

Étude élémentaire de la circulation d'une file de voitures

P. L. HENNEQUIN,

Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand

1. Freinage d'un véhicule.

Nous supposons qu'un véhicule de masse m , roulant à une vitesse v sur une route rectiligne et horizontale est soumis, en cas de freinage, à une force opposée à son mouvement, d'intensité

$$mF(v) = m(a + bv + cv^2)$$

aux vitesses usuelles le terme prépondérant est a ; les autres termes sont dus à la résistance de l'air et des roulements, et au « frein moteur ».

Il est intéressant de discuter suivant la valeur des paramètres $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, comment varie en fonction de v_0 , la distance de freinage d , nécessaire pour arrêter un véhicule de vitesse v_0 .

On a

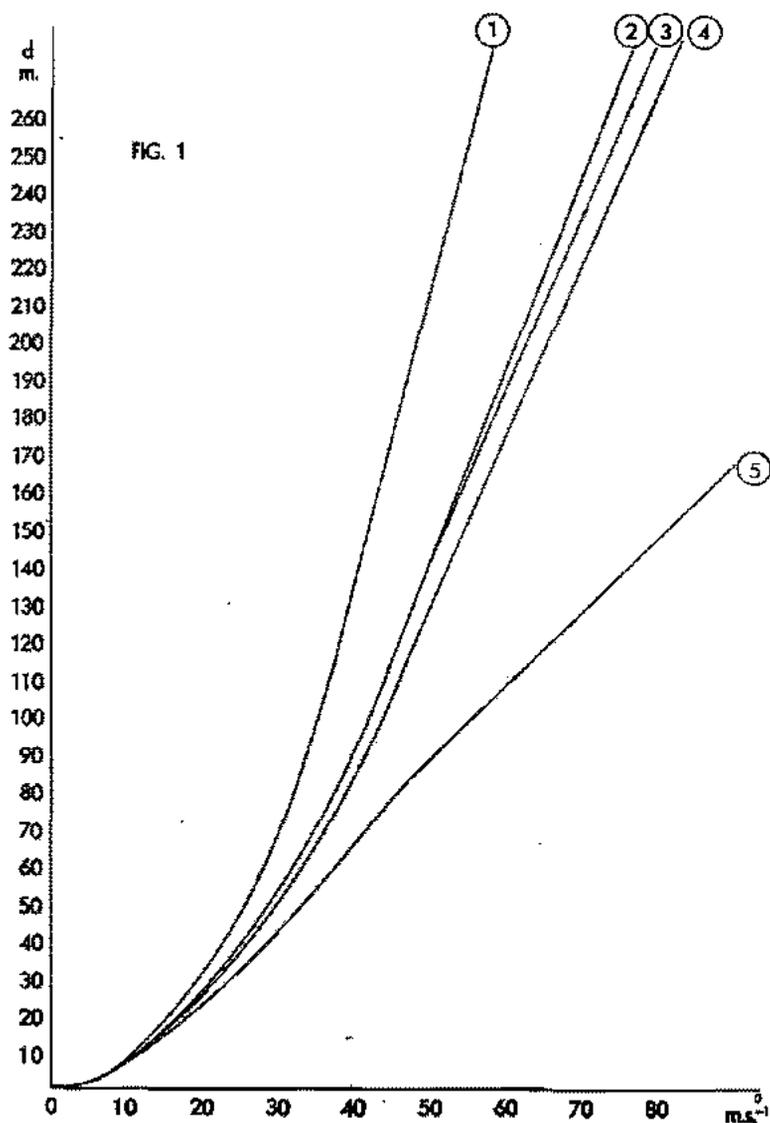
$$- \frac{dv}{dt} = F(v) \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = v$$

d'où

$$\frac{dv}{dx} = - \frac{F(v)}{v} \quad \text{et} \quad d = \int_0^{v_0} \frac{v dv}{F(v)} \quad (1)$$

a) $a > 0$, $b = c = 0$; on a alors $d = \frac{v_0^2}{2a}$; c'est la formule généralement admise avec $a \approx 6 \text{ m.s}^{-2}$ sur route sèche et $a \approx 3 \text{ m.s}^{-2}$ sur route mouillée. Le graphe de d est un arc de parabole (cf. fig. 1, ⊕, avec $a = 6$).

b) $a > 0$, $b > 0$, $c = 0$; $d = \frac{v_0}{b} - \frac{a}{b^2} \text{Log} \left(1 + \frac{bv_0}{a} \right)$. Quand $v_0 \rightarrow 0$, $d \sim \frac{v_0^2}{2a}$ mais le graphe de d présente une branche parabolique de coefficient directeur asymptotique $\frac{1}{b}$ (cf. fig. 1, ⊕, avec $b = 0,1 \text{ s}^{-1}$).



c) $a > 0$, $c > 0$, $b^2 - 4ac > 0$. Soient v_1 et v_2 les deux racines (négatives) de l'équation $a + bv + cv^2 = 0$; on a :

$$d = \frac{1}{c(v_1 - v_2)} \left[v_1 \operatorname{Log} \left(1 - \frac{v_0}{v_1} \right) - v_2 \operatorname{Log} \left(1 - \frac{v_0}{v_2} \right) \right].$$

On vérifie encore que $d \sim \frac{v_0^2}{2a}$ quand $v_0 \rightarrow 0$. La branche parabolique a

cette fois pour direction asymptotique celle de l'axe des vitesses (cf. fig. 1, \textcircled{D} , avec $c = 0,0001 \text{ m}^{-1}$).

d) $a > 0$, $c > 0$, $b^2 - 4ac = 0$; si l'on pose $v_1 = -\frac{b}{2c}$, on trouve

$$d = \frac{1}{c} \operatorname{Log} \left(1 - \frac{v_0}{v_1} \right) - \frac{1}{c} \frac{v_0}{v_0 - v_1}$$

(cf. fig. 1, \textcircled{D} avec $c = 0,000417 \text{ m}^{-1}$).

e) $a > 0$, $c > 0$, $b^2 - 4ac < 0$. Si l'on pose $\lambda = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2c}$, on trouve

$$d = \frac{1}{2c} \operatorname{Log} \frac{a + bv_0 + cv_0^2}{a} - \frac{b}{2c\lambda} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{2c\lambda v_0}{2a + bv_0}$$

(cf. fig. 1, \textcircled{D} , avec $c = 0,005 \text{ m}^{-1}$).

Les conclusions de e) pour le comportement de d quand $v_0 \rightarrow 0$ et pour la branche infinie restent valables. En particulier pour $v_0 < 30 \text{ m s}^{-1}$, l'influence de b et c est négligeable; nous supposons donc dans les paragraphes suivants $b = c = 0$.

2. Distance minimale entre deux véhicules.

Considérons maintenant, toujours sur une route rectiligne et horizontale, deux véhicules analogues roulant l'un derrière l'autre. Appelons distance de ces deux véhicules la distance qui sépare leurs pare-chocs avant. A quelle distance du premier doit rouler le second pour éviter une collision si celui-là vient à freiner? Notons l la longueur du premier véhicule et τ le temps qui s'écoule entre l'instant où un conducteur perçoit la nécessité de freiner et l'instant où les freins commencent à agir : τ est le temps de réaction de l'ensemble conducteur-véhicule à un stimulus visuel ou sonore.

Supposons que, jusqu'à l'instant $t = 0$ les deux véhicules sont tous deux en mouvement rectiligne uniforme de même vitesse v , et que, à l'instant $t = 0$, le premier véhicule, alors à l'abscisse 0, commence à freiner avec une accélération uniforme $-a_1$; il s'arrête donc à l'abscisse $\frac{v^2}{2a_1}$, à l'instant $\frac{v}{a_1}$.

L'équation horaire de son mouvement est donc pour $0 < t < \frac{v}{a_1}$,

$$x_1(t) = vt - \frac{a_1 t^2}{2}.$$

Soit $x_2(0) < 0$, l'abscisse du second véhicule à $t = 0$; celui-ci poursuit un mouvement de vitesse v jusqu'à l'instant $t = \tau$ puis ensuite un mouvement d'accélération uniforme $-a_2$ jusqu'à $t = \tau + \frac{v}{a_2}$:

$$x_2(t) = \begin{cases} x_2(0) + vt, & 0 < t < \tau, \\ x_2(0) + v\tau - \frac{a_2(t-\tau)^2}{2}, & \tau < t < \tau + \frac{v}{a_2}. \end{cases}$$

Le choc entre les deux véhicules sera donc évité si l'on a,

$$\text{pour } 0 < t < \sup \left(\frac{v}{a_1}, \tau + \frac{v}{a_2} \right),$$

$$x_2(t) < x_1(t) - l \quad (1)$$

Pour discuter cette condition, il est nécessaire de distinguer trois cas :

Premier cas : $v < \tau$ (basses vitesses)

(1) s'écrit :

$$\begin{cases} x_2(0) < -l - a_1 \frac{t^2}{2}, & 0 < t < \frac{v}{a_1} \\ x_2(0) + vt < -l + \frac{v^2}{2a_1}, & \frac{v}{a_1} < t < \tau \\ x_2(0) + vt - \frac{a_2}{2}(t-\tau)^2 < -l + \frac{v^2}{2a_1}, & \tau < t < \tau + \frac{v}{a_2} \end{cases}$$

qui équivaut à la condition

$$x_2(0) < -l - v\tau + \frac{v^2}{2} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right). \quad (2)$$

Deuxième cas : $\tau < \frac{v}{a_1} < \tau + \frac{v}{a_2}$ (grandes vitesses, $a_1 > a_2$)

(1) s'écrit :

$$\begin{cases} x_2(0) < -l - a_1 \frac{t^2}{2}, & 0 < t < \tau, \\ x_2(0) - a_2 \frac{(t-\tau)^2}{2} < -l - \frac{a_1 t^2}{2}, & \tau < t < \frac{v}{a_1}, \\ x_2(0) + vt - a_2 \frac{(t-\tau)^2}{2} < -l + \frac{v^2}{2a_1}, & \frac{v}{a_1} < t < \tau + \frac{v}{a_2} \end{cases}$$

qui équivaut là encore à la condition (2).

Troisième cas : $\tau + \frac{v}{a_2} < \frac{v}{a_1}$ (grandes vitesses, $a_2 > a_1$).

(1) s'écrit :

$$\begin{aligned} x_2(0) &< -l - \frac{a_1 t^2}{2}, & 0 < t < \tau, \\ x_2(0) - a_2 \frac{(t-\tau)^2}{2} &< -\frac{a_1 t^2}{2} - l, & \tau < t < \tau + \frac{v}{a_2}, \\ x_2(0) + \frac{v^2}{2a_2} &< vt - \frac{a_1 t^2}{2} - l, & \tau + \frac{v}{a_2} < t < \frac{v}{a_1}. \end{aligned}$$

La fonction $t \rightarrow a_2 \frac{(t-\tau)^2}{2} - \frac{a_1 t^2}{2} - l$ passe par un minimum pour $t = \frac{a_2 \tau}{a_2 - a_1}$

et ce minimum est égal à

$$-\frac{\tau^2 \frac{a_2 a_1}{2 a_2 - a_1}}{l}$$

(1) équivaut alors à la condition

$$x_2(0) < -\frac{\tau^2 \frac{a_2 a_1}{2 a_2 - a_1}}{l} \quad (3)$$

On voit que le second membre de (3) ne dépend pas de v .

En pratique, on ne connaît pas exactement a_1 et a_2 qui dépendent de l'état des freins et de la charge des deux véhicules mais on peut supposer que l'on connaît deux constantes A' et A'' (qui dépendent d'ailleurs de l'état de la chaussée) telles que $0 < A' < a_1 < A''$.

Alors

$$\left| \frac{1}{2a_1} - \frac{1}{2a_2} \right| < \frac{1}{2A'} - \frac{1}{2A''} = \alpha.$$

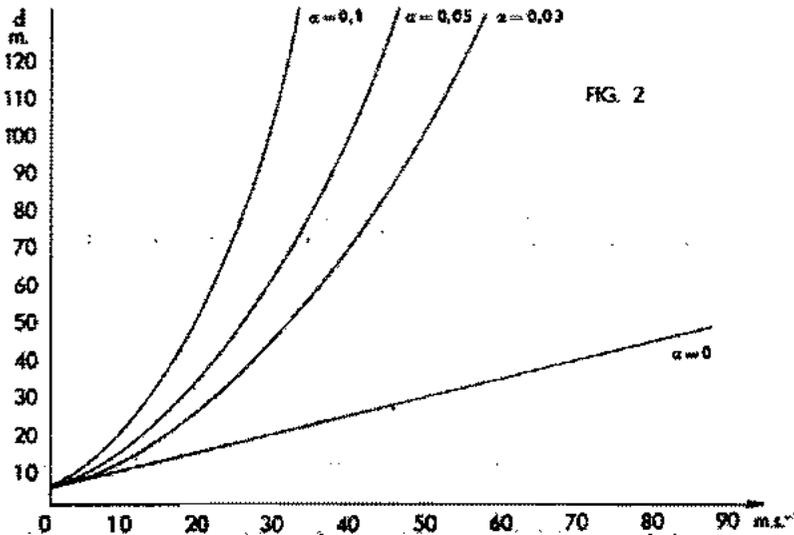
On vérifie que

$$\tau + \frac{v}{a_2} < \frac{v}{a_1} \quad \text{implique} \quad \frac{\tau^2 \frac{a_2 a_1}{2 a_2 - a_1}}{l} < v\tau + v^2 \left(\frac{1}{2a_1} - \frac{1}{2a_2} \right)$$

de sorte que les conditions (2) et (3) sont satisfaites si l'on choisit

$$|x_2(0)| > l + v\tau + v^2 \alpha \quad (4)$$

On a tracé sur la figure 2 les graphes des fonctions $v \rightarrow l + v\tau + v^2 \alpha$ pour $l = 6m$, $\tau = 0,5s$ et les quatre valeurs de α (en $m^{-1} s^2$) : $0(A' = A'')$, $0,03(A' = 5, A'' = 7,15)$, $0,05(A' = 5, A'' = 10)$, $0,1(A' = 2,5, A'' = 5)$.



La deuxième et la troisième correspondent à une route sèche et à une hypothèse pessimiste ou optimiste (la plus prudente) sur l'état des freins du véhicule précédent, la quatrième correspond à une route glissante.

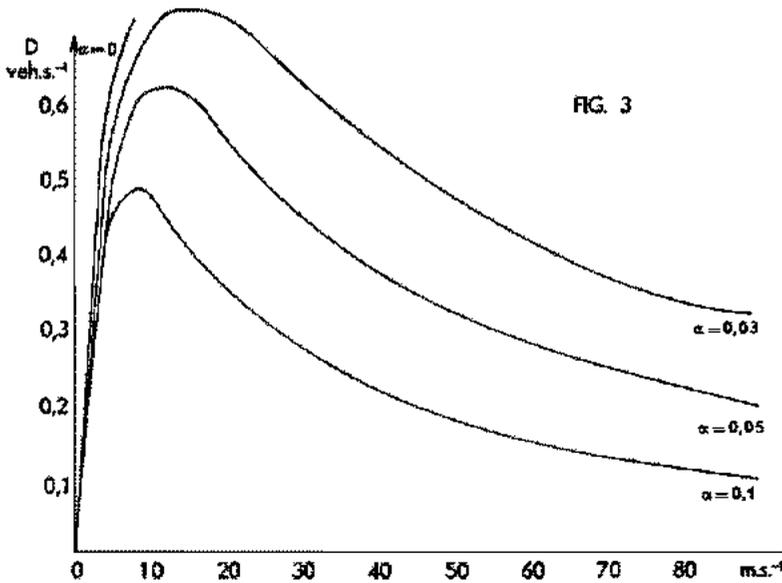
Si l'on considère maintenant une file de voitures de même longueur l , roulant avec la vitesse v à la distance $l + v\tau + v^2\alpha$ les unes des autres, le débit D de la file, sera donné par

$$D = \frac{v}{l + v\tau + v^2\alpha}$$

La fonction $v \rightarrow D$ présente un maximum unique sur R^+ :

$$D_{\max} = \frac{1}{\tau + 2\sqrt{l\alpha}} \quad \text{pour} \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{l}{\alpha}}$$

Nous avons tracé sur la figure 3 le graphe des fonctions D correspondant aux mêmes valeurs numériques que ci-dessus.



On trouvera ci-dessous le tableau donnant les valeurs de D_{\max} et de v_{\max} .

α	0	0,03	0,05	0,1
D_{\max}	2	0,74	0,63	0,49
v_{\max}	∞	14,14	10,95	7,75

On voit que, sauf pour $\alpha = 0$, le débit décroît pour $v > v_{\max}$ contrairement au préjugé selon lequel les grandes vitesses favoriseraient l'écoulement du trafic.

3. Démarrage d'une file de voitures à un feu tricolore.

Supposons maintenant :

a) que la route traverse une agglomération dans laquelle la vitesse soit limitée à $v_L > v_{\max}$ (usuellement $v_L = 16,7 \text{ ms}^{-1}$);

b) que le réseau routier de l'agglomération se limite à deux voies d'égale importance qui se croisent à un carrefour dont l'accès est commandé par un feu tricolore successivement pour chaque voie, vert, orange et rouge pendant des tranches de temps de longueur respective $\theta, \theta', \theta + \theta'$;

c) qu'aucune voiture ne change de direction au carrefour;

d) qu'à l'instant initial $t = 0$, une queue se soit formée devant le feu rouge, d'abscisse $x = 0$, les véhicules étant arrêtés à une distance l les uns des autres, et que le feu passe au vert.

Le premier véhicule prend, à partir de l'instant τ un mouvement d'accélération uniforme γ_1 jusqu'à ce qu'il atteigne la vitesse v_L :

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{pour } 0 < t < \tau, \\ \frac{\gamma_1}{2} (t - \tau)^2, & \tau < t < \frac{v_L}{\gamma_1} + \tau, \\ v_L \left(t - \tau - \frac{v_L}{2\gamma_1} \right), & t > \frac{v_L}{\gamma_1} + \tau. \end{cases}$$

Le second véhicule démarre seulement à l'instant 2τ et à l'abscisse $-l$; s'il prenait la même accélération γ_1 , il roulerait, après avoir atteint la vitesse v_L à une distance $l + v_L\tau$ du premier, inférieure à la distance minimum

$$l + v_L\tau + \frac{v_L^2}{2\alpha}.$$

Pour que cette distance soit respectée, il faut et il suffit, si le mouvement a lieu, jusqu'à ce que la vitesse v_L soit atteinte, avec une accélération γ_2 , que l'on ait :

$$\frac{1}{\gamma_2} > \frac{1}{\gamma_1} + 2\alpha.$$

Choisissons

$$\frac{1}{\gamma_2} = \frac{1}{\gamma_1} + 2\alpha. \quad (5)$$

De même, le $n^{\text{ème}}$ véhicule part à l'instant $n\tau$ et à l'abscisse $-(n-1)l$; pour qu'il ne rencontre pas le véhicule précédent, nous choisirons

$$\frac{1}{\gamma_n} = \frac{1}{\gamma_{n-1}} + 2\alpha = \frac{1}{\gamma_1} + 2(n-1)\alpha. \quad (6)$$

L'équation horaire du mouvement du $n^{\text{ième}}$ véhicule est alors :

$$x_n(t) = \begin{cases} -(n-1)l, & 0 < t < n\tau, \\ -(n-1)l + \frac{\gamma_n}{2}(t-n\tau)^2, & n\tau < t < n\tau + \frac{v_L}{\gamma_n}, \\ -(n-1)l + v_L \left(t - n\tau - \frac{v_L}{2\gamma_n} \right), & t > n\tau + \frac{v_L}{\gamma_n}. \end{cases}$$

La vitesse limite v_L est atteinte à l'instant $n\tau + \frac{v_L}{\gamma_n}$ et à l'abscisse

$$-(n-1)l + \frac{v_L^2}{2\gamma_n} = -(n-1)l + \frac{v_L^2}{2} \left[\frac{1}{\gamma_1} + 2(n-1)\alpha \right]$$

qui est positive pour tout n si $\alpha v_L^2 > l$ ou $v_L > v_{\max}$ ce que nous avons supposé.

Ainsi quand le $n^{\text{ième}}$ véhicule franchit le feu, il a encore l'accélération γ_n . Alors $x_n(t) > 0$ équivaut à $t > n\tau$ et

$$\frac{\gamma_n}{2}(t-n\tau)^2 > (n-1)l \quad (7)$$

ou

$$(t-n\tau)^2 - 2 \left(\frac{1}{\gamma_1} + 2(n-1)\alpha \right) (n-1)l > 0. \quad (8)$$

La courbe d'équation

$$(t-n\tau)^2 - 2 \left(\frac{1}{\gamma_1} + 2(n-1)\alpha \right) (n-1)l = 0 \quad (9)$$

est une hyperbole du plan (t, n) qui passe par le point $t = \tau, n = 1$, qui a pour centre le point de coordonnées

$$t = \left(1 - \frac{1}{4\alpha\gamma_1} \right) \tau$$

$$n = 1 - \frac{1}{4\alpha\gamma_1}$$

et dont les asymptotes ont pour coefficients directeurs les racines de l'équation

$$(1-m\tau)^2 - 4\alpha l m^2 = 0,$$

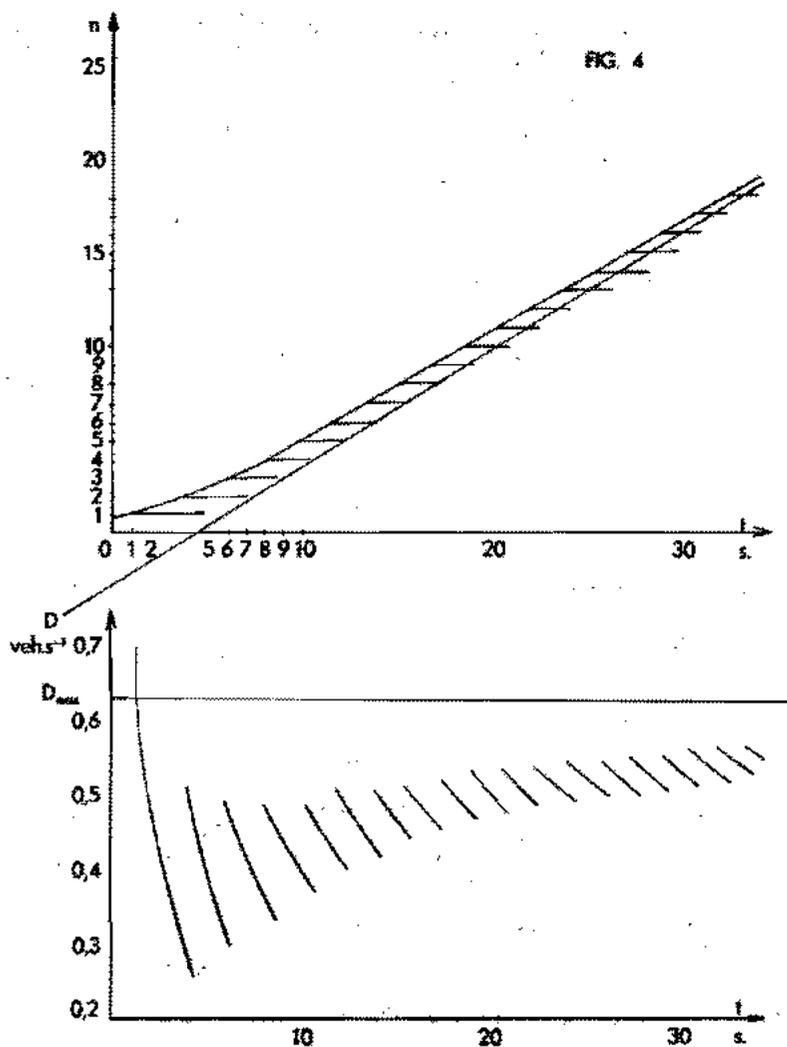
soit

$$m_1 = \frac{1}{\tau + 2\sqrt{\alpha l}} = D_{\max} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{1}{\tau - 2\sqrt{\alpha l}},$$

ce qui permet de la construire.

Sur la partie supérieure de la figure 4, on a tracé un arc de cette hyperbole pour $\alpha = 0,05 \text{ m}^{-1}\text{s}^2, \gamma_1 = 1 \text{ ms}^{-2}$.

Soit $n(t)$ la plus petite racine positive de l'équation (9). Alors (5) équivaut, pour $n > 0$, à $n < n(t)$.



La partie entière de $n(t)$, $[n(t)]$ est donc le nombre de véhicules qui franchissent le feu entre les instants 0 et t . On a porté sur la partie supérieure de la figure (4) les graphes des fonctions $t \rightarrow n(t)$ et $[n(t)]$ pour $t > \tau$.

Le graphe du débit correspondant : $\frac{[n(t)]}{t}$ a été construit dans la partie inférieure de la figure 4. On voit qu'il présente de nombreuses irrégularités. On a intérêt, pour augmenter le débit, à choisir les valeurs de t pour lesquelles $n(t)$ est entier.

$$\text{Quand } t \rightarrow \infty, \quad \frac{[n(t)]}{t} \rightarrow m_1 = D_{\max}$$

si le feu reste assez longtemps au vert, le débit (correspondant à la période où le feu reste vert) est voisin du débit maximum; on a donc intérêt à choisir θ assez grand les jours de grand trafic.

Remarquons que $\frac{[n(t)]}{t}$ donne un exemple de fonction qui tend vers sa limite par valeur inférieure mais de façon non monotone.

4. Passage du feu du vert au rouge.

Choisissons θ et n de façon que $x_n(\theta + \tau) = 0$: le $n^{\text{ème}}$ véhicule arrive devant le feu à l'instant $\theta + \tau$; le feu est déjà orange mais le conducteur n'a pas eu le temps de réagir et franchit le feu (c'est le rôle du feu orange de le lui permettre).

On a

$$0 = x_n(\theta + \tau) = -(n-1)l + \frac{\gamma_n}{2} (\theta - (n-1)\tau)^2$$

et la vitesse du $n^{\text{ème}}$ véhicule est égale à

$$v_n = \gamma_n(\theta - (n-1)\tau) = \sqrt{2(n-1)l\gamma_n} = \sqrt{\frac{2(n-1)l\gamma_1}{1+2(n-1)\alpha\gamma_1}}$$

qui tend vers $\sqrt{\frac{l}{\alpha}} = v_{\max}$ quand $n \rightarrow \infty$.

Soit L la largeur de la chaussée transversale protégée par le feu, le temps mis pour la traverser est $\approx \frac{L+l}{v_n}$ et on doit avoir $\theta' > \frac{L+l}{v_n}$, afin qu'à l'instant $\theta + \theta' + \tau$ où un véhicule démarre sur la voie transversale celle-ci soit dégagée (on admet qu'il n'y a pas de piétons).

Avec les valeurs numériques précédentes, pour $\theta = 36,8$ s, on trouve $n = 21$, $\gamma_n = \frac{1}{3} \text{ ms}^{-2}$, $v_n = 8,9 \text{ ms}^{-1}$ et, si $L = 12$ m, $\theta' > 2$ s.

Le conducteur du $(n+1)^{\text{ème}}$ véhicule voit le feu devenir orange à l'instant θ et commence à freiner à l'instant $\theta + \tau$; son abscisse est alors :

$$\begin{aligned} x_{n+1}(\theta + \tau) &= -nl + \frac{\gamma_{n+1}}{2} (\theta - n\tau)^2 = -l - \frac{2\alpha\gamma_1(n-1)l}{1+2n\alpha\gamma_1} \\ &= \gamma_{n+1}\tau \sqrt{\frac{2(n-1)l}{\gamma_n}} + \gamma_{n+1} \frac{\tau^2}{2} \end{aligned}$$

elle est voisine de $-2l$ pour n grand, tandis que sa vitesse est égale à

$$v_{n+1}(\theta + \tau) = \gamma_{n+1}(\theta - n\tau) < v_{\max}.$$

Avec les valeurs numériques ci-dessus, on trouve

$$x_{n+1}(\theta + \tau) = -14,5 \text{ m} \quad \text{et} \quad v_{n+1}(\theta + \tau) = 8,5 \text{ s.}$$

Il résulte du § 1 que l'arrêt avant le feu est possible; on peut donc choisir

$$\theta' = \frac{L+l}{v_n}$$

Ainsi le nombre des véhicules qui ont franchi le feu entre les instants θ et $2(\theta+\theta')$ est n et le débit correspondant est $\frac{[n(\theta+\tau)]}{2(\theta+\theta')}$.

Avec les valeurs numériques ci-dessus, on trouve un débit de 0,27 véhicule par seconde, soit, d'après la figure 3 le même débit que sur une route avec une vitesse de 62 ms^{-1} . C'est ce qui explique le fait qu'une file de voitures puisse rouler de façon relativement fluide et rapide sur la route et s'agglutiner dans une agglomération, une queue de 1 000 véhicules soit environ 6 km mettant à peu près une heure pour s'écouler.

On peut préciser comment s'arrêtent les véhicules de la file : le véhicule de rang $n+p$ commence à freiner à l'instant $\theta+p\tau$; son abscisse est alors

$$x_{n+p}(\theta+p\tau) = -(n+p-1)l + \frac{\gamma_{n+p}}{2} (\theta-n\tau)^2$$

et sa vitesse

$$v_{n+p}(\theta+p\tau) = \gamma_{n+p}(\theta-n\tau).$$

Il doit s'arrêter à l'abscisse $-(p-1)l$; si la vitesse est une fonction continue du temps (pas de choc) et si le mouvement est uniformément accéléré, il doit donc prendre une accélération

$$\gamma'_{n+p} = \frac{\gamma_{n+p}(\theta-n\tau)^2}{2 \left(-nl + \frac{\gamma_{n+p}}{2} (\theta-n\tau)^2 \right)}$$

de sorte que le véhicule stoppe à l'instant

$$t_{n+p} = \theta+p\tau + \frac{2}{\gamma_{n+p}(\theta-n\tau)} \left(nl - \frac{\gamma_{n+p}}{2} (\theta-n\tau)^2 \right)$$

pourvu que $t_{n+p} < 2(\theta+\theta') + p\tau$; en effet, à l'instant $2(\theta+\theta')$ le feu est repassé au vert et le véhicule considéré était le $p^{\text{ième}}$ de la nouvelle file.

La condition

$$\frac{\gamma_{n+p}(\theta-n)}{2n} + n\tau < 2(\theta+\theta')$$

équivaut, avec les valeurs numériques ci-dessus à $p < 40$.

5. Conclusion.

Notre étude, bien que très élémentaire puisqu'elle suppose connu uniquement le mouvement rectiligne uniformément accéléré, permet de mettre en évidence plusieurs points : existence d'un débit maximum, influence de la

durée du feu vert sur le débit, propagation de l'arrêt dans la file, influence du croisement sur le débit.

Elle pourrait se poursuivre en tenant compte de la diversité des véhicules quant à la longueur (véhicules avec ou sans remorque) et à la puissance, et de la diversité des réflexes des conducteurs. Un tel prolongement nécessiterait l'utilisation de la théorie des probabilités.

Nous n'avons pas tenu compte des possibilités de dépassement qui, sur une route à deux voies, créent une interférence entre deux files roulant en sens inverse. Les problèmes que pose une étude complète du problème sont loin d'être tous résolus. On pourra consulter par exemple l'article suivant :

R. FORTET : Théorie du trafic de convoi.

Revue française de Recherche Opérationnelle, 1962, **25**, p. 337.