5

Documents officiels
(ou presque)

N.D.L.R. — *Les nouveaux programmes de mathématiques, applicables à la rentrée 1970, étant, enfin publiés* (B. O. N° 22 du 28-5-70), *il n'a pas paru indispensable à la Rédaction du Bulletin de publier ces textes.*

Rappelons que ceux-ci furent adoptés le 10 décembre 1969 par les Conseils d'enseignement et que le retard qui justifia le mécontentement des Collègues est imputable aux Services du Ministère de l'Éducation nationale.

Afin d'éviter toute mésaventure du même ordre, la Rédaction du Bulletin présente ci-dessous les projets de programmes, pour les classes Terminales B, C, D, E, adoptés le 16 février 1970 par la Commission Lichnerowicz, les projets « n'ont plus qu'à » être adoptés par les Conseils d'enseignement et à être publiés.

Signalons encore que ces projets ont été communiqués à tous les éditeurs d'ouvrages scolaires et que le projet relatif aux Terminales A n'est pas encore au point, compte tenu des « variations » de la doctrine ministérielle quant au nombre des sections, leurs finalités et les modalités de l'examen...

Projet de programmes de mathématiques de Terminale B

(horaire hebdomadaire : 4 h.)

Le paragraphe 3 du chapitre II marqué d'un astérisque ne peut faire l'objet de questions de cours, écrites ou orales, ni être utilisé, en Mathématiques, à l'occasion d'un problème ou d'un exercice d'application à l'écrit ou à l'oral du baccalauréat.

I. Etude des fonctions numériques d'une variable réelle.

1. *Notion de continuité* (en un point, dans un intervalle)

Définitions, éclairées par de nombreux exemples et contre exemples. Énoncé des propriétés des fonctions continues (on admettra les théorèmes concernant la somme, le produit, le quotient de telles fonctions; on admettra que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle).

Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle. Exemples.

2. — *Notion de limite*

Définitions, éclairées par de nombreux exemples et contre exemples. On montrera l'unicité de la limite, et on admettra les théorèmes concernant la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

Cas des suites.

3. — *Notion de dérivée*

Révision du programme de Première B.

Dérivée en un point de la composée de deux fonctions dérivables; de la réciproque d'une fonction dérivable strictement monotone.

On admettra que si une fonction numérique admet une dérivée positive ou nulle sur un intervalle, elle est croissante (au sens large) sur cet intervalle.

Étude du sens de variation d'une fonction dérivable à l'aide du signe de sa dérivée.

Exemples de représentation graphique de fonctions dérivables par intervalles (on évitera les exemples présentant des difficultés techniques).

II. Calcul intégral.

1. — Sommes de Riemann d'une fonction numérique f définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. On admettra que si f est continue, ou monotone par morceaux, il existe un unique nombre réel $\int_a^b f(t)\, dt$ que les sommes de Riemann approchent arbitrairement lorsque la longueur du plus grand intervalle de subdivision est suffisamment petite. Interprétation géométrique dans le cas où f est positive.

2. — Propriétés de linéarité de l'intégrale d'une fonction continue, ou monotone par morceaux, sur un intervalle fermé borné. Moyenne d'une telle fonction. Lien avec la dérivation si la fonction est continue, intégration par parties. Primitive d'une fonction continue, ensemble des primitives.

3*. — Applications géométriques, mécaniques, physiques, etc. (calcul d'aires planes, de volumes, de masses, de moments d'inertie; vitesse et distance parcourue; intensité et quantité d'électricité; puissance et énergie, etc.). Valeur efficace d'un phénomène périodique.

III. Fonctions élémentaires.

Il sera opportun de répartir les différentes rubriques de ce chapitre entre plusieurs moments de l'année, de manière à les étudier en liaison avec les titres I et II.

1. — Fonctions $x \mapsto x^n (n \in \mathbb{Z})$; dérivées, primitives, représentation graphique.

2. — Fonctions $x \mapsto x^r (x > 0, r \in \mathbb{Q})$; dérivées, primitives.

3. — Fonctions circulaires (révision); dérivées et primitives de $x \mapsto \cos(ax+b)$ et $x \mapsto \sin(ax+b)$.

4. — Logarithme népérien (notation Log).

Limite, quand la variable positive x tend vers l'infini de $\operatorname{Log} x$ et $\dfrac{\operatorname{Log} x}{x}$. Représentation graphique. Limite, quand x tend vers 0, de $x \operatorname{Log} x$.

5. — Fonction exponentielle (notation exp).

Propriétés; dérivée; représentation graphique; nombre e; notation e^x; limite de e^x/x quand x tend vers $+\infty$.

6. — Autres fonctions logarithmiques et exponentielles.

Relations entre les fonctions exponentielles et logarithmiques de base a, et celles de base e.

IV. Statistique et Probabilités.

Révision du programme de Première.

Projet de programmes de mathématiques de Terminale C

(horaire hebdomadaire : 9 h.)

Chaque fois que l'occasion s'en présentera on mettra en évidence, sur les exemples étudiés dans les différents chapitres, les structures de groupe, sous-groupe, anneau, corps, espace vectoriel, ainsi que les isomorphismes et homomorphismes rencontrés.

Les paragraphes marqués d'un astérisque ne peuvent faire l'objet de questions de cours, écrites ou orales, ni être utilisées, en Mathématiques, à l'occasion d'un problème ou d'un exercice d'application à l'écrit ou à l'oral du baccalauréat.

I. Nombres entiers naturels. Arithmétique.

1*. — On admettra que si X et Y sont des ensembles, $\mathcal{R}$ une relation dans X, alors $X \times Y$, $\mathcal{P}(x)$, $\{x \in X \mid \mathcal{R}\}$ sont des ensembles. On en déduira que y^x et, lorsque E est une relation d'équivalence dans X, X/E sont des ensembles.

2. — *a)** Équipotence de deux ensembles; cardinal d'un ensemble comme classe d'ensembles équipotents. On admettra que la relation Card X $\leqslant$ Card Y est une relation d'ordre total entre cardinaux.

Ensembles finis et ensembles infinis : définition. Entiers naturels; on admettra que les entiers naturels forment un ensemble $\mathbb{N}$.

Somme, produit de deux entiers naturels.

b) Raisonnement par récurrence. Si a et b sont des entiers naturels, $a+b$, ab, a^b le sont aussi.

3. — Applications de $\mathbb{N}$ dans un ensemble X; notation indicielle; exemples.

4. — Multiples d'un entier relatif, dans l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs; notation, $n\mathbb{Z}$. Congruences modulo n; l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; il est formé des classes de 0, 1, ... $n-1$.

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{N}$; quotient entier, reste. Principe des systèmes de numération; base; numérations décimale et binaire.

5. — *a*) Nombres premiers dans $\mathbb{Z}$; si p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.

b) Décomposition d'un nombre en facteurs premiers; existence, unicité.

c) Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple; nombres premiers entre eux; identité de Bezout.

(L'ordre de *a*), *b*), *c*) est laissé au choix du professeur.)

II. Nombres réels; calcul numérique; nombres complexes.

1. — Inventaire (sans démonstration) des propriétés de $\mathbb{R}$: c'est un corps commutatif totalement ordonné (révision); toute partie non vide majorée admet un plus petit majorant; tout intervalle de $\mathbb{R}$ contenant plus d'un point contient un nombre rationnel.

2. — Valeurs décimales approchées à 10^{-n} près, par défaut et par excès, d'un nombre réel.

Représentation d'un nombre réel par une suite décimale illimitée (l'étude de la périodicité n'est pas au programme).

Valeurs approchées d'un nombre réel, encadrement, incertitudes absolue et relative.

Valeurs approchées d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient de nombres réels dont on connaît des valeurs approchées.

De nombreux exercices de calcul numérique seront faits à l'occasion de l'étude des fonctions usuelles et à l'occasion de problèmes, pour mettre en application les notions de valeurs approchées, d'encadrement, d'ordre de grandeur d'un résultat, d'incertitude (cf. V. 8).

3. — L'addition et la multiplication des matrices 2×2 munissent l'ensemble $\mathbb{C}$ des matrices à coefficients réels de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ d'une structure de corps commutatif. Identification de $\mathbb{R}$ à un sous corps de $\mathbb{C}$ par l'application $a \to \begin{pmatrix} a & o \\ o & a \end{pmatrix}$; $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{R}$. Notation $a+bi$; nombre complexe; nombres complexes conjugués; module d'un nombre complexe.

4. — Homomorphisme θ de $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 (rappel de Première); forme $\cos x + i \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$; forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Calcul de $\cos nx$ et de $\sin nx$ $(x \in \mathbb{R}, n = 2, 3, 4)$, et linéarisation des polynomes trigonométriques.

Existence et représentation géométrique des racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe.

5. — Résolution des équations du premier et du second degré à coefficients complexes; calcul des parties réelles et imaginaires des racines; cas des coefficients réels.

III. Calcul différentiel.

1. — *Fonctions numériques d'une variable réelle : continuité*

Continuité « en un point »; continuité dans un intervalle; somme, produit, quotient, de fonctions continues; continuité de la fonction composée de deux fonctions continues (sans démonstration).

On admettra sans démonstration le théorème suivant : « si une fonction est continue dans un intervalle, l'image, par la fonction, de cet intervalle est un intervalle ». Application à une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle : existence de la fonction réciproque; monotonie et continuité de cette fonction (on admettra la continuité).

2. — *Fonctions numériques d'une variable réelle : limites*

Limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un nombre réel donné, vers l'infini. Unicité.

Cas particulier des suites.

Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient (sans démonstration).

3. — *Fonctions numériques d'une variable réelle : dérivation*

Révision du programme de Première C : fonction linéaire tangente en un point à une fonction donnée; notation différentielle; dérivée en ce point. Fonction dérivée; dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables. Interprétation géométrique de la dérivée (repère cartésien); équation de la tangente.

Dérivée en un point de la composée de deux fonctions dérivables.

Dérivée en un point de la réciproque d'une fonction dérivable et strictement monotone.

On admettra sans démonstration que si une fonction numérique est dérivable sur un intervalle et si sa dérivée est positive ou nulle elle est croissante au sens large sur cet intervalle.

Comparaison de deux fonctions ayant même fonction dérivée sur un intervalle.

Étude du sens de variation d'une fonction dérivable à l'aide du signe de sa dérivée.

4. — *Fonctions vectorielles d'une variable réelle*

Application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

Continuité en un point.

Limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un nombre réel donné, vers l'infini.

Dérivée en un point; si l'espace vectoriel est rapporté à une base, coordonnées, dans cette base, de la dérivée; fonction dérivée.

Dérivée d'une somme de fonctions vectorielles dérivables, du produit d'une fonction vectorielle dérivable par une fonction numérique dérivable.

Dérivée du produit scalaire de deux fonctions vectorielles dérivables. Application à la recherche de tangentes; exemples des coniques et des hélices circulaires.

5. — *Cinématique du point*

Mouvement d'un point : application d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans un espace affine euclidien. Trajectoire.

Vecteur-vitesse à un instant donné. Un repère étant choisi, coordonnées du vecteur-vitesse dans ce repère. Norme du vecteur-vitesse. Vecteur-accélération à un instant donné. Un repère étant choisi, coordonnées du vecteur-accélération dans ce repère.

Étude des mouvements circulaires; étude des mouvements hélicoïdaux uniformes.

IV. Calcul intégral.

1. — Existence de l'intégrale d'une fonction numérique d'une variable réelle, monotone sur un intervalle fermé borné; notation $\int_a^b f(t)dt$.

Premières propriétés. On admettra qu'elles s'étendent à des fonctions continues, ou monotones par morceaux. Moyenne d'une telle fonction sur un intervalle fermé borné. Lien avec la dérivation en des points où la fonction est continue; intégration des parties.

Primitives; ensembles des primitives.

2. — On énoncera, sans démonstration, les propriétés des aires dont l'existence est admise ici.

Si f est une fonction positive et monotone par morceaux d'une variable réelle, aire de la partie de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, définie par $a\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant y\leqslant f(x)$.

Si f est, de plus, continue et si F en est une primitive, cette aire est égale à $F(b)-F(a)$.

Extension à $b<a$ et à une fonction négative.

Applications à des calculs d'aires planes.

3*. — Applications géométriques, mécaniques, physiques, etc. (calcul de volumes, masses, moments d'inertie; vitesse et distance parcourue; intensité et quantité d'électricité; puissance et énergie etc.).

Valeur efficace d'un phénomène périodique.

V. Exemples de fonctions d'une variable réelle.

Certains résultats de ce chapitre, déjà connus des élèves pourront illustrer les chapitres précédents; il sera opportun de répartir les différentes rubriques de celui-ci entre plusieurs moments de l'année.

1. *Fonction* $x\mapsto x^n (n\in\mathbb{Z})$; dérivée; primitive.

2. *Fonction* $x\mapsto x^r (r\in\mathbb{Q}; x>0)$ dérivée; primitive.

3. *Suites* arithmétiques et géométriques. Somme des n premiers termes.

4. *Fonctions circulaires*, dérivées (révision); dérivées et primitives de

$$x\mapsto\cos(ax+b) \qquad \text{et} \qquad x\mapsto\sin(ax+b).$$

5. — *Logarithme népérien* (notation Log).

Limite, quand la variable positive x tend vers l'infini, de $\text{Log}\, x$ et $\dfrac{\text{Log}\, x}{x}$. Limite de $x\,\text{Log}\, x$ quand x tend vers 0. Représentation graphique.

6. — *Fonction exponentielle* (notation exp).

Propriétés; dérivée; représentation graphique; nombre e; notation e^x; limite de e^x/x quand x tend vers $+\infty$.

7. — *Autres fonctions logarithmiques et exponentielles.*

Relation entre les fonctions exponentielle et logarithmique de base a, et celles de base e.

Notation e^{ix} pour désigner $\cos x+i\sin x$; ω étant une constante réelle, dérivée de la fonction $x\mapsto e^{i\omega x}$.

Remarque : L'étude d'exemples de fonctions composées du type logarithmique ou exponentiel sera strictement limitée aux cas où sont en évidence les intervalles sur lesquels la dérivée garde un signe constant et où les indéterminations à lever sont uniquement celles qui ont été énumérées plus haut.

8. — *Calcul numérique.*

Usage de la règle à calcul;

Usage des tables; pratique de l'interpolation linéaire. Tables de logarithmes;

Usage de machines à calculer de bureau.

9.* — *Équations différentielles.*

Recherche des fonctions une ou deux fois dérivables de la variable réelle x vérifiant les équations :

$y' = ay$, a étant une constante réelle;

$y'' + \omega^2 y = 0$, ω étant une constante réelle non nulle (on admettra que les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2).

VI. Éléments de géométrie affine et euclidienne.

N. B. — Dans ce paragraphe le corps de base est $\mathbb{R}$ et la dimension n est toujours égale à 2 ou 3. Une « *transformation d'un ensemble E* » est une bijection de E sur lui-même; une application f de E dans lui-même est une *involution* si $f \circ f$ est l'identité; c'est une transformation de E.

1. Application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F; image et noyau. Addition et composition des applications linéaires. Groupe linéaire. Homothéties vectorielles.

2. Barycentre dans un espace affine. Repère affine.
Réduction dans le cas euclidien de $f(M) = a\mathrm{MA}^2 + b\mathrm{MB}^2 + c\mathrm{MC}^2$.

3. Application affine d'un espace affine E dans lui-même, application linéaire associée. Exemples : projection parallèle sur un sous-espace affine; involution affine; leurs points fixes. Translations et homothéties : leurs caractérisations géométriques.
Une transformation de E qui transforme tout triplet de points alignés en un triplet de points alignés est affine.

4. Applications linéaires de l'espace vectoriel euclidien conservant la norme; leurs caractérisations; groupe orthogonal. Transformations orthogonales involutives ou symétries vectorielles. Sous-groupe des rotations vectorielles (une rotation vectorielle est une transformation orthogonale dont le sous-espace des vecteurs invariants est de dimension $n-p$ avec p pair; on rappelle que $n = 2$ ou 3).

5. Les isométries de l'espace affine euclidien dans lui-même sont des transformations affines. Groupe des isométries, sous-groupe des déplacements. Symétries, rotations, déplacement hélicoïdal. Étant donné deux repères orthonormés, il existe une isométrie et une seule transformant l'un dans l'autre. Orientabilité de la droite, du plan ou de l'espace. Points fixes des isométries. Condition pour qu'une symétrie soit un déplacement.
Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace affine euclidien orienté de dimension trois.

6. Exemples simples de groupes d'isométries laissant invariant un ensemble donné.

7*. Définition d'une similitude. Une similitude est le produit d'une isométrie et d'une homothétie.

VII. Compléments de géométrie euclidienne plane.

1. Angle d'un couple de demi-droites vectorielles (rappel de Première).
Groupe $\mathcal{A}$ des angles de demi-droites.
Angle d'un couple de droites vectorielles (ensemble des deux rotations vectorielles transformant la première en la seconde).
Groupe $\mathcal{A}'$ des angles de droites.
L'homomorphisme canonique $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$; son noyau.
L'isomorphisme de $\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{A}$ déduit de l'homomorphisme $\alpha \to \alpha + \alpha$ de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}$.
Condition pour que 4 points soient cocycliques.

2. Similitudes planes (i.e. applications du plan dans lui-même conservant les rapports de distance). Représentation par les formules $z' = az + b$ ou $z' = a\bar{z} + b$ lorsque l'on a identifié le plan à $\mathbb{C}$ grâce au choix d'un repère orthonormé. Points fixes d'une similitude. Groupe des similitudes du plan et sous-groupes remarquables.

3. Étude des courbes représentées, dans un repère orthonormé, par des équations de la forme $ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$ ($|a| + |b| \neq 0$).

Différentes formes de ces courbes; existence d'axes ou de centres de symétrie, d'asymptotes; équations réduites; existence de la tangente.

Foyers et directrices. Ellipse, hyperbole, parabole.

Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

VIII. Probabilités.

1. Espaces probabilisés finis (Ω, $\mathfrak{B}(\Omega)$, p).

Applications mesurables (ou variables aléatoires) : probabilité image, fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Couple de variables aléatoires réelles, loi conjointe. Lois marginales.

Couple indépendant. Système de n variables aléatoires globalement indépendantes.

2. Espérance mathématique d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Espérance mathématique de la somme des 2 variables aléatoires réelles d'un couple, du produit dans le cas d'un couple indépendant.

Variance, écart-type d'une variable aléatoire réelle.

3. Épreuves répétées. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres.

Projet de programmes de mathématiques de Terminale D

(horaire hebdomadaire : 6 h.)

Les paragraphes marqués d'un astérisque ne peuvent faire l'objet de questions de cours, écrites ou orales, ni être utilisés en Mathématiques, à l'occasion d'un problème ou d'un exercice d'application à l'écrit ou à l'oral du baccalauréat.

I. Nombres réels; calcul numérique; nombres complexes.

1. Inventaire (sans démonstration) des propriétés de $\mathbb{R}$: c'est un corps commutatif totalement ordonné (révision); toute partie non vide majorée admet un plus petit majorant; tout intervalle de $\mathbb{R}$ contenant plus d'un point contient un nombre rationnel.

2. Valeurs décimales approchées à 10^{-n} près, par défaut et par excès, d'un nombre réel.

Représentation d'un nombre réel par une suite décimale illimitée (l'étude de la périodicité n'est pas au programme).

Valeurs approchées d'un nombre réel, encadrement, incertitudes absolue et relative.

Valeurs approchées d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient de nombres réels dont on connaît des valeurs approchées.

De nombreux exercices de calcul numérique seront faits à l'occasion de l'étude des fonctions usuelles et à l'occasion de problèmes, pour mettre en application les notions de valeurs approchées, d'encadrement, d'ordre de grandeur d'un résultat, d'incertitude (cf. IV, 8).

3. L'addition et la multiplication des matrices 2×2 munissent l'ensemble $\mathbb{C}$ des matrices à coefficients réels de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ d'une structure de corps commutatif. Identification de $\mathbb{R}$ à un sous-corps de $\mathbb{C}$ par l'application $a \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$; $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{R}$. Notation $a+bi$; nombre complexe; nombres complexes conjugués; module d'un nombre complexe.

4. Homomorphisme θ de $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 (rappel de Première); forme $\cos x + i \sin x (x \in \mathbb{R})$; forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Calcul de $\cos nx$ et de $\sin nx (x \in \mathbb{R}, n = 2, 3, 4)$, et linéarisation des polynomes trigonométriques.

Existence et représentation géométrique des racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe ($n \leqslant 4$).

5. Résolution des équations du premier et du second degré à coefficients complexes; calcul des parties réelles et imaginaires des racines; cas des coefficients réels.

II. Calcul différentiel.

1. *Fonctions numériques d'une variable réelle : continuité*

Continuité « en un point »; continuité dans un intervalle; somme, produit, quotient, de fonctions continues; continuité de la fonction composée de deux fonctions continues (sans démonstration).

On admettra sans démonstration le théorème suivant : « si une fonction est continue dans un intervalle, l'image, par la fonction, de cet intervalle est un intervalle ». Application à une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle : existence de la fonction réciproque; monotonie et continuité de cette fonction (on admettra la continuité).

2. *Fonctions numériques d'une variable réelle : limites*

Limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un nombre réel donné, vers l'infini. Unicité.

Cas particulier des suites.

Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient (sans démonstration).

3. *Fonctions numériques d'une variable réelle : dérivation*

Révision du programme de Première C : fonction linéaire tangente en un point à une fonction donnée; notation différentielle; dérivée en ce point.

Fonction dérivée; dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables. Interprétation géométrique de sa dérivée (repère cartésien); équation de la tangente.

Dérivée en un point de la composée de deux fonctions dérivables.

Dérivée en un point de la réciproque d'une fonction dérivable et strictement monotone.

On admettra sans démonstration que si une fonction numérique est dérivable sur un intervalle et si la dérivée est positive ou nulle elle est croissante au sens large sur cet intervalle.

Comparaison de deux fonctions ayant même fonction dérivée sur un intervalle.

Étude du sens de variation d'une fonction dérivable à l'aide du signe de sa dérivée.

4. *Fonctions vectorielles d'une variable réelle*

Application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

Continuité en un point.

Limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un nombre réel donné, vers l'infini.

Dérivée en un point; si l'espace vectoriel est rapporté à une base, coordonnées, dans cette base, de la dérivée; fonction dérivée.

Dérivée d'une somme de fonctions vectorielles dérivables, du produit d'une fonction vectorielle dérivable par une fonction numérique dérivable.

Dérivée du produit scalaire de deux fonctions vectorielles dérivables.

Application à la recherche de tangentes.

5. *Cinématique du point*

Mouvement d'un point : application d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans un espace affine euclidien. Trajectoire.

Vecteur-vitesse à un instant donné. Un repère étant choisi, coordonnées du vecteur-vitesse dans ce repère. Norme du vecteur-vitesse.

Vecteur-accélération à un instant donné. Un repère étant choisi, coordonnées du vecteur-accélération dans ce repère.

Étude des mouvements circulaires; étude des mouvements hélicoïdaux uniformes.

III. Calcul intégral.

1. Existence de l'intégrale d'une fonction numérique d'une variable réelle, monotone sur un intervalle fermé borné; notation $\int_a^b f(t)dt$.

Premières propriétés. On admettra qu'elles s'étendent à des fonctions continues, ou monotones par morceaux. Moyenne d'une telle fonction sur un intervalle fermé borné. Lien avec la dérivation en des points où la fonction est continue; intégration par parties.

Primitives; ensembles des primitives.

2. On énoncera, sans démonstration, les propriétés des aires dont l'existence est admise ici.

Si f est une fonction positive et monotone par morceaux d'une variable réelle, aire de la partie de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, définie par $a\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant y\leqslant f(x)$.

Si f est, de plus, continue et si F en est une primitive, cette aire est égale à $F(b)-F(a)$.

Extension à $b<a$ et à une fonction négative.

Applications à des calculs d'aires planes.

3°. Applications géométriques, mécaniques, physiques, etc. (calcul de volumes, masses, moments d'inertie; vitesse et distance parcourue; intensité et quantité d'électricité; puissance et énergie, etc.).
Valeur efficace d'un phénomène périodique.

IV. Exemples de fonctions d'une variable réelle.

Certains résultats de ce chapitre, déjà connus des élèves pourront illustrer les chapitres précédents; il sera opportun de répartir les différentes rubriques de celui-ci entre plusieurs moments de l'année.

1. *Fonction* $x \mapsto x^n (n \in \mathbb{Z})$; dérivée; primitive.

2. *Fonction* $x \mapsto x^r (r \in \mathbb{Q} : x > 0)$ dérivée; primitive.

3. *Suites* arithmétiques et géométriques. Somme des n premiers termes.

4. *Fonctions circulaires*; dérivées (révision); dérivées et primitives de

$$x \mapsto \cos(ax+b) \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \sin(ax+b).$$

5. *Logarithme népérien* (notation Log).

Limite, quand la variable positive x tend vers l'infini de $\operatorname{Log} x$ et $\dfrac{\operatorname{Log} x}{x}$. Représentation graphique. Limite de $x \operatorname{Log} x$ quand x tend vers 0.

6. *Fonction exponentielle* (notation exp).

Propriétés; dérivée; représentation graphique; nombre e; notation e^x; limite de e^x/x quand x tend vers $+\infty$.

7. *Autres fonctions logarithmiques et exponentielles.*

Relation entre les fonctions exponentielle et logarithmiques de base a, et celles de base e.
Notation e^{ix} pour désigner $\cos x + i \sin x$; ω étant une constante réelle, dérivée de la fonction $x \mapsto e^{i\omega x}$.
Remarque. — L'étude d'exemples de fonctions composées du type logarithmique ou exponentiel sera strictement limitée aux cas où sont en évidence les intervalles sur lesquels la dérivée garde un signe constant et où les indéterminations à lever sont uniquement celles qui ont été énumérées plus haut.

8. *Calcul numérique.*

Usage de la règle à calcul.
Usage de tables; pratique de l'interpolation linéaire. Tables de logarithmes.
Usage de machines à calculer de bureau.

9. *Équations différentielles.*

Recherche des fonctions une ou deux fois dérivables de la variable réelle x vérifiant les équations :
$y' = ay$, a étant une constante réelle;
$y'' + \omega^2 y = 0$, ω étant une constante réelle non nulle (on admettra que les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2).

V. Éléments d'algèbre linéaire.

1. Géométrie vectorielle :

a) révision du titre IV de la classe de Première D.

b) on admettra que l'espace euclidien réel est orientable; produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace euclidien orienté de dimension trois.

2. Barycentre dans un espace affine. Repère affine.
Réduction dans le cas euclidien de $f(\mathrm{M}) = a\mathrm{MA}^2 + b\mathrm{MB}^2 + c\mathrm{MC}^2$.

VI. Probabilités et statistiques.

1. Espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), p)$.
Applications mesurables (ou variables aléatoires) : probabilité image; fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.
Couples de variables aléatoires réelles, loi conjointe. Lois marginales.
Couple indépendant. Système de n variables aléatoires globalement indépendantes.

2. Espérance mathématique d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Espérance mathématique de la somme de deux variables aléatoires réelles d'un couple, du produit dans le cas d'un couple indépendant.
Variance, écart-type d'une variable aléatoire réelle.

3. Épreuves répétées. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres.

4. Description statistique d'une population ou d'un échantillon (révision du programme de statistique de Première D, titre VII 1°); exercices pratiques sur ce programme : calcul de coefficients de corrélation observés.

Projet de programmes de mathématiques de Terminale E

(horaire hebdomadaire : 8 h.)

Chaque fois que l'occasion s'en présentera on mettra en évidence, sur les exemples étudiés dans les différents chapitres, les structures de groupe, sous-groupe, anneau, corps, espace vectoriel, ainsi que les isomorphismes et homomorphismes rencontrés.

Les paragraphes marqués d'un astérisque ne peuvent faire l'objet de questions de cours, écrites ou orales, ni être utilisés en Mathématiques, à l'occasion d'un problème ou d'un exercice d'application à l'écrit ou à l'oral du baccalauréat.

I. Nombres entiers naturels. Arithmétique.

Exemples de raisonnement par récurrence.
Exemples d'emploi de la notation indicielle.
Principe des systèmes de numération; base; numération décimale et binaire.

II. Nombres réels; calcul numérique; nombres complexes.

1. Inventaire (sans démonstration) des propriétés de $\mathbb{R}$: c'est un corps commutatif totalement ordonné (révision); toute partie non vide majorée admet un plus petit majorant; tout intervalle de $\mathbb{R}$ contenant plus d'un point contient un nombre rationnel.

2. Valeurs décimales approchées à 10^{-n} près, par défaut et par excès, d'un nombre réel.

Représentation d'un nombre réel par une suite décimale illimitée (l'étude de la périodicité n'est pas au programme).

Valeurs approchées d'un nombre réel, encadrement, incertitudes absolue et relative.

Valeurs approchées d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient de nombres réels dont on connaît des valeurs approchées.

De nombreux exercices de calcul numérique seront faits à l'occasion de l'étude des fonctions usuelles et à l'occasion de problèmes, pour mettre en application les notions de valeurs approchées, d'encadrement, d'ordre de grandeur d'un résultat, d'incertitude (cf. V. 8).

3. L'addition et la multiplication des matrices 2×2 munissent l'ensemble $\mathbb{C}$ des matrices à coefficients réels de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ d'une structure de corps commutatif. Identification de $\mathbb{R}$ à un sous-corps de $\mathbb{C}$ par l'application $a \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$; $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{R}$. Notation $a+bi$; nombre complexe; nombres complexes conjugués; module d'un nombre complexe.

4. Homomorphisme θ de $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 (rappel de Première); forme $\cos x + i \sin x (x \in \mathbb{R})$; forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Calcul de $\cos nx$ et de $\sin nx$ ($x \in \mathbb{R}$, $n = 2, 3, 4$), et linéarisation des polynomes trigonométriques.

Existence et représentation géométrique des racines $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe.

5. Résolution des équations du premier et du second degré à coefficients complexes; calcul des parties réelles et imaginaires des racines; cas des coefficients réels.

III. Calcul différentiel.

1. *Fonctions numériques d'une variable réelle : continuité.*

Continuité « en un point »; continuité dans un intervalle; somme, produit, quotient, de fonctions continues; continuité de la fonction composée de deux fonctions continues (sans démonstration).

On admettra sans démonstration le théorème suivant : « si une fonction est continue dans un intervalle, l'image, par la fonction, de cet intervalle est un intervalle ». Application à une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle : existence de la fonction réciproque; monotonie et continuité de cette fonction (on admettra la continuité).

2. *Fonctions numériques d'une variable réelle : limites.*

Limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un nombre réel donné, vers l'infini. Unicité.

Cas particulier des suites.

Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient (sans démonstration).

3. *Fonctions numériques d'une variable réelle : dérivation.*

Révision du programme de Première E : fonction linéaire tangente en un point à une fonction donnée; notation différentielle; dérivée en ce point. Fonction dérivée; dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables. Interprétation géométrique de la dérivée (repère cartésien); équation de la tangente.

Dérivée en un point de la composée de deux fonctions dérivables.

Dérivée en un point de la réciproque d'une fonction dérivable et strictement monotone.

On admettra sans démonstration que si une fonction numérique est dérivable sur un intervalle et si sa dérivée est positive ou nulle elle est croissante au sens large sur cet intervalle.

Comparaison de deux fonctions ayant même fonction dérivée sur un intervalle.

Étude du sens de variation d'une fonction dérivable à l'aide du signe de sa dérivée.

4. *Fonctions vectorielles d'une variable.*

Application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

Continuité en un point.

Limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un nombre réel donné, vers l'infini.

Dérivée en un point; si l'espace vectoriel est rapporté à une base, coordonnées, dans cette base, de la dérivée; fonction dérivée.

Dérivée d'une somme de fonctions vectorielles dérivables, du produit d'une fonction vectorielle dérivable par une fonction numérique dérivable.

Dérivée du produit scalaire de deux fonctions vectorielles dérivables.

Application à la recherche de tangentes; exemples des coniques et des hélices circulaires.

5. *Cinématique du point.*

Mouvement d'un point: application d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans un espace affine euclidien. Trajectoire.

Vecteur-vitesse à un instant donné. Un repère étant choisi, coordonnées du vecteur-vitesse dans ce repère. Norme du vecteur-vitesse.

Vecteur-accélération à un instant donné. Un repère étant choisi, coordonnées du vecteur-accélération dans ce repère.

Étude des mouvements circulaires; étude des mouvements hélicoïdaux uniformes.

IV. Calcul intégral.

1. — Existence de l'intégrale d'une fonction numérique d'une variable réelle, monotone sur un intervalle fermé borné; notation $\int_a^b f(t)dt$.

Premières propriétés. On admettra qu'elles s'étendent à des fonctions continues, ou monotones par morceaux. Moyenne d'une telle fonction sur un intervalle fermé borné. Lien avec la dérivation en des points où la fonction est continue; intégration par parties.

Primitives; ensembles des primitives.

2. — On énoncera, sans démonstration, les propriétés des aires dont l'existence est admise ici.

Si f est une fonction positive et monotone par morceaux d'une variable réelle, aire de la partie de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, définie par $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. Si f est, de plus, continue et si F en est une primitive, cette aire est égale à $F(b) - F(a)$.

Extension à $b<a$ et à une fonction négative.
Applications à des calculs d'aires planes.

3. — Applications géométriques, mécaniques, physiques, etc. (calcul de volumes, masses, moments d'inertie; vitesse et distance parcourue; intensité et quantité d'électricité; puissance et énergie, etc.).

Valeur efficace d'un phénomène périodique.

V. Exemples de fonctions d'une variable réelle.

Certains résultats de ce chapitre, déjà connus des élèves pourront illustrer les chapitres précédents; il sera opportun de répartir les différentes rubriques de celui-ci entre plusieurs moments de l'année.

1. — *Fonction* $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$; dérivée; primitive.

2. — *Fonction* $x \mapsto x^r$ $(r \in \mathbb{Q}; x > 0)$ dérivée; primitive.

3. — *Suites* arithmétiques et géométriques. Sommes des n premiers termes.

4. — *Fonctions circulaires :* dérivées (révision); dérivées et primitives de

$$x \mapsto \cos(ax+b) \quad \text{et} \quad x \mapsto \sin(ax+b).$$

5. *Logarithme népérien* (notation Log).

Limite, quand la variable positive x tend vers l'infini de $\operatorname{Log} x$ et $\dfrac{\operatorname{Log} x}{x}$. Limite de $x \operatorname{Log} x$ quand x tend vers 0. Représentation graphique.

6. *Fonction exponentielle* (notation exp.).

Propriétés; dérivée; représentation graphique; nombre e; notation e^x; limite de e^x/x quand x tend vers $+\infty$.

7. *Autres fonctions logarithmiques et exponentielles.*

Relation entre les fonctions exponentielle et logarithmique de base a, et celles de base e.

Notation e^{ix} pour désigner $\cos x + i \sin x$; ω étant une constante réelle, dérivée de la fonction $x \mapsto e^{i\omega x}$.

Remarque : L'étude d'exemples de fonctions composées du type logarithmique ou exponentiel sera strictement limitée aux cas où sont en évidence les intervalles sur lesquels la dérivée garde un signe constant et où les indéterminations à lever sont uniquement celles qui ont été énumérées plus haut.

8. *Calcul numérique.*

Révision des programmes de Seconde T et Première E.

9*. *Équations différentielles.*

Recherche des fonctions une ou deux fois dérivables de la variable réelle x vérifiant les équations :

$y' = ay$, a étant une constante réelle;

$y'' + \omega^2 y = 0$, ω étant une constante réelle non nulle (on admettra que les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2).

VI. Éléments de géométrie affine et euclidienne.

N. B. — Dans ce paragraphe le corps de base est $\mathbb{R}$ et la dimension n est toujours égale à 2 ou 3. Une « *transformation d'un ensemble E* » est une bijection de E sur lui-même; une application f de E dans lui-même est une *involution* si fof est l'identité : c'est une transformation de E.

1. — Application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F; image et noyau. Addition et composition des applications linéaires. Groupe linéaire. Homothéties vectorielles.

2. — Barycentre dans un espace affine. Repère affine.
Réduction dans le cas euclidien de $f(M) = aMA^2+bMB^2+cMC^2$.

3. — Application affine d'un espace affine dans lui-même, application linéaire associée. Exemples : translations, homothéties, etc.

4. — Applications linéaires de l'espace vectoriel euclidien conservant la norme; leurs caractérisations; groupe orthogonal. Transformations orthogonales involutives ou symétries vectorielles. Sous-groupe des rotations vectorielles (une rotation vectorielle est une transformation orthogonale dont le sous-espace des vecteurs invariants est de dimension $n-p$ avec p pair; on rappelle que $n = 2$ ou 3).

5. — Les isométries de l'espace affine euclidien dans lui-même sont des transformations affines. Groupe des isométries, sous-groupe des déplacements. Symétries, rotations, déplacement hélicoïdal.

Étant donné deux repères orthonormés, il existe une isométrie et une seule transformant l'un dans l'autre. Orientabilité de la droite, du plan ou de l'espace. Points fixes des isométries. Condition pour qu'une symétrie soit un déplacement.

Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace affine euclidien orienté de dimension trois.

6. — Exemples simples de groupes d'isométries laissant invariant un ensemble donné.

7*. — Définition d'une similitude. Une similitude est le produit d'une isométrie et d'une homothétie.

VII. Compléments de géométrie euclidienne.

1. — Angle d'un couple de demi-droites vectorielles (rappel de Première).
Groupe $\mathcal{A}$ des angles de demi-droites.
Angle d'un couple de droites vectorielles (ensemble de deux rotations vectorielles transformant la première en la seconde).
Groupe $\mathcal{A}'$ des angles de droites.
L'homomorphisme canonique $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$; son noyau.
L'isomorphisme de $\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{A}$ déduit de l'homomorphisme $\alpha \to \alpha+\alpha$ de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}$.
Condition pour que 4 points soient cocyliques.

2. — Similitudes planes (i. e. applications du plan dans lui-même conservant les rapports de distance). Représentation par les formules $z' = az+b$ ou $z' = a\bar{z}+b$ lorsque l'on a identifié le plan à $\mathbb{C}$ grâce au choix d'un repère orthonormé. Points fixes d'une similitude.
Groupe des similitudes du plan et sous-groupes remarquables.

3. — Étude des courbes représentées, dans un repère orthonormé, par des équations de la forme :

$$ax^2+by^2+2cx+2dy+e = 0 \quad (|a|+|b|\neq 0).$$

Différentes formes de ces courbes; existence d'axes ou de centres de symétrie, d'asymptotes. Équations réduites : ellipse, hyperbole, parabole.

Existence de la tangente. Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

4. — Géométrie descriptive. Les questions énumérées ci-dessous seront avantageusement étudiées en liaison avec le cours de géométrie de cette classe et de la classe antérieure; elles serviront utilement à son illustration.

Rotation autour d'un axe vertical, ou de bout.

Rabattement d'un plan sur un plan horizontal ou frontal.

Distance de deux points, d'un point à une droite, d'un point à un plan; angle de deux droites.

Projection d'un cercle : épure.

Représentation d'un cylindre de révolution, d'un cône de révolution dont une base circulaire est dans le plan horizontal de projection.

Construction par points et tangentes de la projection horizontale (resp. frontale) de l'intersection d'une telle surface par un plan de bout (resp. vertical).

Représentation de l'hélice circulaire droite tracée sur un cylindre de révolution d'axe vertical.

VIII. Probabilités.

1. — Espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), p)$.

Applications mesurables (ou variables aléatoires) : probabilité image, fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Couple de variables aléatoires réelles, loi conjointe. Lois marginales.

Couple indépendant. Système de n variables aléatoires globalement indépendantes.

2. — Espérance mathématique d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Espérance mathématique de la somme de 2 variables aléatoires réelles d'un couple, du produit dans le cas d'un couple indépendant.

Variance, écart-type d'une variable aléatoire réelle.

3. — Épreuves répétées. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres.