Éléments de valence impaire relativement à un graphe fini

C. Frasnay
Faculté des Sciences de Toulouse

Le *Bulletin* n° 271 signalait (p. 611) une propriété arithmétique des graphes de jonction finis (utilisable pour obtenir une nouvelle démonstration d'un théorème de Géométrie combinatoire découvert en 1928 par le mathématicien polonais Sperner). Nous allons voir que cette propriété se déduit d'une propriété analogue, plus générale, valable pour les graphes finis quelconques.

Comme dans l'article cité, nous noterons $|X|$ le cardinal de tout ensemble X.

1. Une *structure graphique* de support E est un couple (E, G) d'ensembles tels que $G \subseteq E \times E$: on dit alors que G est un graphe « dans E ». Posons $\Delta_E = \{(x, x) : x \in E\}$ et introduisons le graphe réciproque $\overset{-1}{G} = \{(x, y) : (y, x) \in G\}$. Le nombre des couples $(x, x) \in G$ est : $\mathit{réfl}(G) = |G \cap \Delta_E|$; le nombre des couples $(x, y) \in G$ tels que $(y, x) \notin G$ est : $\mathit{asym}(G) = |G - \overset{-1}{G}|$. Pour un graphe fini G, nous dirons que les entiers $\mathit{réfl}(G)$ et $\mathit{asym}(G)$ sont, respectivement, l'*indice de réflexivité* et l'*indice d'asymétrie* (de G).

2. Étant donné un graphe G, rappelons que la *coupe* de G suivant un élément x est : $G(x) = \{y : (x, y) \in G\}$; le cardinal $|G(x)|$ est la *valence* de x relativement à G. Pour que le graphe G soit fini, il faut et il suffit qu'il soit celui d'une structure (E, G) de support E fini; puisque $G(x) \subseteq E$, toutes les valences $|G(x)|$ sont alors des entiers naturels. Si l'on pose (pour tout entier $n \geq 1$) :

$$S_n(G) = \{x : |G(x)| = n\}$$

$S_1(G)$ est l'ensemble des éléments *univoques* (mod. G) et $S(G) = \bigcup_{n \geq 1} S_n(G)$ est la source du graphe fini G.

Le nombre des éléments de valence impaire (relativement à G) est :

$$\mathit{imp}(G) = \sum_{m \geq 0} |S_{2m+1}(G)|$$

nous dirons que l'entier $\mathit{imp}(G)$ est l'*indice d'imparité* de G.

3. Voici la propriété annoncée, qui relie les trois indices (réflexivité, asymétrie, imparité) d'un graphe G :

Théorème. — Pour tout graphe fini G, la somme $\mathit{réfl}(G) + \mathit{asym}(G) + \mathit{imp}(G)$ *est paire.*

a) Considérons un premier partage de G, constitué par les trois graphes $G \cap \Delta_E$, $G - \overset{-1}{G}$, $H = (G \cap \overset{-1}{G}) - \Delta_E$. Si f est l'application qui associe à tout couple $(x, y) \in H$, la paire $\{x, y\} \in P_2(E)$, toute paire $\{x, y\} \in f(H)$ provient (par f) de deux couples distincts (x, y) et (y, x). Il en résulte que $|H|$ est pair, autrement dit :

$$|G| \equiv \textit{réfl}\,(G) + \textit{asym}\,(G) \qquad (\text{mod. } 2)$$

b) Lorsque x parcourt le support E de la structure (E, G), les colonnes $\{x\} \times G(x)$ constituent un second partage de G.

Par conséquent :

$$|G| = \sum_{x \in E} |G(x)| = \sum_{n \geqslant 1} n|S_n(G)|$$

et

$$|G| \equiv \sum_{m \geqslant 0} |S_{2m+1}(G)| \qquad (\text{mod. } 2)$$

Finalement : $\textit{réfl}\,(G) + \textit{asym}\,(G) + \textit{imp}\,(G) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2)$

Corollaire — *Pour tout graphe G fini, symétrique et irréflexif, le nombre imp (G) des éléments de valence impaire (relativement à G) est pair.*

(Dans ce cas : $\textit{réfl}\,(G) = \textit{asym}\,(G) = 0$.)

Exemple. — *Pour tout graphe de jonction fini G, le nombre des éléments univoques (mod. G) est pair*. (Un graphe de jonction est un graphe symétrique et irréflexif G relativement auquel les valences sont 0,1 ou 2. Ainsi : $|S_1(G)| = \textit{imp}\,(G)$ pour G fini.)

Dans le *Bulletin* n° 271 (pp. 611-613), cette proposition était une conséquence d'une étude plus complète portant sur la réduction d'un graphe de jonction fini G en ses *composantes :* la source $S_1(G) \cup S_2(G)$ se partageait en m « rondes » R_i et en n « farandoles » F_j; les égalités $|R_i \cap S_1(G)| = 0$ et $|F_j \cap S_1(G)| = 2$ entraînaient $\textit{imp}\,(G) = 2n$.

C. Frasnay