Post-scriptum

Je viens de lire l'article de M. Frenkel, et une inquiétude me traverse : me serais-je « essentiellement rapportée à mes souvenirs d'enfance », peut-être même en les enjolivant ? Aurais-je oublié que la modernisation des Mathématiques consiste à « remplacer certaines théories par des théories plus puissantes et de portée plus générale » ? A vrai dire, je ne le crois pas ; mais je crois que ces « théories plus puissantes » sont à prendre dans des domaines variés, et non pas seulement dans celui de l'algèbre linéaire. C'est une grande force des Mathématiques de montrer que chaque problème particulier peut être situé dans un cadre plus général (qui peut d'ailleurs varier selon notre niveau de connaissances, et selon les progrès de la Science) ; mais une chose aussi concrète que la géométrie élémentaire éclate en des cadres très divers, qui sont tous fondamentaux. De ce point de vue, l'exposé de M. Frenkel et le mien ne sont pas en opposition, mais se complètent : celui de M. Frenkel, qui vise à démontrer que la géométrie affine est une illustration de l'algèbre linéaire, suggère la construction de géométries sur un corps quelconque ; le mien est une introduction à l'analyse linéaire et aux espaces de Hilbert, dont on connaît l'importance et les nombreuses applications.

Par contre, il reste un problème de niveau, essentiellement pratique. Si j'avais à faire, à l'heure actuelle, un cours de Math. Sup. ou de MP1 sur les isométries, j'adopterais un point de vue voisin de celui de M. Frenkel ; et, à ce niveau (où l'algèbre linéaire tient une grande place), il est peut-être possible de donner un exposé plus synthétique que le sien. Mais je souhaiterais que mes élèves aient eu, l'année précédente, en Terminale, un exposé fondé sur les principes que j'ai exposés : tout d'abord, cela m'éviterait peut-être d'ennuyer mes élèves en « rabachant » toujours les mêmes choses, et aussi parce que je crois ces principes mieux adaptés au niveau et à la vocation propre des Terminales, que ceux de M. Frenkel. La modernisation ne consiste pas toujours à faire passer dans la classe d'ordre n, le programme de la classe d'ordre n + 1 ! Mais seuls nos Collègues qui enseignent en Terminale, qui connaissent les élèves et ont la possibilité d'expérimenter, peuvent trancher ce débat ; et je me soumets d'avance à leur jugement.

Sans vouloir aucunement imposer mon point de vue, je crois cependant utile, sur le plan pédagogique, de voir une même théorie successivement sous deux aspects : dans une première phase constructive, la structure de l'espace se dégage peu à peu de l'étude de faits particuliers ; dans une deuxième phase, discursive, on donne un exposé axiomatique dont les élèves comprennent d'autant mieux l'intérêt qu'il permet de faire la synthèse de faits connus. Au niveau de la recherche, les mathématiques ne procèdent pas autrement.

C'est ainsi qu'au premier niveau, le théorème de Thalès permet, à partir de faits plus ou moins expérimentaux, d'établir la relation fondamentale

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$$

de la structure vectorielle, et de prouver la décomposition de l'espace en « somme directe » d'un plan et d'une droite ; au deuxième niveau, ce théorème apparaîtra comme une conséquence triviale de la structure vectorielle de l'espace.

De même, au premier niveau, les isométries se présentent, me semblent-ils, comme des transformations conservant les distances ; elles sont donc affines (on jongle avec des balles avant de jongler avec des vecteurs !). Ce point de vue expérimental simplifie l'exposé en nous évitant des répétitions (c'est ce que j'ai essayé de montrer dans mon exposé) : les isométries « vectorielles » étant celles qui laissent un point invariant, nous n'avons pas à en refaire la théorie. Par contre le point de vue exposé par M. Frenkel oblige à faire deux études successives (cas vectoriel, cas affine) dont la première ne me semble pas s'introduire naturellement au niveau élémentaire. Au second niveau, par contre, ce sont la structure vectorielle et le groupe orthogonal attachés à une forme quadratique qui seront les vedettes ; et on pourra se permettre, alors, de prendre une forme quadratique non positive, et un corps autre que $\mathbb{R}$. Mais, au premier niveau, l'exposé que je propose a, je crois, l'intérêt d'aider les élèves à approfondir leurs connaissances de la structure de « corps archimédien » de $\mathbb{R}$ et de ses représentations décimales ou binaires (1).

Pour conclure, certes, l'algèbre et l'analyse linéaires sont des voies royales ; mais ces autoroutes, trop droites, ne mènent pas partout... et, dans les Mathématiques actuelles, il se présente de plus en plus de problèmes « non linéaires » pour lesquels nous devons garder intacts notre esprit d'initiative et nos facultés d'invention. Les méthodes « standard », que le devoir de modernisation nous oblige à substituer aux anciens enseignements de géométrie élémentaire, doivent donc être exposés sans dogmatisme de façon suffisamment simple et claire pour laisser la place à de nombreux exercices : c'est par les exercices que nous pourrons développer l'esprit d'initiative des bons élèves, et leur suggérer diverses sortes de généralisations ; et nous éviterons d'écraser les autres sous le poids de notre savoir, qui ne pourrait que les décourager et les écarter des buts que nous poursuivons.

M^me^ LELONG.

(1) Deux problèmes de concours récents (E.N.S. 1969, Mines 1970) fondés sur ces représentations semblent avoir bien dérouté les candidats !