4

Dans nos classes

A propos du programme de Quatrième

Le 6 octobre 1970 le programme de Quatrième applicable à la rentrée 1971 n'est toujours pas paru. Il est peu probable qu'il le soit avant décembre. Les collègues s'inquiètent non seulement de la date de parution mais aussi du contenu de ce programme. Le bureau de l'A.P.M. a donc jugé nécessaire de diffuser les informations en sa possession, celles qu'ont pu lui transmettre les expérimentateurs de l'an dernier ou celles fournies par les collègues membres de la Commission Lichnerowicz.

Durant l'année scolaire 1969-1970, les expérimentateurs de Quatrième ont travaillé dans différentes directions, notamment en ce qui concerne la géométrie :

1° une méthode fondée sur les quadrillages conduisant aux espaces vectoriels (par exemple Lyon);

2° une axiomatique analogue à celle de Artin (par exemple Toulon, Poitiers, Bordeaux-Montaigne);

3° une présentation voisine de celles des premiers projets de programme de la Commission Lichnerowicz (par exemple Bordeaux-Talence).

Par contre la Commission Lichnerowicz a travaillé essentiellement dans une seule direction, modifiant peu à peu un projet de départ. D'autres projets qui lui avaient été proposés n'ont pas été pris en considération. Ainsi un projet de géométrie de Dehame et un projet de Clopeau qui essayait de faire le lien avec le nouveau programme de technologie (voir annexes 1 et 2).

Inquiets du contenu des projets de la Commission, les expérimentateurs, réunis au stage à Orléans au mois de juin 1970, ont demandé que le nouveau programme n'impose pas une axiomatique, notamment en géométrie, mais propose des objectifs simples en indiquant diverses voies possibles pour les atteindre (voir en annexe la lettre des expérimentateurs au président de la Commission, ainsi qu'une voie possible proposée par l'équipe lyonnaise, annexes 3 et 4).

De son côté un groupe d'expérimentateurs de l'Institut Pédagogique National proposait un programme ou plutôt une liste de thèmes d'étude classés en 3 niveaux selon leurs objectifs, ne distinguant pas classe de Quatrième et de Troisième (Annexe 5).

Bien que l'un et l'autre de ces derniers projets reflètent ce que seront les programmes de mathématiques dans un futur plus ou moins lointain, bien que l'un et l'autre soient suffisamment précis pour être mis en chantier dès maintenant, aucun ne fut retenu par la Commission Lichnerowicz. Elle modifia de nouveau son projet, notamment en supprimant l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$, que semblait pourtant préparer les programmes de Sixième et Cinquième.

De nouvelles modifications ont été apportées pendant les vacances scolaires, la géométrie a reçu une nouvelle rédaction, mais l'esprit n'en est pas changé : une axiomatique est imposée.

Pour être définitif, le programme, dont nous publions la dernière forme en notre possession (Annexe 6), doit être adopté par le conseil supérieur de l'enseignement. Les collègues devront donc encore attendre!...

Nous pensons que tous ces documents permettront aux collègues de se faire une idée précise de la responsabilité de chacun dans l'élaboration de ce programme. Pour sa part, le bureau de l'A.P.M. a jugé indispensable de bien les situer.

Et puisque programme de Quatrième il y aura, nous terminerons ce dossier par un article (sur les réels par Dehame) et l'annonce d'un autre sur la géométrie par (Glaymann) qui permettront aux collègues, nous l'espérons, de comprendre les intentions de la Commission Lichnerowicz. Il est entendu que pour autant ces auteurs n'approuvent pas entièrement le futur programme.

Pour le bureau de l'A.P.M.E.P.
B. Belouze.

Annexe 1

Projet de programme de géométrie pour la Quatrième, proposé par E. Dehame (Poitiers).

Géométrie affine plane.

1° Approche intuitive.

Dessins géométriques exécutés uniquement à l'aide d'une règle non graduée et d'un appareil servant à tracer des parallèles.

Introduction du langage de la géométrie affine :

— droites sécantes, droites parallèles, directions, bipoints, bipoints équipollents, vecteurs (c'est-à-dire classes de bipoints équipollents).

Certaines propriétés rencontrées au cours de cette phase d'approche constitueront un système d'axiomes pour le développement ultérieur de la théorie, qui sera purement déductif.

2° Le groupe des vecteurs du plan.

La théorie développée dans ce paragraphe est basée sur le système d'axiomes suivant, ou sur tout autre système équivalent :

I. — Le plan est un ensemble de points. Les droites sont des parties du plan.

II. — Toute paire de points est incluse dans une droite et une seule.

III. — Pour tout point M et pour toute droite D, il existe une droite D' et une seule telle que $M \in D'$ et que $D' // D$.

IV. — Si les points A, B, C n'appartiennent pas à une même droite, pour que les bipoints (A, B) et (C, D) soient équipollents, il faut et il suffit que D appartienne à la parallèle à AB passant par C et à la parallèle à AC passant par D.

V. — Si les bipoints (A, B) et (C, D) sont équipollents, les bipoints (A, C) et (B, D) sont équipollents.

VI. — L'équipollence est une relation d'équivalence dans l'ensemble des bipoints du plan.

VII. — Si les points A_1, A_2 sont distincts, et si les bipoints (A_1, A_2), (A_2, A_3), ..., (A_{n-1}, A_n) sont équipollents, les points A_1, A_n sont distincts.

a) Translation définie par un vecteur. Image d'une droite par une translation.

b) Composition des translations et addition des vecteurs.

Propriétés de groupe commutatif.

Groupe des vecteurs colinéaires à un vecteur donné.

c) Composée d'une translation avec elle-même. Produit d'un vecteur par un naturel, par un entier relatif.

Propriétés de l'application $(n, \vec{V}) \mapsto n\vec{V}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Graduation d'une droite par les éléments de $\mathbb{Z}$.

d) Projection sur une droite D, parallèlement à une direction Δ (telle que $D \notin \Delta$). Images de deux bipoints équipollents par une projection. Δ_1 et Δ_2 étant deux directions distinctes, existence et unicité de la décomposition de tout vecteur en une somme de vecteurs ayant respectivement pour directions Δ_1 et Δ_2.

Projection de la somme de deux vecteurs.

e) Résolution de l'équation $n\vec{X} = \vec{V}$ (n donné appartenant à $\mathbb{N}^*$, $\vec{V}$ vecteur donné) : construction d'un représentant de $\vec{X}$ au moyen d'une projection, démonstration de l'existence et de l'unicité de $\vec{X}$ $\left(\text{notation } \vec{X} = \frac{1}{n}\vec{V}\right)$. Cas particulier où $n = 2$. Milieu d'un bipoint, symétrie centrale.

3° *L'espace vectoriel des vecteurs du plan.*

La théorie développée dans ce paragraphe est basée sur les axiomes énoncés au 2° et sur les suivants :

VIII. — $\mathcal{V}$ désignant l'ensemble des vecteurs du plan, il existe une application de $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$, choisie une fois pour toutes, et notée $(\lambda, \vec{V}) \mapsto \lambda\vec{V}$, telle que, pour tout couple de réels (λ, μ) et pour tout couple de vecteurs $(\vec{U}, \vec{V})$,

$$\lambda(\vec{U}+\vec{V}) = \lambda\vec{U} + \lambda\vec{V}$$
$$(\lambda + \mu)\vec{V} = \lambda\vec{V} + \mu\vec{V}$$
$$\lambda(\mu\vec{V}) = (\lambda\mu)\vec{V}$$
$$1\vec{V} = \vec{V}.$$

IX. — Pour tout réel λ, $\lambda\vec{V}$ est colinéaire à $\vec{V}$. Inversement, si $\vec{V} \neq \vec{0}$, et si $\vec{U}$ est colinéaire à $\vec{V}$, il existe un réel λ et un seul tel que $\vec{U} = \lambda\vec{V}$.

Remarque : l'introduction des axiomes VIII et IX peut être rendue plus naturelle si on a, au préalable défini $\frac{p}{n}\vec{V}$ ($p\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{R}^*$) et si on a établi les propriétés énoncées dans l'axiome VIII pour des valeurs simples (rationnelles) de λ et μ.

a) Abscisse d'un point sur une droite munie d'une origine et d'un vecteur de base. Mesure algébrique d'un vecteur.

b) Coordonnées d'un vecteur par rapport à une base du plan. Coordonnées d'un point par rapport à un repère du plan.

c) Projection du produit d'un vecteur par un réel.

d) Homothétie.

e) Symétrie par rapport à une droite D et à une direction Δ (telle que $D \not\parallel \Delta$).

Annexe 2

Essai de programme « coordonné » avec la technologie.

I. — Définition de la droite affine.

Manipulations et observations, la maquette étant : une droite technique D′ qui glisse sur une autre droite technique D.

Un glissement est *déterminé* par la donnée d'un couple de points de D. Alors le glissement fait correspondre à tout point de D un autre point de D.

Glissement nul

Glissement composé de deux glissements ; commutativité, associativité.

Glissement opposé d'un autre glissement.

Glissement multiple d'un autre glissement, l'opérateur étant un entier ou une fraction *simple* suffisant à montrer que la précision parfaite ne peut être que *conçue* en prenant les opérateurs dans $\mathbb{R}$.

Les λ étant pris dans $\mathbb{Z}$, vérification des relations

$$\lambda_1\vec{V} + \lambda_2\vec{V} = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{V}$$

etc...

Exercices d'encadrement du λ introduit au point 4 de la définition ci-contre.

Modèle.

Une droite affine est un ensemble D, comprenant au moins deux éléments, tel qu'il existe des applications de D dans D satisfaisant aux axiomes suivants :

1° Tout couple A, A′ de D définit une translation unique. La classe des bipoints qui définissent la même translation s'appelle vecteur de la translation (on note $\overrightarrow{AA'}$ et on lit « translation A, A′ » ou « vecteur A, A′ ». On peut aussi représenter le vecteur par une seule lettre : $\vec{V}$). Le bipoint (B, B) définit le vecteur nul noté $\vec{0}$.

2° L'ensemble des translations de D est un groupe commutatif.

3° Sur l'ensemble des translations de D, il existe une opération externe, l'ensemble des opérateurs étant $\mathbb{R}$, qui joint des propriétés suivantes :

$$1.\vec{V} = \vec{V}$$
$$0\vec{V} = \vec{0}$$

etc...

4° Étant donné deux translations de D, de vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{V}_2 = \lambda\vec{V}_1$.

II. — Exploitation de la définition de la droite affine.

Dans D, le point O et le vecteur $\vec{U}$ étant donnés, D est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{U}$, x décrivant $\mathbb{R}$. Le couple (O, $\vec{U}$) s'appelle un *repère* de D et x est l'*abscisse* de M dans ce repère.

— Demi-droite, segment, intervalle.
— Relation de Chasles, application : en technologie, le vernier.
— (Barycentre) milieu.

III. — Définition du plan affine.

Les étapes de l'élaboration de cette définition, ainsi que leur correspondance avec des observations de nature technologique, s'enchaînent comme celles de la définition de la droite. Sauf au 4° (voir ci-dessous à droite)

La maquette d'une translation est cette fois le glissement d'un plan technique sur un autre, une droite donnée du premier étant astreinte à glisser sur une droite donnée du second (glissière). La détermination d'un glissement équivaut à la donnée de deux points (déterminant la glissière et l'amplitude du glissement).

Exercices d'encadrement des λ utilisés au 4°.

4° Étant donné une translation $\vec{V}$ de P, toutes les translations $\vec{V'} = \lambda\vec{V}$ (λ décrivant $\mathbb{R}$) constituent un sous-groupe; $\vec{V'}$ et $\vec{V}$ sont dits linéairement dépendants.

Étant donné A $\in$ P, l'ensemble des M $\in$ P tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{V}$ constitue une droite affine au sens du I (deux points de P déterminent donc une droite de P).

Étant donné une translation $\vec{V_1}$ de P il existe au moins une translation $\vec{V_2}$ de P qui n'appartient pas au sous-groupe défini par $\vec{V_1}$ ($\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ sont linéairement indépendants).

Étant donné deux translations $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$, n'appartenant pas au même sous groupe, toute translation $\vec{V}$ de P peut s'écrire $\vec{V} = \lambda_1\vec{V_1} + \lambda_2\vec{V_2}$, λ_1 et λ_2 appartenant à $\mathbb{R}$.

IV. — Exploitation de la définition du plan affine.

— Quels que soient A, B, C *non alignés* d'un plan (les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc indépendants), pour tout point M de P, il existe deux réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

Applications en technologie :

Possibilité de « repérer » tout point du plan à l'aide de 2 nombres; problèmes de cotation.

— Demi-plan : c'est un ensemble convexe.

— (Barycentre) milieu d'un bipoint, point commun aux médianes d'un triangle.

— Deux droites de P, ayant un point commun sont sécantes ou confondues. Droites parallèles. « Théorème » d'Euclide.

Tracé de parallèles à la règle et à l'« équerre ».

— Projection parallèle d'une droite sur une autre droite (dans P). Théorème de Thalès sous la forme : « la relation $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ se conserve par projection parallèle ». Réciproque.

— Symétrie centrale : l'image d'une droite est une droite parallèle.

Parallélogramme : quadruplet (A, B, C, D) tel que les bipoints (A, C) et (B, D) aient même milieu — propriétés caractéristiques.

Parallélogramme déformable — guidages en translation non rectiligne (balance Roberval); appareil à dessiner.

Annexe 3

Orléans, le 3 juin 1970.

Les expérimentateurs en Quatrième

à

Monsieur le Président
de la Commission Ministérielle pour
l'Enseignement des Mathématiques

Monsieur le Président,

Nous avons examiné ensemble, lors du stage d'Orléans les conclusions qui se dégagent de l'expérience que nous menons depuis trois ans.

1° Nous avons constaté que :

a) aucun expérimentateur n'est parvenu à traiter entièrement les questions qui étaient proposées dans le programme expérimental de Quatrième, quelle que soit la progression qu'il ait suivie;

b) les élèves ont éprouvé des difficultés dans l'utilisation des raisonnements déductifs exigés par la géométrie dès son début;

c) nous avons ressenti le besoin de présenter quelques structures finies (groupes en particulier) avant d'aborder les mêmes structures sur des ensembles infinis (géométrie et nombres);

d) les élèves montrent de la lassitude lorsqu'ils ont travaillé sur le même thème pendant trop longtemps.

2° Ces constatations nous ont conduits à émettre les vœux suivants :

a) nous demandons que les programmes de Quatrième et de Troisième ne comportent pas de théorie déductive complète de la géométrie, ni de construction systématique de structure numérique;

b) nous demandons qu'on laisse à chaque professeur la liberté de s'en tenir à certains « îlots déductifs » de son choix, sans référence à une axiomatique imposée par le programme;

c) nous demandons que le programme de chaque année scolaire comporte deux parties :

— des objectifs nettement délimités et modestes,

— en annexes des textes indiquant avec suffisamment de détails *plusieurs* voies possibles pour atteindre ces objectifs, les professeurs restant bien entendu libres d'en choisir d'autres;

d) nous demandons que le programme de Quatrième (objectifs et annexes) soit publié dès que possible; et que les annexes du programme de Troisième ne soient publiées que dans un an, à l'issue de l'expérience de 1970-1971 en Troisième;

e) nous demandons que les voies suggérées dans les annexes permettent une alternance des thèmes au cours de l'année;

f) nous demandons que les programmes tiennent compte, dans la mesure du possible, des besoins :

— du professeur de technologie,

— des élèves qui terminent leurs études en fin de Troisième,

— du physicien dans les classes postérieures à la Troisième;

g) nous souhaitons que les sujets d'examen contiennent toutes les indications nécessaires pour être compris par l'élève quelles que soient les voies choisies par le professeur.

Nous vous prions d'agréer, Monsieur le Président, l'expression de nos sentiments respectueux.

Les expérimentateurs, unanimes.

P.S. — Les expérimentateurs sont à la disposition de la Commission pour fournir des documents à placer en annexe des programmes.

Annexe 4

Projet de l'Équipe Lyonnaise, (5 juin 1970).

La géométrie en quatrième dans la ligne de ce qui a été expérimenté en cinquième (quadrillage).

A) Soucis constants :

1° Faire apparaître nettement les phases de mathématisation et bien distinguer les travaux relevant du dessin et ceux qui relèvent de la mathématique.

2° Ne pas partir du « concret » pour l'abandonner définitivement, donc donner de temps en temps des problèmes concrets dont la solution utilise un schéma mathématique.

3° Garder, comme ligne directrice des idées que privilégie la mathématique :
— groupes, groupes de bijections, groupes opérant sur un ensemble,
— espaces vectoriels,
— espaces affines.

4° Entraîner les élèves au langage géométrique, langage qui prend son vocabulaire dans le domaine spatial mais peut exprimer de façon, tantôt économique, tantôt suggestive, des résultats de l'algèbre, de la statistique, de l'analyse (ultérieurement).
Ne pas introduire pour autant une axiomatique propre à ce langage.

5° Ne pas élaborer, par des procédés d'une trop grande ingéniosité, des théorèmes correspondants à des résultats évidents.

6° Du point de vue pédagogique, éviter de présenter comme premier exemple de vectoriel $\mathbb{R}$ sur lui-même.

7° Même si le début de cette approche comporte de l'analytique, faire acquérir, dès que possible, l'outil vectoriel et l'utiliser pour éviter des calculs trop fastidieux.

8° Dès que les théorèmes d'incidence et de parallélisme de droites sont acquis, certaines études pourront se faire par la géométrie « pure ».

B) Un moyen d'atteindre les objectifs :

1° Des manipulations sur les réseaux (codage d'instructions de cheminement, exécutions d'une suite d'instructions, codage des nœuds) motivent la mise en place du groupe $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus)$, d'une loi externe (ensemble des opérateurs : $\mathbb{Z}$), et la mise en évidence du fait que le groupe précédent opère fidèlement sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2° Prolongement *formel* à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de ces structures; mise en évidence des propriétés d'espace vectoriel.
Introduction du langage géométrique : point, plan, translation.
Le groupe des translations opère sur l'ensemble des points.
Homothéties vectorielles.

3° Au cours de l'élaboration de $\mathbb{R}$, les élèves ont, par exemple, traduit sur une *droite matérielle* les encadrements successifs définissant un réel.

Les élèves sont entraînés à utiliser la droite matérielle comme représentation graphique de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ comme schéma mathématique de la droite matérielle.

De même, on les habituera à repérer des *points matériels* à l'aide de deux droites matérielles graduées.

(Ne pas craindre, à propos des dessins, de parler de parallélisme en tant que « situation » se mettant en évidence par les outils que sont les règles et les équerres.)

4° La translation (1, 0) peut se noter $\vec{i}$.

La translation (0, 1) peut se noter $\vec{j}$; dès lors, la translation (a, b) s'écrit $a\vec{i} + b\vec{j}$.

La translation par laquelle le point A a pour image le point B se note $\overrightarrow{AB}$.

Application : couple de points équipollents, parallélogramme,

Coordonnées d'un point.

Corollaire de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (différentes formes).

5° Un couple de points distincts (A, B), étant donné, étude de l'ensemble des points M défini par : « $\overrightarrow{AM}$ est homothétique de $\overrightarrow{AB}$ ».

Propriétés

— A et B appartiennent à cet ensemble.

L'ensemble précédent est appelé droite AB.

— C et D étant deux points distincts quelconques de la droite AB, la droite CD est égale à la droite AB.

5° *bis* Graduation. Abscisse d'un point sur une droite.

Étant donné une droite AB, tout point M de la droite est tel que $\overrightarrow{AM}$ est homothétique de AB. Il existe un seul réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$.

L'application g_{AB} : $M \mapsto x$ de la droite dans $\mathbb{R}$ est appelée graduation associée à (A, B) de la droite.

On dit aussi que est x l'abscisse du point M pour cette graduation $g_{A,B}$. $g_{A,B}$ est une bijection de la droite sur $\mathbb{R}$.

Changement de graduation.

6° Droites parallèles : étant donné deux droites, droite EF et droite GH, ces droites sont dites parallèles, si et seulement si, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont homothétiques.

— Théorème d'Euclide.

— Deux droites parallèles sont disjointes ou égales.

— Théorème : deux droites non parallèles ont un point commun et un seul.

7° Représentation graphique de la droite.

8° Projection, de direction donnée, d'une droite D sur une droite D'.

Théorème de Thalès : A, B, C étant trois points quelconques de D; A', B', C' leurs projections respectives, et k un réel, si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$.

Réciproque du théorème de Thalès : étant donné trois points A, B, C sur une droite D, et A', B', C' sur une droite D' tels que la droite AA' soit parallèle à la droite BB'.

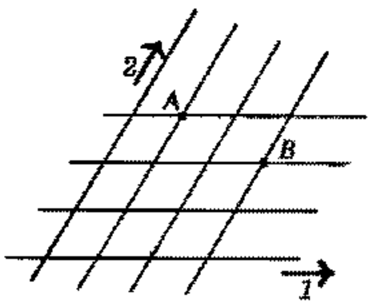
Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$ alors la droite CC' est parallèle à la droite AA'.

9° Segment AB : ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Ensembles convexes.

C) Début d'explication :

Nous distinguerons les *travaux manuels* (partie gauche), les mathématiques (partie droite).

TRAVAUX PRATIQUES	*MATHÉMATIQUE*
① Quadrillage Deux directions privilégiées, on ne s'intéresse qu'aux nœuds du quadrillage.  On chemine suivant les lignes du quadrillage. (Il n'y a aucun problème à soulever quant à la définition des nœuds et des lignes; ce n'est qu'un problème de construction matérielle.)	
② On code les ordres les plus économiques permettant d'aller d'un nœud à l'autre. Exemple : ordre de A à B : codé $(2, 1^-)$.	On utilise $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pour coder les ordres.
③ Remplacement d'une suite de deux ordres par l'ordre économique ayant le même effet. On fait chercher et constater expérimentalement que : l'ordre (a, b) suivi de l'ordre (c, d) a le même effet que l'ordre $(a + c,\ b + d)$.	On a motivé une loi de composition sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (alias $\mathfrak{G}$) : $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ $\oplus((a, b), (c, d)) \mapsto (a + c,\ b + d)$ *Mise en place du groupe* $(\mathfrak{G}, \oplus)$

Exemple de problème concret, utilisant le schéma mathématique :

A et B deux nœuds donnés, T_1 un ordre donné. Trouver l'ordre qui, exécuté à la suite de T_1, permet d'aller de A en B.	Équation dans le groupe $(\mathfrak{G}, \oplus)$

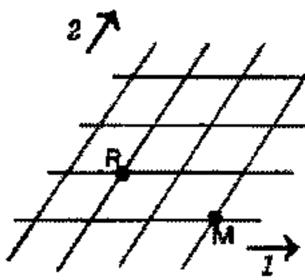
④ Itération d'un même ordre

Remplacer l'exécution d'une suite d'ordres égaux par un seul ordre.

⑤ Codage des nœuds.

On privilégie un point R sur le quadrillage.

Tout nœud M est codé par un couple (x, y) d'entiers.



⑥ Des nœuds et des ordres sont donnés par leurs codes, trouver expérimentalement les codes des nœuds obtenus après exécution des ordres.

Loi externe sur $\mathscr{C}$

$$\mathbb{Z} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$$
$$(\lambda, (a, b)) \mapsto (\lambda a, \lambda b)$$

Mise en place du $\mathbb{Z}$-module

On utilise $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (alias $\mathscr{T}$) pour coder les nœuds.
(plan-pointé).

On a donc motivé le fait que le $\mathbb{Z}$-module $\mathscr{C}$ opère sur $\mathscr{T}$.

Se trouvent ainsi motivées des structures sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que l'élève prolongera, avec l'aide du professeur, à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

⑦ Au cours de l'élaboration de $\mathbb{R}$, les élèves ont, par exemple, traduit sur une droite matérielle les encadrements successifs définissant un réel.

Les élèves sont entraînés à utiliser la droite matérielle comme représentation graphique de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ comme schéma mathématique de la droite matérielle.

De même, on les habituera à repérer des points à l'aide de deux droites graduées.

(Ne pas craindre, à propos des dessins, de parler de parallélisme en tant que « situation » se mettant en évidence par les outils que sont les règles et les équerres.)

Le seul problème sera de contrôler l'adéquation de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ à schématiser le plan matériel.

— groupe additif ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\oplus$) ou encore ($\mathscr{C}$, $\oplus$)

— espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

— variétés affines.

Pour préparer la notion de variété affine, on reprend des exemples de groupes finis opérant sur des ensembles finis traités en Sixième et Cinquième. On met en évidence la notion de trajectoire.

La variété affine peut alors apparaître comme la trajectoire d'un point obtenu à partir d'un sous-ensemble de $\mathcal{T}$.

On fait représenter graphiquement cette trajectoire.

L'examen des représentations de différentes variétés amènera les élèves à *conjecturer* des résultats sur les variétés. Ces résultats seront démontrés en Troisième.

Deux remarques.

1° Il peut être gênant d'utiliser le même $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ pour schématiser deux concrets différents : les points et les translations. En fait, cela peut être, pour le professeur, une occasion supplémentaire de bien insister sur la différence entre les mathématiques et ce qui est à mathématiser.

2° Dans un souci de sécurisation des parents, il est facile de faire observer que l'on développe ici la géométrie du géomètre expert. En outre, on peut réintroduire, par des exercices, des figures usuelles.

Annexe 5

Projet pour les classes de Quatrième et Troisième, présenté par un groupe d'expérimentateurs de l'I.P.N. (11 mai 1970).

Dans ce projet nous n'avons pas séparé les classes de Quatrième et de Troisième car nous pensons que ces deux années forment un tout. Cependant, cela étant nécessaire pour la coordination entre enseignants, entre classes et entre établissements, il sera possible de proposer une répartition des thèmes sur les deux ans.

Ce projet ne se présente pas comme un programme habituel, mais plutôt comme une liste de thèmes d'étude. Nous avons choisi ce point de vue pour plusieurs raisons :

1. — Nous pensons souhaitable de faire des programmes légers définissant un bagage minimum que tout élève doit savoir au sortir de la classe correspondante; ceci est d'autant plus important qu'on se trouve ici en Troisième, fin de la scolarité obligatoire.

2. — Nous pensons souhaitable de laisser une grande liberté au maître sur les moyens utilisés pour conduire ses élèves à acquérir ce bagage minimum.

3. — Un programme léger peut être complété en fonction des intérêts des élèves et du maître, si cela est nécessaire.

Dans les thèmes d'étude choisis nous avons disitngué trois niveaux :

— notions mathématiques,

— savoir faire,

— exemples, ou exercices, préparant des prises de conscience et des ouvertures.

1° Notions mathématiques.

Les notions mathématiques seront dégagées à partir de nombreux exemples et contre-exemples. Elles sont une synthèse où tout ce qu'il y a de commun à ces exemples et les différencie d'autres, permet de faire apparaître la notion elle-même.

Nous en avons distingué deux sortes :

a) Celles qui, après une préparation qui aura pu commencer en Cinquième et se prolonger ensuite, seront mises au point au cours de l'une des deux années de Quatrième ou de Troisième.

— groupe,
— anneaux et corps,
— distances,
— ordre (ω et η) (préparation aux décimaux et aux réels).

b) Celles qui doivent être préparées en Quatrième et Troisième et dégagées soit en fin de Troisième soit au début de la classe de Seconde.

— espace vectoriel,
— $\mathbb{R}$.

2° Savoir-faire.

Les savoir-faire consistent en des techniques que tout individu devrait posséder et en des procédés qu'il faut connaître. Il faut en faire un apprentissage intelligent, c'est-à-dire les faire découvrir et élaborer par les élèves qui les fixent intelligemment dans la mémoire et ensuite les faire pratiquer. Ce sont :

— Organisation et technique de calculs algébriques en fonction de la structure.
— Calculs approchés.
— Traduction de problèmes simples sous forme de graphe.
— Utilisation de $\mathbb{Z}^2$.
— Dessins et études géométriques :
  — utilisation de la règle et du compas,
  — étude de groupes de pavage du plan,
  — table de rapports (sinus et cosinus).

3° Exemples.

Dans cette rubrique nous mettons des exercices permettant la construction de certains modèles mathématiques s'appliquant à des situations réelles. Ils sont de deux types : ceux qui préparent directement les notions du paragraphe 1° ci-dessus, et les autres qui, s'ils préparent pour ceux qui poursuivront leurs études d'autres notions mathématiques, doivent permettre à ceux qui ne poursuivront pas leurs études la compréhension de certains phénomènes, les habituer à une réflexion et leur former l'esprit critique. Il est fondamental pour la formation intellectuelle et civique de l'individu que ces exemples soient pris, pour la plupart, dans des situations ayant existé. Ces exercices peuvent porter sur les problèmes suivants :

— Cheminements dans un graphe. Recherche opérationnelle. Optimisation.
— Croissances linéaire et non linéaire (travail sur papier logarithmique ou semi-logarithmique).

— Exemples économiques de calcul matriciel (Produit, addit.).
— Organisation de données, d'information, de calculs.
— Étude de $\mathbb{Z}^3$ (approche de l'espace).
— Problèmes de gestion d'une entreprise ou d'un budget individuel...
— Vote...

Annexe 6

Projet de programme pour la classe de Quatrième.

Il est rappelé que les professeurs ont toute liberté pour choisir l'ordre dans lequel les différentes parties du programme sont étudiées.

L'importance de chacune d'elles et le temps à y consacrer ne sont pas proportionnels à la longueur de leur libellé : les questions qui ne figuraient pas dans le programmes antérieurs, ou qui n'y figuraient pas sous la même forme, ont fait, en général, l'objet d'une rédaction plus détaillée.

I. — Relations.

Révision des notions présentées dans les classes antérieures et compléments : produit cartésien, relation, application, composition des applications; bijection d'un ensemble sur un ensemble et bijection réciproque.

Notion de groupe : définition (on la dégagera des exemples du programme).

II. — Nombres décimaux relatifs et approche des réels.

1. Groupe des puissances de dix.

Nombres décimaux relatifs : addition, multiplication, ordre, valeur absolue. Résumé des propriétés fondamentales de l'ensemble ainsi structuré des décimaux relatifs.

2. Calculs approchés.

a) Encadrement d'un nombre décimal par des intervalles des types

$$[a.10^p, (a+1)\,10^p], \quad [a.10^p, (a+1)\,10^p], \quad [a.10^p, (a+1)10^p]$$

avec

$$a \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad p \in \mathbb{Z}.$$

b) Exercices de détermination, pour un décimal strictement positif d donné et pour un entier relatif n donné, du nombre décimal $x.10^n$, avec $x \in \mathbb{N}$, tel que soient vérifiées les inégalités $0 < d.x.10^n \leqslant 1 < d(x+1).10^n$.

d) Suites décimales illimitées, nombres réels, ...

3. Énumération des principales propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels : addition, $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif; multiplication, associativité, distributivité par rapport à l'addition; ordre et valeur absolue.

On admettra que pour tout nombre réel a différent de 0, l'équation $ax = 1$ admet une solution unique. Existence pour toute équation $ax = b$, avec $a \neq 0$, d'une solution unique notée $\frac{b}{a}$ ou ba^{-1}. Exercices simples sur de tels quotients.

Sur des exemples numériques, équations et inéquations du premier degré à une inconnue.

Usage des exposants entiers : groupe des puissances d'un nombre réel non nul.

Calculs approchés sur les nombres réels.

4. Fonctions polynômes, comme applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Degré. Exercices de calcul sur les polynômes.

Produits $(x + a)^2$, $(x - a)^2$, $(x + a)(x - a)$. Exercices de factorisation.

III. — Géométrie plane.

Nota. — La géométrie, née de l'expérience, sera dès cette classe présentée comme une véritable théorie mathématique. Les axiomes adoptés seront donc énoncés avec précision, mais leur formulation sera précédée de nombreuses manipulations (dessin, usage de la règle, du compas, pliage...) qui la prépareront. On reviendra au monde physique dans les applications variées que l'on donnera des résultats obtenus par voie déductive à partir des axiomes.

La géométrie ayant utilisé le langage courant, il sera opportun, pour éviter les confusions, en particulier lors de la présentation des axiomes et de l'énonciation des premiers théorèmes, de préciser le sens que doit avoir un mot qui pourrait être ambigu. On parlera, par exemple, de « plan physique » ou de « plan mathématique » ou de « plan affiné »... Cependant on ne s'astreindra pas à utiliser toujours le qualificatif, le sens étant souvent imposé par le contexte.

1° Axiomes d'incidence.

Définition. — Soit $\mathcal{P}$ un ensemble, $\mathcal{D}$ un ensemble de parties de $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}$ est appelé un plan mathématique, ses éléments sont appelés points et les éléments de $\mathcal{D}$ sont appelés droites mathématiques quand les axiomes suivants appelés axiomes d'incidence sont vérifiés :

(I_1) $\mathcal{D}$ est non vide, et toute droite est une partie propre de $\mathcal{P}$.

(I_2) Toute paire de points distincts est incluse dans une droite et une seule.

(I_3) Pour toute droite D et tout point M n'appartenant pas à D, il existe une droite D′ et une seule contenant M et n'ayant pas de point commun avec D.

A eux seuls, ces axiomes sont insuffisants pour construire un modèle complet du plan physique, mais ils permettent, en particulier, d'introduire les notions suivantes :

Parallélisme des droites : définition; c'est une relation d'équivalence. Définition d'une direction de droite.

Projection, de direction donnée, du plan sur une droite, d'une droite sur une droite.

2° *Droite affine réelle.*

Par définition, un ensemble Δ d'éléments appelés points est une droite affine réelle s'il vérifie les axiomes suivants :

(A1). A tout couple (A, B) de points distincts de Δ est associée une bijection f de Δ sur R telle que 0 et 1 soient les images respectives de A et B.

Le couple (A, B) est appelé un repère de Δ, le nombre f(M) est l'abscisse du point M dans ce repère.

(A2). Pour tout couple de repères de la droite, si f et g désignent les bijections correspondantes, il existe deux constantes a et b telles que pour tout point M de Δ, on ait $g(M) = a.f(M) + b$.

Ordre sur une droite : orientation sur une droite, droite orientée, repères associés à une droite orientée. Demi-droite, segment.

Bipoints : équipollence, vecteurs, milieu et barycentre d'un bipoint.

3° *Plan affine réel.*

Par définition, un plan mathématique $\mathcal{P}$ est appelé plan affine réel, s'il vérifie les axiomes suivants :

(P1). Les droites de $\mathcal{P}$ sont des droites affines réelles.

(P2). (Thalès). Pour tout couple de droites, D, D', de $\mathcal{P}$, pour toute projection non constante p de D sur D' et pour tout repère (A, B) de D, l'abscisse d'un point quelconque M de D dans ce repère est égale à l'abscisse de p(M) dans le repère (p(A), p(B)) de D'.

Demi plan défini par une droite.

Triangle (triplet de points non alignés). Application de l'axiome de Thalès au triangle. Problème inverse.

Projection sur une droite des barycentres d'un bipoint. Construction graphique de barycentres à coefficients entiers donnés.

4° *Etude du plan affine réel.*

Symétrie par rapport à un point (ou symétrie centrale) : image d'une droite.

Parallélogramme : c'est par définition un quadruplet (A, B, C, D) tels que les bipoints (A, C) et (B, D) aient même milieu. Parallélisme des droites AB et CD (quand elles sont définies). Réciproque. Projection d'un parallélogramme. Réciproque.

Équipollence des bipoints. C'est une relation d'équivalence dans $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$. Vecteurs et translations : composition des translations et addition des vecteurs.

Direction d'un vecteur non nul.

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Propriétés.

Exercices de calcul vectoriel : médiane d'un triangle.

Deux vecteurs de directions distinctes étant donnés, tout vecteur est d'une manière et d'une seule combinaison linéaire de ces vecteurs.