Sur quelques points de terminologie

J. DANTREVAUX,
C.S.U., Mulhouse.

Dans cette courte note, je voudrais attirer l'attention sur deux questions relatives à la terminologie à utiliser en Algèbre, car ceci ne semble actuellement pas très net ni parfaitement clair, car il arrive de rencontrer cette terminologie imprécise dans des ouvrages fort sérieux ou dans des comptes rendus polycopiés de Faculté.

1° Anneaux, corps.

Dans bien des cas, on rencontre une distinction artificielle entre ANNEAUX et CORPS : cette distinction n'a pas à être faite au niveau élémentaire, car un corps n'est en somme qu'un anneau particulier (d'ailleurs l'étude des sous-structures le prouve), dont l'étude n'est a priori pas plus privilégiée que, par exemple, celle des anneaux principaux ou celle des anneaux noethériens. On sait d'ailleurs qu'au niveau élémentaire, à part les propriétés de définition c'est-à-dire l'intégrité et l'existence d'un inverse pour chaque élément non nul, un corps n'a que fort peu de propriétés simples en plus des propriétés générales des anneaux, tout au plus puis-je citer le fait qu'un corps n'a pas d'autres idéaux que les idéaux triviaux.

Par conséquent, de grâce! ne séparons plus, au stade élémentaire, les corps (qui sont des anneaux particuliers) des anneaux en général.

2° Les sous-structures.

Ici, les incohérences rencontrées sont plus graves, car la terminologie utilisée peut impliquer des conséquences fausses.

La littérature mathématique semble d'ailleurs assez hésitante sur ces questions de terminologie; je n'ai trouvé nulle part de définition générale des sous-structures, Bourbaki parle seulement, sans préciser de dénominations, des structures algébriques induites. Les auteurs consultés (Dubreil, Godement, Bourbaki) posent d'abord un groupe G, puis définissent les sous-groupes de G, un anneau A, puis définissent les sous-anneaux de A, ...etc., définitions parfaitement correctes du moment que les prémices ont été bien précisées, mais à mon avis incomplètes, ce qui ne va pas sans embarrasser quelque peu les auteurs lorsqu'il a'sgit de donner la définition précise d'un sous-corps d'un corps K : Godement n'hésite pas à écrire, ce qui va bien dans le sens de cet article, qu'une partie A d'un corps K est un sous-corps si, premièrement A est un sous-anneau de K, ...etc. Il est vrai que la seule structure importante est celle d'ANNEAU, la structure de CORPS étant pour ainsi dire un accident pouvant survenir à un anneau, et par conséquent à n'importe quel sous-anneau.

Une erreur couramment répandue — et elle est encore entretenue par la lecture de certaines publications — consiste à croire un peu rapidement qu'un Groupe ne saurait avoir d'autre sous-structure qu'un sous-GROUPE, qu'un anneau ne peut avoir d'autre sous-structure que des sous-anneaux et qu'un CORPS des sous-CORPS; on va voir qu'il n'en est rien, et c'est pourquoi le proposerais que la dénomination des sous-structures soit comprise dans le sens suivant :

Soit S une structure quelconque (groupe, demi-groupe, anneau, corps, espace vectoriel, module, algèbre, etc...) : c'est un ensemble muni d'une ou plusieurs lois de composition interne, et peut-être aussi d'une opération externe.

Si U est une partie de S stable par tout, ou partie, des lois de composition (et éventuellement des opérations externes), U est une sous-structure de S. Si U est un groupe pour une des lois de composition de S, on dira que U est un SOUS-GROUPE de S pour cette loi de composition; si U est un anneau ou un corps pour deux lois de composition interne de S, on dira que S est un SOUS-ANNEAU ou un SOUS-CORPS de S; ... et ainsi de suite.

En règle générale : Si S est une structure algébrique quelconque, U est un SOUS-TRUC de S, si 1° U est un sous-ensemble de S et 2° s'il existe des lois de composition (et éventuellement des opérations externes) de S qui, restreintes à U, donnent à U la structure de « TRUC ».

Ainsi, en se limitant aux cinq structures classiques de demi-groupe, groupe, anneau, corps, espace vectoriel réel, on pourra donner les exemples suivants.

Groupe ou demi-groupe : il n'existe qu'une seule loi de composition interne; les sous-structures intéressantes possibles seront donc des SOUS-GROUPES et des SOUS-DEMI-GROUPES.

Z est un groupe additif, N est un sous-demi-groupe de Z (Sous-demi-groupe d'un groupe);

Z est un demi-groupe multiplicatif, $\{-1, +1\}$ en est un sous-groupe.

Anneau ou Corps : il existe deux lois de composition interne, donc nous pourrons rencontrer des SOUS-DEMI-GROUPES et des SOUS-GROUPES additifs ou multiplicatifs (les deux lois de composition d'un anneau sont le plus souvent nommées l'addition et la multiplication), des SOUS-ANNEAUX et des SOUS-CORPS.

On ne donnera que des exemples non triviaux :

Dans un anneau quelconque, l'ensemble des diviseurs de l'unité est un SOUS-GROUPE MULTIPLICATIF : on peut chercher par exemple celui de Z/15Z. (Ce sous-groupe est le « Groupe des unités) noté U(A), de l'anneau A.)

R est un corps; Z est un SOUS-ANNEAU de R.

$M_2(R)$ — anneau des matrices carrées 2×2 à éléments réels — est un anneau (unitaire, mais qui n'est ni commutatif ni intègre).

On peut en exhiber facilement deux SOUS-CORPS qui sont : l'un l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où $a \in R$; c'est un sous-corps isomorphe à R; l'autre est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et $b \in R$, qui est un sous-corps isomorphe au corps C des complexes; ces deux sous-corps sont, au surplus, commutatifs.

Espace vectoriel : il existe une loi de composition interne (addition) et une opération de R sur E; par conséquent on pourra rencontrer, évidemment, des SOUS-ESPACES VECTORIELS, mais aussi des simples SOUS-GROUPES ADDITIFS.

Par exemple, dans l'espace vectoriel des vecteurs libres de l'espace, rapporté à une base orthonormée, qui est un espace vectoriel sur R, l'ensemble de tous les vecteurs dont les trois composantes sont des entiers (ou même des nombres rationnels) constitue seulement un sous-groupe additif, la stabilité par les homothéties de rapport réel n'étant pas assurée.