Abus de langage

G. AUDIBERT,
I.R.E.M. Montpellier.

Rappelons tout d'abord la définition d'une fonction.

Une fonction f est la donnée de deux ensembles E et F et d'une relation qui à chaque élément x de E fait correspondre un élément et un seul y de F; on notera $f : E \rightarrow F$. On dit que y est la valeur de la fonction correspondant à x, la variable.

Dans l'enseignement secondaire, une grande confusion a régné assez longtemps quant à la définition de la notion de fonction; je reproduis ici une « définition » de Maillard et Millet (1954) :

« Un nombre y est fonction d'un nombre x si la connaissance de la valeur numérique de x détermine celle de y.

La fonction y est alors définie pour cette valeur de x ».

Nous allons étudier maintenant trois exemples dans lesquels, à travers la notion de fonction transparaissent d'autres notions distinctes comme celles de « valeurs prises par une fonction ». C'est la juxtaposition de ces différentes notions en une seule qui conduit, à des abus de langage nécessaires et fructueux.

1er exemple : Permutation.

Nous trouvons dans le dictionnaire Littré la définition suivante de la permutation :

« Terme mathématique. La permutation exprime les arrangements différents que l'on peut former avec un certain nombre d'objets, chacun des groupes renfermant tous les objets donnés ».

Le moins qu'on puisse dire est que la confusion règne dans cette définition.

Donnons maintenant une définition rigoureuse :

Une permutation d'un ensemble E est une application bijective de E dans lui même

$$\sigma : E \rightarrow E.$$

Cependant, pour avoir une vue enrichissante de la notion de permutation, il est important de concevoir aussi une permutation de n objets comme :

Un ensemble ordonné que l'on peut former en rangeant ces n objets les uns à la suite des autres (*).

Nous aurons par exemple la permutation (3, 1, 2).

En fait, il y a deux représentations mentales différentes d'une même notion abstraite. Une représentation dynamique pour laquelle une permutation est l'action de permuter; c'est cette représentation qu'on utilise lorsqu'on compose les permutations. Il y a une deuxième représentation que nous appellerons représentation statique,

(*) C'est cette dernière définition qui est d'ailleurs utilisée par Robert Delthell dans son cours de Mathématiques Générales (1956).

pour laquelle la permutation devient un ensemble totalement ordonné; c'est cette représentation qu'on utilise lorsqu'on parle de la permutation (3, 1, 2).

C'est parce que nous n'utilisons qu'un seul mot pour deux définitions correspondant à deux représentations mentales que nous dirons qu'il y a abus de langage.

Remarquons enfin que, suivant les questions étudiées, l'une de ces images mentales peut être plus utile que l'autre. On peut par exemple examiner le rôle qu'elles jouent dans les deux manières d'aborder la signature d'une permutation : en comptant les transpositions (représentation dynamique), ou en comptant les inversions (représentation statique).

Si nous essayons de schématiser le processus d'élaboration de la notion de permutation, nous voyons que dans un premier temps cette notion est confuse; par réaction apparaît une définition rigoureuse; dans un troisième temps, parce que la seule rigueur n'est pas assez enrichissante, on voit apparaître l'abus de langage. L'étape de l'abus de langage ressemble un peu à la première étape, celle de la confusion, mais il ne faut pas s'y tromper car entre les deux étapes il y a l'élaboration rigoureuse.

2e exemple : Suite.

Nous ne parlerons que de suites réelles.

La définition rigoureuse d'une suite réelle est la suivante :

Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Pourtant l'image la plus enrichissante d'une suite est souvent celle d'un ensemble de points que l'on place les uns après les autres. Le dynamisme, ou encore la notion de temps, au sens où le deuxième point est placé quelque temps après le premier, le troisième quelque temps après le second et ainsi de suite, intervient dans l'opération.

Là encore se superposent deux notions, celle de « fonction » et celle de « valeurs prises par la fonction ». De ces deux notions, tantôt l'une tantôt l'autre domine. C'est ainsi que les notions de limite, de limite supérieure ou de limite inférieure d'une suite sont saisies grâce à l'image géométrique et dynamique de cet ensemble de points placés sur la droite réelle qu'est la suite.

Par contre, pour l'étude des suites récurrentes et pour d'autres questions, on fait intervenir la notion d'espace vectoriel des suites réelles; c'est alors un espace de fonctions et c'est la suite en tant que « fonction » qui joue un rôle important. Dans le cas des suites récurrentes, la représentation géométrique de la suite dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ offre aussi un certain intérêt. On voit ainsi apparaître pour ces suites récurrentes les deux aspects de la notion de suite que nous venons de signaler.

Nous voyons en définitive l'absolue nécessité de l'abus de langage pour la notion de suite.

3e exemple : Variable aléatoire.

La définition rigoureuse d'une variable aléatoire est la suivante :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace de probabilité, une variable aléatoire sur cet espace est une fonction définie sur Ω à valeurs réelles

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

telle que :

$$\overset{-1}{X}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A} \text{ quel que soit } x \in \mathbb{R}.$$

Ici, l'abus de langage apparaît d'une façon éclatante puisque une fonction est appelée variable.

Nous allons tout d'abord donner une justification théorique de cet abus de langage, pour ensuite faire apparaître sa nécessité pratique.

Sur le plan théorique, nous remarquerons que si $\mathcal{B}$ est la famille des parties $A \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\overset{-1}{X}(A) \in \mathcal{A}$$

alors $\mathcal{B}$ est une tribu de $\mathbb{R}$ et la fonction μ définie sur $\mathcal{B}$ par

$$\mu(A) = p(\overset{-1}{X}(A))$$

est une probabilité. Donc $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace de probabilité. Ainsi les questions qui se posent sur $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ se transforment en des questions sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ la fonction X ayant un intérêt surtout grâce aux valeurs, $X(\omega) \in \mathbb{R}$ $(\omega \in \Omega)$, qu'elle prend. D'où le nom de « variable » puisqu'il s'agit alors de valeurs variant sur $\mathbb{R}$, et plus précisément l'appellation de « variable aléatoire » puisque c'est, en fait, un espace de probabilité qui est introduit, l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, p)$.

Lorsqu'on définit une variable aléatoire X sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, on a besoin tantôt de la « fonction » X, par exemple si on étudie un espace de probabilité très concret auquel il faut constamment se référer, tantôt des « valeurs prises par la fonction », c'est-à-dire de l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$, par exemple dans le cas où on veut étudier de très près une certaine « loi de Gauss ». L'abus de langage qui consiste à assimiler la « fonction » et les valeurs prises par « la fonction » est donc une nécessité.

On pourra voir encore dans les deux exemples qui suivent une justification de cet abus de langage dans le fait que ces deux notions « fonction » et « valeurs prises par la fonction » sont intimement et fructueusement mêlées.

En effet, on utilise cet abus de langage lorsqu'on introduit la fonction densité f; car il s'agit d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, et on a tout intérêt à voir dans cet ensemble $\mathbb{R}$ celui introduit dans l'espace de probabilité $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$, ce qu'on fait lorsqu'on parle de répartition de masse. Mais f est aussi la dérivée d'une fonction F rigoureusement définie par

$$F(x) = p(\overset{-1}{X}(-\infty, x[)$$

donc rigoureusement définie à partir de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ et de la fonction X.

Si on considère maintenant le jeu de dé, parler de l'épreuve « j'obtiens 2 » c'est à la fois introduire l'espace des épreuves et la variable aléatoire prenant les valeurs réelles 1, 2, 3, 4, 5 ou 6; on est de nouveau en plein abus de langage.

Il ne faut pas se cacher que l'assimilation de cet abus de langage par celui qui s'initie aux probabilités ne se fait pas sans difficulté. Je n'en veux pour preuve que les réticences du débutant devant la notation

$$p(X < x).$$

Ce dernier, rebuté par une telle notation, exige « de la rigueur » alors qu'on veut le conduire par l'usage de cette notation à un abus de langage dépassant et enrichissant cette rigueur.

Résultat fondamental et conséquences.

L'analyse de l'abus de langage au sujet de la notion de fonction à travers ces trois exemples pourrait être entreprise sur d'autres exemples, et gagnerait certainement à être approfondie; mais il semble bien que dans ce cas un travail en commun avec des spécialistes de linguistique soit indispensable. Ce travail nous conduirait certainement à analyser d'autres abus de langage : le « moins », la notion d'« angle», etc...

Je veux maintenant, quitte à me répéter, dégager d'une part, ce qui me paraît fondamental à travers ces éléments d'analyse et d'autre part, essayer de mettre en évidence quelques conséquences pédagogiques.

Résultat fondamental. Un abus de langage en mathématique semble apparaître au bout de trois étapes liées dialectiquement entre elles : une étape « confusion », une étape « rigueur », une étape « abus de langage », ces trois étapes n'étant pas nécessairement consécutives et distinctes dans le temps. C'est uniquement lorsque ces trois étapes ont été franchies que la notion mathématique a acquis momentanément toute sa puissance.

Quelles sont les conséquences pédagogiques?

Au niveau de l'enseignement, il arrive souvent que l'élève soit à l'une des trois étapes tandis que le maître en est à une autre. On conçoit, en général, comme seule possibilité celle d'un élève à l'étape « confusion » et d'un maître à l'étape « rigueur » alors que le cas d'un élève à l'étape « rigueur » et d'un maître à l'étape « abus de langage » est tout aussi fréquent, sans parler des cas où le maître n'a plus la possibilité de dominer la situation. On réalise alors parfaitement l'aspect dialectique de ces étapes puisque en l'occurrence leurs contradictions peuvent se traduire par des affrontements très concrets.

Actuellement, dans le « secondaire », c'est l'étape « rigueur » qui domine, du moins au niveau des maîtres, d'où l'importance quelquefois excessive donnée à la logique, à l'algèbre et d'une manière générale à l'axiomatique.

La méconnaissance de ces trois étapes liées dialectiquement joue aussi un rôle important dans les affrontements entre les mathématiciens et les autres scientifiques (physiciens, chimistes, biologistes, botanistes...), affrontements très réels il va sans dire (il suffit de regarder ce qui se passe entre les enseignants des premiers cycles des Facultés des Sciences) et qui proviennent principalement du fait que les mathématiciens privilégient souvent l'étape « rigueur », tandis que les autres scientifiques privilégient plutôt l'étape « abus de langage » (en admettant que tous, à un certain niveau scientifique, dépassent très vite l'étape « confusion »). Dans un travail pluridisciplinaire, on devra donc être très attentif à la dialectique de ces trois étapes.

En définitive, le danger pédagogique, et je parle là des rapports entre enseignants et enseignés, aussi bien qu'entre chercheurs scientifiques de disciplines différentes n'est pas dans l'importance qu'on peut donner à un certain moment à une étape, mais dans l'annulation de la liaison dialectique entre ces trois étapes.