîtés par exemple).

Les réels devront être pour eux des êtres familiers (comme les naturels pour les enfants qui entrent en Sixième), et les notions d'analyse rencontrées en Seconde et en Première (intervalles ouverts ou fermés, limites, etc.) devront correspondre chez eux à des concepts déjà acquis de façon intuitive.

Mais il serait contraire à cette démarche pédagogique d'introduire prématurément des notions théoriques :

— il n'y a pas de construction axiomatique en Quatrième, mais seulement des exercices préparatoires à une construction axiomatique qui sera donnée ultérieurement (en Seconde, sans doute);

— il n'est pas question de limite : il faut éviter ce mot, ainsi que les locutions « tend vers », « arbitrairement petit ». Mais les exercices où la notion de limite est sous-jacente doivent conduire à une intuition correcte de cette notion.

Par exemple, il ne faudrait pas laisser croire aux élèves qu'en ajoutant des nombres de plus en plus petits (qui tendent vers 0), la somme tend vers un réel : c'est vrai pour

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots$$

mais c'est faux pour

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots.$$

C'est pour éviter ce danger que les réels sont toujours définis au moyen d'un encadrement.