Bulletin de l'APMEP n°275-276 - Automne 1970

L'évolution des modèles mathématiques en mécanique et en physique

J. M. SOURIAU (*Faculté des Sciences* d'Aix-Marseille)

Depuis l'antiquité grecque jusqu'à la fin du XIX^{e} siècle, l'histoire de la physique a pu se décrire comme une succession de découvertes venant peu à peu s'ajouter les unes aux autres.

En deux millénaires, la pensée philosophique et la méthode expérimentale, se relayant, ont progressivement montré que la Nature se conforme à des Lois, que ces lois sont éternelles, et qu'elles se formulent dans le langage des Mathématiques.

Ainsi Aristote avait découvert les lois de la logique; Euclide celles de l'Espace; après la coupure du Moyen Age, Newton avait découvert les lois de la Mécanique; bien des découvertes ultérieures s'étaient résumées dans la synthèse prodigieuse de Maxwell, donnant leur formulation définitive aux lois de l'Électricité, du Magnétisme et de l'Optique.

Ces équations de Maxwell, mathématiques par essence, constituent le seul lien intelligible entre les concepts de l'électro-magnétisme et ceux de l'optique; bien plus, elles démontrent que ces *concepts* différents recouvrent une *structure* unique; on sait que cette découverte purement intellectuelle devait être triomphalement confirmée par l'émission et la réception des ondes de radio.

Ainsi, il y a un siècle, la Mathématique s'affirmait comme la reine des sciences; non seulement parce qu'elle constituait le langage même de la nature; mais aussi parce qu'elle assurait la *stabilité* définitive des découvertes scientifiques; la géométrie d'Euclide, par exemple, est un édifice immuable, alors que toute doctrine philosophique est sujette à une perpétuelle révision.

***

Quelques esprits pénétrants — et subversifs — avaient pourtant compris que cette solidité même de la science n'était en réalité que de la raideur, et qu'il était possible de s'en dégager.

Ainsi, par simple nécessité éthique, certains avaient construit des variantes sacrilèges de la géométrie d'Euclide — ce qu'on appelait les « géométries non-euclidiennes ». Mais la plupart des savants considéraient ces recherches comme de simples curiosités mathématiques; il s'écoula un demi-siècle avant que se produise une véritable *mue* de la physique; ce n'est que dans les années 1900 que la science fut obligée de rejeter sa carapace et d'entrer dans une période d'aventure — tout comme un simple crustacé qui veut grandir.

Cette opération ne se fit pas sans douleur; il est fort instructif à ce sujet d'observer l'accueil qui fut fait à la théorie de la relativité; accueil enthousiaste de ceux qui y découvriraient la solution d'énigmes irritantes; accueil horrifié de ceux qui n'y voyaient que paradoxes et négations. De nos jours encore, des autodidactes et des polytechniciens retraités publient à compte d'auteur des réfutations d'Einstein — sans s'émouvoir d'un demi-siècle d'utilisation pratique de la relativité.

Ce sentiment d'horreur n'est pas complètement injustifié; effectivement, il est impossible d'admettre la théorie de la relativité sans détruire une partie de l'édifice antérieur de la science.

*
* *

Nous connaissons aujourd'hui le bilan exact de cette destruction : le concept de *loi* a disparu; il a été remplacé par le concept de *modèle*.

*
* *

Ainsi, pour le physicien de 1970, la mécanique de Newton et celle d'Einstein ne sont pas en contradiction : ce sont des *modèles* différents, que l'on utilise alternativement, selon la catégorie de phénomènes que l'on veut étudier.

Le rôle des mathématiques en physique s'est donc diversifié et nuancé : on ne leur demande plus de « décrire les lois de la nature », mais d'assurer la cohérence logique et la puissance déductive de chacun des modèles qui servent à étudier la nature.

Beaucoup de physiciens croient, aujourd'hui, que cette quête des *modèles* est *essentiellement infinie* — aucun des modèles possibles ne pouvant prétendre, à lui seul, à une description parfaite de la nature.

Dans une telle perspective, le progrès de la science ne peut plus être linéaire, chaque découverte venant s'ajouter simplement aux précédentes; il emprunte nécessairement une démarche *dialectique*, que nous allons décrire schématiquement.

Chaque fois que les champs d'application de deux modèles différents A et B se recoupent, le physicien est tenu d'analyser les rapports de chaque modèle avec l'expérience, avec suffisamment de finesse pour les promouvoir au plan des théories, ce qui doit permettre d'établir une *correspondance* entre les modèles A et B.

La nature de cette correspondance mérite d'être méditée : il peut s'agir d'un simple *isomorphisme*, partiel en général; dans ce cas les deux modèles pourront se *raccorder* (parfois au prix d'un changement de formulation pour l'un ou l'autre, qu'il faut d'ailleurs découvrir); ils seront alors englobés dans un modèle unique C.

Mais ce n'est pas toujours le cas; sinon la fusion successive des différents modèles aboutirait à une physique unique, limite inductive des différents modèles; et c'est justement ce que la nature semble nous refuser.

Il y a donc des cas où l'on se trouve dans une situation *méta-mathématique*: le dialogue entre A et B n'est pas de nature mathématique, puisque la contradiction logique entre A et B est irréductible; et pourtant A et B sont chacun une construction purement mathématique.

Cette situation peut sembler intolérable à un mathématicien pur; mais elle est le lot obligé du physicien théoricien.

Cet état de crise logique n'est d'ailleurs qu'un stade du progrès des connaissances; il prend fin lorsque quelqu'un a imaginé un modèle synthétique X, permettant de décrire la Nature aussi bien que A et B dans leurs domaines respectifs d'application; on peut alors renvoyer A comme B dans les limbes de l'histoire des sciences, et prendre X comme nouveau point de départ.

C'est donc l'*imagination créatrice* qui permet de résoudre les contradictions successives de la physique théorique; elle ne suffit d'ailleurs pas : il est nécessaire que l'ensemble des physiciens accepte de renoncer aux modèles antérieurs, parfois fort vénérables et plongeant des racines dans la culture et les croyances les mieux établies; en tous cas, les spécialistes doivent être moralement prêts à renoncer à des pans entiers de leurs connaissances, parfois à tout ce qui a fait naguère leur renommée personnelle.

Certains peuvent arguer de la valeur pratique — indéniable — des modèles anciens pour continuer à penser et à travailler avec eux; mais ils se coupent alors du courant vivant de la recherche, et ne peuvent plus prétendre diriger ou inspirer les travaux de leurs élèves.

Parfois cette crainte est si forte qu'il se produit un excès contraire sitôt que quelqu'un a ébranlé une théorie explicative, tous l'abandonnent sans l'avoir approfondie suffisamment; il semble que la physique théorique contemporaine souffre beaucoup de son goût excessif pour la mode.

Ces *renoncements* successifs sont l'un des traits les plus caractéristiques du développement scientifique contemporain; ce sont eux qui permettent les progrès les plus spectaculaires des connaissances, car un modèle nouveau a souvent un champ d'application *plus vaste* que ceux dont la crise de compatibilité lui a donné naissance.

Il est impossible d'analyser ici des exemples en détails; rappelons seulement la relation d'Einstein $E = mc^2$; fruit du dialogue entre la mécanique classique et la mécanique relativiste (1905); on sait que cette relation a permis de prévoir l'énergie utilisable dans les réactions nucléaires, et de comprendre pourquoi le Soleil brille.

De même les extraordinaires progrès actuels de l'optique ne sont possibles que parce qu'Einstein, dans la même année 1905, proposait le modèle du *photon*, particule de lumière; modèle qui contraignait à *renoncer* aux équations de Maxwell comme seule explication de l'optique.

A l'heure actuelle, on n'a pas réussi à établir de correspondance satisfaisante entre la mécanique quantique et ce qu'on appelle parfois la théorie classique des champs (et qui contient notamment la relativité générale); c'est une situation d'autant plus irritante que chacun des modèles a recueilli d'innombrables succès théoriques et expérimentaux, et que cette moisson continue aujourd'hui. Les espoirs de synthèse que l'on attendait de la « théorie quantique des champs », fondée il y a plus de trente ans, sont devenus bien minces, malgré de brillants succès passagers. On peut espérer que la résolution du problème dialectique ainsi posé permettra de sortir de l'impasse où la physique théorique est enfermée aujourd'hui; peut-être même d'expliquer les phénomènes prodigieux dont les astrophysiciens sont actuellement les témoins dans notre galaxie et au-delà (pulsars, quasars, explosions galactiques).

La notion de modèle n'est pas seulement un instrument prospectif : elle permet aussi de jeter des regards neufs sur le passé.

En effet, si le développement linéaire de la science est impossible à l'heure actuelle, c'est qu'il l'a toujours été; la croyance régnant le plus communément il y a un siècle était donc une illusion, plaquée sur l'histoire réelle des sciences pour éviter d'y voir des situations apparemment inadmissibles.

Or l'enseignement d'aujourd'hui reflète très souvent des croyances épistémologiques très anciennes; si ces croyances étaient illusoires, le contenu même de notre enseignement doit être révisé.

C'est pourquoi je vais vous proposer quelques exemples d'analyse historique; les conclusions auxquelles je parviendrai sont probablement discutables : je ne les propose que comme thèmes de réflexion. Le jeu est ouvert à tous, et il est fructueux.

Citons un ouvrage apprécié, publié en 1950, l'Histoire de la Mécanique de René Dugas. Il commence par ces lignes :

> « Toute histoire de la mécanique, faute sans doute de pouvoir remonter plus avant, commence à Aristote (384-322 avant J.-C.). »

L'auteur ne fait donc aucune allusion au plus remarquable des *modèles* de la mécanique, qui est antérieur à Aristote : c'est le *modèle atomique*, élaboré par Démocrite (né vers 460 avant J.-C. à Abdère, au nord de la mer Égée) et probablement par d'autres « atomistes » de la même école, tels que Leucippe de Milet.

Les fragments de Démocrite qui nous sont parvenus sont fort clairs; pour lui, les atomes sont les constituants ultimes de la matière — infiniment durs et par conséquent impossibles à couper, d'où leur nom; il existe une infinité de type d'atomes; et pour chaque type, une infinité d'exemplaires indiscernables; ce sont les combinaisons de ces atomes entre eux qui sont responsables des apparences sensibles; ce qui se résume en une formule admirable — et parfaitement actuelle : « nous disons chaud, nous disons froid, nous disons sucré, nous disons amer, nous disons couleur; mais il n'existe en réalité que *les atomes et le vide* ».

A condition de traduire le mot « atome » par le mot « particule élémentaire », toutes les affirmations de Démocrite sont valables aujourd'hui, ainsi les physiciens savent que les particules d'un même type sont indiscernables (les conséquences de cette indiscernabilité se vérifient expérimentalement en physique statistique); ils croient que la construction de grands accélérateurs permettra de découvrir de nouveaux types de particules, sans que l'on puisse assigner une limite à ces découvertes.

Il ne faudrait pas pour autant oublier que les atomes ne sont que l'un des aspects du modèle de Démocrite; l'autre est le *vide*, dans lequel les atomes ont un mouvement perpétuel; « vide infini où il n'y a ni haut, ni bas, ni milieu, ni extrémité » écrit Démocrite.

Toutes ces caractéristiques négatives du vide sont évidemment une mise en garde contre le sens commun et contre d'autres opinions de l'époque; mise en garde qui n'a pas empêché d'ailleurs le triomphe durable de la réaction qui s'exprime avec force dans l'œuvre d'Aristote. Rappelons simplement que, pour Aristote, tout mouvement est destiné à s'arrêter; qu'il existe des « lieux naturels » pour toutes choses, le bas pour les corps pesants, le haut pour les corps subtils; que l'univers est fini et la matière indéfiniment divisible; *etc.*

Cependant, l'affirmation de Démocrite selon laquelle le vide n'a ni haut, ni bas, ni milieu, ni extrémité peut aussi nous apparaître comme une préfiguration des concepts modernes d'*isotropie* et d'*homogénéité* : puisqu'il n'y a ni haut, ni bas, l'espace vide peut se retourner sans cesser d'être semblable à lui-même; de même, puisqu'il n'a pas de milieu, une translation ne l'altère pas. Ce sont ces idées qui seront exploitées par les géomètres grecs, avec le succès que l'on sait, et qui aboutiront aux Éléments d'Euclide. Idées qui ont conduit beaucoup plus tard à la classification des géométries par Félix Klein dans son « programme d'Erlangen » (1872) au moyen d'un *groupe* quelconque opérant sur un *ensemble*; ainsi se généralise le rôle du *groupe des déplacements* euclidiens opérant sur l'*espace* classique.

Nous savons aujourd'hui que la géométrie d'Euclide n'est qu'un modèle; mais c'est le « modèle des modèles », puisque c'est son imitation qui a permis l'élaboration des concepts unificateurs de la mathématique et de la physique d'aujourd'hui; notamment la *théorie des groupes* et, plus généralement, la notion de *morphisme* qui permet enfin de dire avec précision ce que l'on entend par une « structure » mathématique (précision qui semble encore échapper au « structuralisme » tel qu'il est conçu dans les sciences humaines).

Notons un autre aspect caractéristique des modèles mathématiques qui est en évidence dans le cas de la géométrie d'Euclide; le caractère paradoxal, provocant, des simplifications qu'ils comportent.

Alors que l'espace d'Aristote était un tissu compliqué, comportant à la fois des morceaux continus et des points — définis d'ailleurs comme frontières de régions continues — l'espace d'Euclide est simplement un ensemble de points — le premier ensemble, probablement, qui ait été considéré pour lui-même. C'est cette simplicité de structure qui est choquante : les problèmes ardus posés par la définition directe d'un point, par la possibilité de « remplir » l'espace par des points sans dimension, n'ont évidemment pas échappé aux géomètres grecs; mais ils les négligent allègrement — prouvant par le succès de la géométrie que ces problèmes sont effectivement négligeables ou, en tous cas, qu'on peut les remettre à plus tard; c'est en effet beaucoup plus tard que les problèmes du continu furent résolus, par la construction des nombres réels, œuvre du XIX^{e} siècle.

L'accord profond des géomètres et des atomistes est évident : Aristote, pour qui la matière était infiniment divisible, ne pouvait concevoir que l'espace soit « composé » de points, atomes d'espace, eux-mêmes indivisibles.

Or, les connaissances que nous avons aujourd'hui de la psychologie de l'enfant, notamment grâce aux travaux de Piaget et de son école, permettent de penser que l'*audace* des simplifications euclidiennes est un obstacle important à la compréhension de la géométrie : peut-être est-il nécessaire de ménager des transitions entre un stade « aristotélicien » de la pensée de l'enfant et un stade « euclidien » auquel nous voulons l'amener.

⁂

C'est évidemment une naïveté de dire que les outils de pensée dont nous disposons aujourd'hui auraient permis à la science classique de progresser beaucoup plus rapidement qu'elle ne l'a fait; mais certaines circonstances historiques donnent tellement l'impression d'avoir été des *occasions manquées* qu'il est tentant d'essayer de deviner comment les sciences auraient évolué si, certain jour, un simple effort d'imagination créatrice avait permis un progrès décisif qui ne devait avoir lieu, dans la réalité, que beaucoup plus tard.

Je voudrais citer un exemple; non pour le simple plaisir de faire de l' « épistémologie-fiction », mais parce que les progrès qui n'ont pas eu lieu dans l'*histoire* des sciences peuvent encore être faits dans l'*enseignement* des sciences.

Le but déclaré de Newton était d'édifier une mécanique qui soit une véritable géométrie globale de l'espace et du temps. Citons-le :

> « La géométrie n'est autre chose qu'une branche de la Mécanique universelle qui traite et qui démontre l'art de mesurer » ... « les artisans ont coutume d'opérer peu exactement, de là est venu qu'on a tellement distingué la Mécanique de la Géométrie, que tout ce qui est exact s'est rapporté à celle-ci, et ce qui l'était moins à la première » ... « nous qui avons pour objet, non les Arts, mais l'avancement de la Philosophie, nous proposons ce que nous donnons ici comme les principes mathématiques de la philosophie naturelle. » (Préface de la première édition des « philosophiæ naturalis principia mathematica », 8 mai 1686.)

Le programme de Newton n'a été réalisé complétement que plusieurs siècles plus tard; contrairement à une opinion répandue, il était possible de le faire par des moyens entièrement classiques — sans faire appel à la relativité d'Einstein.

Il suffit en effet de considérer le *produit cartésien* de l'espace et du temps, c'est-à-dire l'ensemble des couples $(\vec{r}, t)$, $\vec{r}$ étant un point de l'espace, t une date; puis d'étudier les permutations de cet ensemble espace-temps qui sont données par la formule :

$$(\vec{r}, t) \mapsto (D(\vec{r})+\vec{v}t,\ t+h)$$

D étant un *déplacement euclidien*, $\vec{v}$ une *vitesse*, h une *durée*.

Ces permutations s'appellent aujourd'hui — à juste titre — les *transformations de Galilée*; c'est un exercice élémentaire de vérifier qu'elles constituent un groupe, le *groupe de Galilée*; la *géométrie galiléenne* est l'étude des propriétés invariantes par les transformations du groupe.

Il se trouve que la relation fondamentale de Newton $\vec{f} = m\vec{\gamma}$ est invariante par les transformations de Galilée; ce qui laisse à penser que toute la mécanique classique possède cette invariance; en d'autres termes que la *mécanique classique peut se formuler dans le langage de la géométrie galiléenne*.

C'est cette hypothèse que Poincaré appelait le « principe de relativité », et que l'on nomme aujourd'hui « principe de relativité galiléenne », pour éviter toute confusion avec la théorie d'Einstein.

En géométrie galiléenne, un mobile en repos et un mobile en mouvement rectiligne uniforme constituent des *figures égales*; ce qui est implicitement contenu dans le *principe de l'inertie*, formulé par Galilée, qui donne justement le même *statut physique* au repos et au mouvement rectiligne uniforme.

L'espace au repos est donc une notion *pré-galiléenne*, à laquelle il faut renoncer. Il n'est pas sûr que les scientifiques d'aujourd'hui en aient tous conscience; en tous cas Newton n'a pas pu s'y résoudre, malgré l'embarras que trahit l'énoncé même de ses « définitions », il écrit tantôt « l'espace absolu... demeure toujours similaire et immobile » et tantôt « il faut avouer qu'il est très difficile de connaître les mouvements vrais de chaque corps... parce que les parties de l'espace immobile ne tombent pas sous nos sens » ... « il peut se faire qu'il n'y ait aucun corps véritablement en repos ».

Par d'autres écrits, nous connaissons les causes de la répugnance de Newton à accepter la relativité galiléenne; elles sont pour l'essentiel théologiques; elles tiennent aussi, probablement, au caractère systématique de son opposition à Descartes qui, sur ce point particulier, avait une conception plus moderne.

Bien entendu, l'adoption de la géométrie galiléenne aurait tué dans l'œuf la *théorie de l'éther* qui a fait perdre tant de temps à la physique; curieusement, Newton lui-même met en garde, très sèchement, son lecteur : « je ne fais point attention ici au milieu qui passe librement entre les parties des corps, supposé qu'un tel milieu existe ». Il est vrai que l'éther faisait partie de l'arsenal cartésien...

De même, cette géométrie galiléenne aurait évité la venue au monde de notions qui encombrent encore les traités de mécanique analytique, et qui sont aussi anachroniques que l'éther : « espace de configuration », « espace de phases » par exemple. On sait aujourd'hui comment renoncer à ces vieilleries; les nouveaux modèles qui les remplacent sont mieux structurés mathématiquement, et permettent une interprétation beaucoup plus directe de l'expérience.

Ils permettent aussi de donner corps à une très vieille ambition des philosophes, que nous allons évoquer rapidement.

Pour Démocrite, il n'était pas question de *prévoir* les différents *types* d'atomes — ceux-ci étant déterminés par la nature selon des lois imprévisibles. Cependant un prédécesseur de Démocrite s'était hasardé à une telle prédiction : il s'agit du Sicilien Empédocle, auteur probable de la théorie des *quatre éléments* (terre, air, feu, eau), constituants supposés de toute matière. Le choix du nombre quatre, qui nous semble arbitraire, était probablement rattaché à des considérations géométriques; nous lisons en effet dans Platon (*Le Timée*) que ces éléments se rattachent chacun à l'un des polyèdres réguliers connus (cube, octaèdre, tétraèdre, icosaèdre); la découverte d'un cinquième polyèdre (le dodécaèdre) fit aussitôt imaginer un cinquième élément, qui apparaît déjà dans Platon et Aristote, et qui eut une belle carrière médiévale sous le nom de *quinte essence*.

Il apparaît là une volonté manifeste de prévoir les propriétés de la matière à partir des propriétés géométriques de l'espace vide; d'établir, en un sens, une *dialectique du vide et de la matière*.

Remarquons que cette dialectique rêvée met en jeu, implicitement, le *groupe des rotations* de l'espace : en effet l'existence des polyèdres réguliers est liée à l'existence des sous-groupes finis non commutatifs de ce groupe.

Or les conceptions modernes de la mécanique théorique permettent de réaliser un programme analogue; la possibilité de faire opérer le groupe de Galilée sur l'espace des mouvements d'un système matériel permet, par un jeu assez subtil, de prévoir l'existence des grandeurs caractéristiques de la matière : énergie, impulsion, moment cinétique, centre de gravité, masse; cette méthode permet aussi de *classer* les particules élémentaires, au moyen de leur masse et de leur *spin*; rappelons combien l'existence du spin de l'électron a semblé paradoxale lors de sa découverte en 1927 : on l'interprétait comme un mouvement de rotation de l'électron sur lui-même, mouvement dont aucune action extérieure ne pouvait modifier l'intensité; nous voyons maintenant que cette propriété était prévisible par une analyse correcte des principes de la mécanique classique.

Notons au passage que la situation n'est guère modifiée si l'on passe de la mécanique classique à la mécanique relativiste (il suffit de changer de groupe); mais de nouveaux types de particules apparaissent; en particulier des particules de masse nulle, se mouvant à la vitesse de la lumière, pourvues de spin, ainsi que d'une propriété nouvelle, *l'hélicité* qui leur confère une orientation spatiale; il se trouve que cette description convient parfaitement aux photons, les atomes de lumière découverts par Einstein (ils sont polarisés à droite ou à gauche selon leur hélicité); ainsi l'optique peut-elle entrer dans le cadre de la mécanique, selon le vœu de Newton.

Enfin, et surtout, la géométrie galiléenne, si elle avait été comprise assez tôt, aurait permis de chasser bien des idées fausses qui encombrent encore le langage et la pensée du grand public et même des scientifiques; combien soupçonnent aujourd'hui que les notions de *trajectoire* d'un mobile, de *vitesse* d'un corps dans l'espace, de *distance parcourue* par une fusée sont des notions *pré-galiléennes* auxquelles il est rigoureusement impossible d'attacher une signification précise, à moins de considérer comme un dogme la référence à la Terre immobile?

Il serait peut-être temps, au bout de 400 ans, que les concepts issus de la pensée de Galilée fussent effectivement enseignés dans les lycées et les universités. Cet effort présenterait divers avantages : permettre aux futurs physiciens un accès plus commode aux théories actuelles; rendre chacun apte à comprendre la mécanique spatiale, qui est maintenant une donnée immédiate de la culture; permettre au public de comprendre, sur un exemple essentiel, l'un des traits caractéristiques de la pensée scientifique actuelle.

J.-M. SOURIAU.