Sur la notion de limite

A. SEM, *Lycée Montaigne, Bordeaux.*

Nos collègues parisiens, ayant participé aux Journées d'Étude sur les Programmes de I^{re}, se sont préoccupés de trouver une présentation claire de la notion de limite (cf. Bulletin n° 274, p. 272 - II).

Il en a été de même à Bordeaux.

Les quelques remarques personnelles qui suivent, sans prétendre à aucune originalité, peuvent amorcer le débat, dans le cadre d'une pédagogie rénovée. Nous souhaitons des conseils pour les améliorer.

Il ne semble pas possible de parler à ce niveau d'espaces topologiques, ni de filtres, bien que la notion de « voisinages » dans $\mathbb{R}$ soit devenue courante. Mais il serait utile d'adopter dès le départ des définitions, un vocabulaire et des notations qui seront conservées dans les généralisations futures.

• Le problème posé consiste à choisir entre voisinages « pointés » et « non pointés ». Or, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on peut construire le filtre $\mathcal{F}_A$ induit dans A par le filtre $\mathcal{F}$ des voisinages de $\mathbb{R}$. Proposer d'introduire les voisinages « pointés » du point a, c'est choisir :

$$A = \mathbb{R} - \{a\}$$

Pourquoi ne pas poser le problème pour un choix arbitraire de A?
Autrement dit :

— définir les voisinages de a dans $\mathbb{R}$;

— puis, dans une partie A de $\mathbb{R}$ (a choisi adhérent à A);

— enfin, définir la notion de limite, pour une application f en, a, la variable ne prenant ses valeurs que dans A.

Pourquoi ne pas abandonner, simultanément, l'expression « tendre vers », dont beaucoup estiment qu'elle présente de nombreux inconvénients pédagogiques malgré toutes les images intuitives qu'elle suggère (nous dirons même, à cause de cela)?

• Voici un exemple de présentation possible, succinctement exposé.

— *données* : f application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; A une partie de $\mathbb{R}$; a un point adhérent à A.

— *définition* : dire que « f a pour limite b en a selon A », c'est dire que tout voisinage $w(b)$ contient l'image d'un voisinage de a dans A :

$$\forall w(b) \qquad \exists v_-(a) \mid f(v_-[a] \cap A) \subset w(b)$$

On dira alors que : « f voisine b en a selon A »,
et on écrira : $b = \lim(f, a, A)$.

— *limite à gauche* (resp. à droite) :

Les voisinages de a à gauche dans $\mathbb{R}$ pourraient être notés : $v(a - 0)$ ou même : $v_-(a)$; on écrirait : $b = \lim(f, a_-, A)$ qui signifierait :

$$\forall w(b) \qquad \exists v_-(a) \mid f[v_-(a) \cap A] \subset w(b)$$

Cette présentation permet aisément :

— de mettre en évidence l'importance des choix de f, a et A;

— d'énoncer simplement les théorèmes sur les limites.

• Les exemples suivants se traitent immédiatement.

1° Soit f définie par :

$$\left.\begin{array}{ll} & f(0)=1 \\ x \neq 0 & f(x)=x \end{array}\right]$$

Manifestement :

$$\lim\,(f, 0, \mathbb{R}^*) = 0$$

Mais f n'a pas de limite en 0 selon $\mathbb{R}$; $\lim\,(f, 0, \mathbb{R})$ n'a pas de sens.

2° Soit f définie par :

$$\left.\begin{array}{ll} & f(0)=2 \\ x \neq 0 & f(x) \neq \sin \dfrac{1}{x} \end{array}\right]$$

On pourra comparer : $A_1 = \left\{ \cdots \dfrac{2}{\pi}, \dfrac{2}{5\pi}, \cdots \right\}$

$$A_2 = \left\{ \cdots \frac{1}{\pi}, \frac{2}{2\pi}, \frac{1}{3\pi} \cdots \right\} \text{etc...}$$

3° Soit f définie par :

$$\left[\begin{array}{ll} x \in \mathbb{Z} & f(x) = x \\ x \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z} & f(x) = x + 1 \\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} & f(x) = x + 2 \end{array}\right.$$

f n'a pas de limite en 0 selon $\mathbb{R}$, ni selon $\mathbb{Q}$; mais selon $\mathbb{Z}$, ou $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, etc...

— *Cas particuliers* :

1° Soit A un voisinage de a.

Il est facile de montrer que si f a pour limite b en a selon $v(a)$, il en est de même pour tout autre voisinage $v'(a)$.

On notera :

$$\lim\,(f, a) = \lim\,(f, a, v(a))$$
$$\lim\,(f, a\text{-}) = \lim\,(f, a, v\text{-}(a))$$

2° Soit f une suite dans $\mathbb{R}$: $n \in \mathbb{N}$ $\quad f(n) = u_n$

Dire que la suite converge vers l dans $\mathbb{R}$, c'est dire que f a pour limite l, pour n infini dans $\mathbb{N}$. On pourra écrire :

$$\lim u_n = \lim\,(f, +\infty, \mathbb{N})$$