Sur les "Notes de géométrie" de Mme Lelong-Ferrand

J. Frenkel
I.R.E.M. de Strasbourg

Je ne sais pas bien ce qu'est un raisonnement « géométrique », géométrique par opposition à quoi? Le « calcul » est-il autre chose qu'une manière (parfois lourde, souvent indispensable) d'écrire un raisonnement? Je suis cependant d'accord avec Mme Lelong pour penser que vouloir réduire la géométrie à la géométrie analytique est une absurdité : les méthodes intrinsèques ont acquis droit de cité depuis longtemps. Mais la question n'est pas du tout là.

La modernisation de l'enseignement mathématique ne consiste naturellement pas à substituer le calcul aux idées, mais à remplacer certaines théories par des théories plus puissantes et de portée plus générale. L'algèbre linéaire a fait irruption dans *toute* la mathématique (Algèbre non linéaire, Analyse, Mécanique, Topologie, Informatique, etc...). La géométrie élémentaire ne s'en distingue pas essentiellement, sinon par le vocabulaire (et encore!). La question est donc de savoir si c'est la géométrie qui doit servir d'introduction à l'algèbre linéaire ou l'inverse. Cette question serait assez secondaire s'il ne s'agissait que de former les seuls futurs mathématiciens (seuls aussi à être éventuellement des géomètres en puissance). Mais elle pose des problèmes pédagogiques que l'on ne peut trancher sans expérimentation, à coup d'idées préconçues, et surtout en se rapportant essentiellement à des souvenirs d'enfance.

Reprenant les exemples de l'article de Mme Lelong, cité dans la suite par (L), et dont je reprends les notations, je vais tenter d'illustrer l'idée suivante : il est plus sûr, plus efficace, de penser « linéairement ». Je n'ai pas choisi mes exemples : ce sont ceux de (L). Le lecteur jugera quelles sont les démonstrations qui vont le plus droit au but, lesquelles analysent le mieux la situation, la présentent sous son aspect le plus général. C'est, me semble-t-il, largement affaire de tempérament. Cependant, si l'on s'en tient au critère esthétique de (L), le lecteur remarquera — par exemple — que l'étude faite dans (L) des transformations orthogonales — basée sur le théorème 1 de (L) — suppose essentiellement que le corps de base est $\mathbb{R}$, et la forme bilinéaire fondamentale positive. La méthode que nous proposons ne suppose rien de tel.

I. — Pour la commodité du lecteur, rappelons quelques définitions et résultats élémentaires.

a) On dit qu'un espace vectoriel E est *somme directe* de deux sous-espaces E_1 et E_2 si tout $x \in E$ s'écrit d'une *seule manière* $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in E_i$

($i \in \{1, 2\}$). L'unicité de l'écriture entraîne l'existence d'applications p_i($i \in \{1, 2\}$) de E dans E_i (et même sur E_i) de sorte que $x = p_1(x) + p_2(x)$. Ces applications sont *linéaires* (par exemple l'égalité $\lambda x = \lambda p_1(x) + \lambda p_2(x)$ et le fait que $p_i(x) \in E_i$ entraîne $\lambda p_i(x) \in E_i$ montrent que $p_i(\lambda x) = \lambda p_i(x)$).

b) Un espace affine E possède un espace vectoriel associé $\vec{E}$ (cf. par exemple [1] t. 2, chap. 17 ou [2], chap. 1), et par définition la dimension de E est celle de $\vec{E}$. Un sous-ensemble F de E est appelé sous espace affine de E si pour un $A \in F$ l'ensemble $\vec{F}_A$ des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ tels que $B \in F$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$; $\vec{F}_A$ ne dépend pas alors du choix de $A \in F$, on note $\vec{F}$ cet espace vectoriel, et F est alors naturellement un espace affine d'espace vectoriel associé $\vec{F}$; $\vec{F}$ est appelé la *direction* de F. Si E_1, E_2 sont deux sous-espaces affines de E, $E_1 \cap E_2$, s'il n'est pas vide, est aussi un sous-espace affine de E, d'espace vectoriel associé $\vec{E}_1 \cap \vec{E}_2$.

c) Soient E et E' deux espaces affines.

Une application $f : E \mapsto E'$ est dite *affine* s'il existe, dans E, un point A telle que l'application $f_A : \vec{u} \mapsto f(A + \vec{u}) - f(A)$ soit linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{E}'$. Alors $f_A = f_B$; on note f_o cette application, dite application linéaire associée à f; on a $(g \circ f)_o = g_o \circ f_o$. Il revient au même de dire que (en désignant par E_A la structure d'espace vectoriel sur E obtenue en prenant A pour origine), f est linéaire de E_A dans $E'_{f(A)}$, ou que f est composée d'une application linéaire de E_A dans $E'_{A'}$, et d'une translation de E' (dépendant de $A \in E$ et $A' \in E'$), ou, encore, que f « conserve » les barycentres (*i.e* si (M_i) est une famille de points de E, (λ_i) une famille de scalaires ayant même ensemble d'indices et telle que $\Sigma\lambda_i = 1$, alors $f(\Sigma\lambda_i M_i) = \Sigma\lambda_i f(M_i)$). L'image par f d'un sous-espace affine de E est un sous-espace affine de E'. En particulier l'image par f de toute droite est une droite ou un point. Réciproquement si $f : E \mapsto E'$ transforme toute droite AB en une droite si $f(A) \neq f(B)$, ou en un point si $f(A) = f(B)$, et si $f(E)$ n'est pas contenu dans une droite, f est non pas affine, mais seulement *semi-affine* (i.e. il existe un automorphisme σ du corps de base K et une application $f_o : \vec{E} \mapsto \vec{E}$ vérifiant $f_o(\vec{u} + \vec{v}) = f_o(\vec{u}) + f_o(\vec{v})$, $f_o(\lambda\vec{u}) = \sigma(\lambda) f_o(\vec{u})$ pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{E}$, telle que pour tous A et B de E, $f(A) - f(B) = f_o(\overrightarrow{AB})$), du moins si K n'est pas le corps à deux éléments. Par exemple l'application $(z_1 z_2) \mapsto (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ de $\mathbb{C}^2$ dans lui-même transforme les droites (affines) de $\mathbb{C}^2$ en droites de $\mathbb{C}^2$.

C'est l'une des formes du « théorème fondamental de la géométrie affine ». Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$, σ est nécessairement l'identité : on retrouve ainsi essentiellement comme cas particulier le théorème 1 de (L).

Cette réciproque ne nous sera pas utile ici. Nous n'en donnons pas la démonstration pour ne pas allonger inutilement l'article (3).

(1) Queysanne-Revuz, classe de Seconde C.T.
(2) Condamine-Vissio, géométrie de Terminale C.
(3) *N.D.L.R.* Notre collègue Frenkel nous fait savoir qu'il tient à la disposition des lecteurs du Bulletin cette démonstration.

d) Un espace euclidien réel (de dimension finie ou non) est un espace affine E sur $\mathbb{R}$ dont l'espace vectoriel associé $\vec{E}$ est muni d'une forme bilinéaire symétrique [i.e. d'une application $(x, y) \mapsto x.y$ de $\vec{E} \times \vec{E}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $x.y = y.x$ et $(\lambda x + \mu x').y = \lambda(x.y) + \mu(x'.y)$] telle que

$$1^\circ\ x.x \geqslant 0 \qquad 2^\circ\ x.x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

L'application $x \mapsto \|x\|$ est alors une *norme* sur $\vec{E}$ (qui est donc un espace préhilbertien réel), et l'application $(A, B) \mapsto d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ une *métrique* sur E.

II. — La forme que donne (L) au théorème de Thalès est un cas particulier (relatif à la dimension 3) du théorème suivant.

Théorème 1. — Soit E un espace affine de dimension finie (quelconque), E_1 et E_2 deux sous-espaces affines de dimensions complémentaires et dont l'intersection se réduit à un point O. Alors la projection de E sur E_2 parallèlement à E_1 est une application affine de E sur E_2.

Preuve :

Les hypothèses sont que $\vec{E}_1 \cap \vec{E}_2 = \{O\}$, $\dim \vec{E}_1 + \dim \vec{E}_2 = \dim E$, ce qui équivaut à dire que $\vec{E}$ est somme directe de $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$. Il en résulte d'ailleurs que pour tout A de E, le sous-espace affine $E'_1 = A + \vec{E}_1$ coupe E_2 en un seul point $f(A)$ (car $\overrightarrow{E'_1 \cap E_2} = \vec{E}'_1 \cap \vec{E}_2 = \vec{E}_1 \cap \vec{E}_2 = \{O\}$) : la projection en question est précisément l'application f, qui est caractérisée par

① $$(\forall A \in E)\ f(A) \in E_2 \text{ et } A - f(A) \in \vec{E}_1$$

En particulier $f(O) \in E_1 \cap E_2$, donc $f(O) = O$. Soit alors $f_o : \vec{E} \mapsto \vec{E}$ l'application définit par $f_o(\overrightarrow{OA}) = f(O) - f(A) = O - f(A)$. D'après ① elle est caractérisée par

② $$\forall x \in \vec{E} \quad f_o(x) \in \vec{E}_2 \quad x - f_o(x) = g(x) \in \vec{E}_1$$

On a donc, pour tout x de $\vec{E}$, $x = g(x) + f_o(x)$ avec $g(x) \in \vec{E}_1$, $\vec{f}_o(x) \in E_2$; avec les notations de 1°, *a*), $g = p_1$, $f_o = p_2$: donc f_o est linéaire, et f affine, *cqfd.*

N.B. : Le corps de base peut très bien être $\mathbb{C}$, auquel cas le théorème 1 de (L) ne peut s'énoncer.

III. — Les théorèmes (3) et (4) de (L) peuvent être remplacés par les suivants :

Théorème 2. — Soit $\vec{E}$ un espace préhilbertien réel et φ une application de $\vec{E}$ dans lui-même. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

i) φ est additive et conserve la norme (ie $\|\varphi(x)\| = \|x\|$)
ii) φ conserve les distances et l'origine (ie $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$)
iii) φ conserve le produit scalaire (ie $\varphi(x).\varphi(y) = x.y$).

Si ces conditions sont remplies, φ est linéaire (injective évidemment).

Preuve : On s'appuie sur les identités

③ $$2\,x.y = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$$

④ $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

i) ⇒ *ii*) On a $\|\varphi(0)\| = 0$, d'où $\varphi(0) = 0$. Comme $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ et $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, d'après ④,
$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|^2 = \|\varphi(x) + \varphi(y)\|^2 - 2(\|\varphi(x)\|^2 + \|\varphi(y)\|^2) = \|x-y\|^2$ *cqfd.*

ii) ⇒ *iii*) Comme $\varphi(0) = 0$ et $d(\varphi(0, \varphi(x)) = d(0, x)$, on a $\|\varphi(x)\| = \|x\|$.
Comme $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$, d'après ④, $\|\varphi(x) + \varphi(y)\| = \|x + y\|$, donc, vu ③,

$$x.y = \varphi(x).\varphi(y)$$ *cqfd*

iii) ⇒ *i*) Si φ conserve le produit scalaire, il conserve évidemment la norme.

Le théorème résulte alors — et *c'est du reste là le point essentiel du théorème* — de ce que *iii*) implique la *linéarité* de φ. Car, quels que soient x, y, z dans $\vec{E}$ et les réels α et β on a

$$\begin{aligned}(\varphi(\alpha x + \beta y) - \alpha\varphi(x) - \beta\varphi(y)).\varphi(z) &= \varphi(\alpha x + \beta y).\varphi(z) - \alpha(\varphi(x).\varphi(z)) \\ &\quad - \beta(\varphi(y).\varphi(z)) \\ &= (\alpha x + \beta y).z - \alpha(x.z) - \beta(y.z) = 0\end{aligned}$$

Donc $X = \varphi(\alpha x + \beta y) - \alpha\varphi(x) - \beta\varphi(y)$ est orthogonal à tous les vecteurs de $\varphi(\vec{E})$, donc (par linéarité), à tout vecteur combinaison linéaire de vecteurs de $\varphi(\vec{E})$, — et en particulier à X. Ainsi $X.X = 0$, donc $X = 0$, *cqfd.*

Définition. — Une application φ de $\vec{E}$ dans lui-même satisfaisant à ces conditions s'appelle une transformation orthogonale.

Théorème 2'. — Les isométries d'un espace euclidien réel sont les transformations affines dont les applications linéaires associées sont orthogonales.

Preuve :

1° Soit f une transformation affine dont l'application linéaire associée f_o est orthogonale. D'après *i*)

$$\|f(A) - f(B)\| = \|f_o(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B) \ : \quad f \text{ est une isométrie}$$

2° Supposons que f soit une isométrie; soit A un point fixe de E et posons $f_o(\overrightarrow{AM}) = f(M) - f(A)$. Prenant $M = A$, on voit que $f_o(0) = 0$; de plus si x et $x' \in \vec{E}$, soit M (resp. M') tel que $\overrightarrow{AM} = x$ (resp. $\overrightarrow{AM'} = x'$). Alors :

$$\|f_o(x) - f_o(x')\| = \|f(M) - f(M')\| = \|M - M'\| = \|x - x'\|$$

Donc vu *ii*) f_o est orthogonale, en particulier linéaire, et f est affine.

Remarques :

1° Il n'y a rien à changer aux démonstrations si, au lieu d'applications d'un espace préhilbertien ou euclidien dans lui-même, on considère des applications de cet espace dans un autre.

2° Le théorème 2 subsiste, *à la terminologie près*, si on remplace l'espace préhilbertien réel $\vec{E}$ par un espace vectoriel *de dimension finie* sur un corps K quelconque (aussi « abstrait » soit-il!) muni d'une forme bilinéaire symétrique *non dégénérée arbitraire* (par exemple, si $K = \mathbb{R}$, de signature quelconque). Cependant comme alors $X.X = 0$ n'implique pas $X = 0$, il faut légèrement modifier l'argument final en constatant que *iii*) implique que φ transforme une base orthogonale en une *base* (également orthogonale). En effet, si $(e_i)|_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une telle base, et si $\Sigma\lambda_i\varphi(e_i) = 0$, alors

$$(\Sigma\lambda_i\varphi(e_i)).\varphi(e_j) = (\Sigma\lambda_i\varphi(e_i)).\varphi(e_j) = (\Sigma\lambda_i e_i)e_j = \lambda_j(e_j.e_j) = 0,$$

et $e_j.e_j \neq 0$ puisque le « produit scalaire » est non dégénéré. Les $\varphi(e_i)$ forment donc un système libre (théorème 5 de (L), mais ici on n'a plus de norme à sa disposition), donc une base de $\vec{E}$. Alors le raisonnement du texte montre encore que $\varphi(\alpha x + \beta y) - \alpha\varphi(x) - \beta\varphi(y) = 0$, car il est orthogonal à tous les vecteurs du sous-espace de $\vec{E}$ engendré par les $\varphi(e_i)$, c'est-à-dire à $\vec{E}$ tout entier.

3° Pour qu'une application affine soit injective (resp. surjective), il faut et suffit que l'application linéaire associée le soit (vérification immédiate) : le théorème 2' montre alors que si E est de dimension finie, toute isométrie est surjective : résultat facilement obtenu, mais qui n'a rien d'évident sans le secours de l'Algèbre linéaire.

4° *Tous* les résultats du (II) de (L) sont contenus dans les théorèmes 2 et 2' sauf le théorème 7, qui est une conséquence immédiate du suivant.

Théorème 3. — Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel et u une application linéaire *involutive* (ie $u \circ u = Id$) de $\vec{E}$ dans lui-même. Alors $\vec{E}$ est somme directe des sous-espaces $\vec{E}_+ = \{x | u(x) = x\}$ et $\vec{E}_- = \{x | u(x) = -x\}$.

Preuve : On a $\vec{E}_+ \cap \vec{E}_- = \{0\}$, et pour tout x de $\vec{E}$:

$$x = \frac{x + u(x)}{2} + \frac{x - u(x)}{2}$$

où le premier terme de la somme est dans $\vec{E}_+$, le second dans $\vec{E}_-$, *cqfd.*

Remarque. — Si u est orthogonale, $\vec{E}_+$ et $\vec{E}_-$ sont orthogonaux. En effet, soient $x \in \vec{E}_+$, $y \in \vec{E}_-$; on a

$$x.y = u(x).u(y) = x.(-y) = -x.y \quad \text{d'où} \quad x.y = 0$$

Théorème 3'. — Soit E un espace affine et f une application affine involutive de E dans lui-même (respectivement une isométrie involutive de E). Alors f est une symétrie oblique (resp. orthogonale) par rapport à un sous-espace affine de E.

Preuve : L'ensemble F des points fixes d'une application affine de E dans lui-même, s'il n'est pas vide, est un sous-espace affine de E dont la direction (voir la déf. en 1-6) est le noyau de $f_0 - Id$. Or si f est une involution, F n'est pas vide car (conservation du barycentre)

$$f\left(\frac{M + f(M)}{2}\right) = \frac{f(M) + M}{2} \Rightarrow \frac{M + f(M)}{2} \in F$$

pour tout M de E.

Soit $\vec{E}_+$ (resp. $\vec{E}_-$) le noyau de $f_0 - Id$ (resp. de $f_0 + Id$). Comme f est une involution, f_0 aussi, et, si $O \in F$, il résulte du théorème 3 que $F = E_+ = O + \vec{E}_+$ et $E_- = O + \vec{E}_-$ satisfont aux hypothèses du théorème 1. Pour tout M de E,

$$g(M) = \frac{M + f(M)}{2} \in E_+, \qquad g(M) - M = \frac{f(M) - M}{2} \in \vec{E}_- \ :$$

$g(M)$ est la projection de M sur E_+ parallèlement à E_-, d'où la conclusion (compte tenu de la remarque suivant le théorème 3) : f est une symétrie par rapport à E_+ parallèlement à E_-.

Remarques. — 1° Réciproquement, il est immédiat que toute symétrie (oblique) par rapport à un sous-espace affine est une involution. Si E est un espace euclidien réel, complet ou non, pour que V soit l'ensemble des points fixes d'une isométrie (qui est une application continue), il est nécessaire que V soit fermé; mais pour qu'il existe une symétrie orthogonale par raport à V il faut et suffit, d'après le théorème 3' que le sous-espace $\vec{V}^{\circ}$ des vecteurs de $\vec{E}$ orthogonaux à $\vec{V}$ soit un supplémentaire de $\vec{V}$: cela n'est assuré en général que si V est complet (cf (L)).

2° Naturellement la dimension de E_+ est arbitraire (au plus égale à celle de E); si elle est nulle, f est une symétrie centrale; si $\dim E_+ = \dim E < \infty$, f est l'identité.

IV. — En ce qui concerne le théorème 8, je souhaiterais seulement dire ceci : si l'on s'intéresse aux similitudes, il est assez naturel de rencontrer des triangles semblables. Une similitude étant le produit d'une isométrie et d'une homothétie, les « cas de similitude des triangles » se ramènent aux « cas d'égalité » (on peut toujours supposer en faisant une homothétie que deux côtés homologues ont même longueur).

Naturellement dans ces questions les « angles » en cause ne sont pas de vrais angles : on doit entendre par angle en A du triangle ABC le *nombre réel* $\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\ \|\overrightarrow{AC}\|} = \widehat{A}$.

Il est donc tout à fait inutile d'invoquer en cette matière des fonctions sinus (dont l'intérêt véritable apparaît lorsqu'il s'agit d'angles orientés, et qui exigent de plus le choix d'une orientation du plan). Il s'agit, si j'ai bien compris, d'éviter les calculs pour établir le

Théorème 4. — Soient E un espace préhilbertien réel (*de dimension* > 1) et f une application de E dans E. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes

① $\quad \forall (x, y) \in E^2 \quad \dfrac{f(x).f(y)}{\|f(x)\|\ \|f(y)\|} = \dfrac{x.y}{\|x\|\ \|y\|}$ et $f(0) = 0$

② $\quad \forall (x, y) \in E^2 \quad f(x).f(y) = \lambda^2 x.y$ où λ est une constante réelle

Remarque. — La 2e condition montre que $\dfrac{1}{\lambda} f$ est une transformation orthogonale (on peut écarter le cas $\lambda = 0$, qui équivaut à $f = 0$), donc que f est linéaire, et est en fait une similitude. Il est évident qu'elle implique la première (faire $x = y$ dans ②).

Pour établir ce théorème « sans calcul » il est peu indiqué de s'appuyer sur l'équivalence des deux « systèmes fondamentaux de résolution d'un triangle » : je crois me rappeler que la démonstration de cette équivalence exige quelque virtuosité technique. Démontrons donc le

1er cas d'égalité des triangles. — Si deux triangles ABC, A'B'C' vérifient

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\| \qquad \widehat{A} = \widehat{A'} \qquad \widehat{B} = \widehat{B'}$$

alors il existe une isométrie et une seule f du plan A'B'C' sur le plan ABC telle que $f(A') = A$, $\quad f(B') = B$, $\quad f(C') = C$.

L'unicité est évidente — car il existe une seule application affine transformant le *repère* (A', B', C') en le repère (A, B, C).

D'autre part on peut toujours se ramener au cas vectoriel en supposant A = A' (il existe toujours une isométrie du second plan sur le premier envoyant A' sur A). Alors *la démonstration* (cf. un manuel de 5e, programmes de 1960) est basée sur les remarques suivantes (E est un espace vectoriel euclidien de dimension deux).

a) Soit (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2) deux couples de vecteurs unitaires indépendants de E tels que

$$\vec{e}_1 . \vec{e}_2 = \vec{e}'_1 . \vec{e}'_2$$

Alors l'unique application linéaire de E dans lui-même définie par $f(e_i) = e'_i (i \in \{1, 2\}$ est orthogonale : en effet elle conserve le produit scalaire. (D'où le 2e cas d'égalité des triangles...)

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < 1$. Alors il existe *deux* vecteurs unitaires $x \in E$, symétriques par rapport à la droite $\mathbb{R}e_1$, tels que $e_1.x = \alpha$.

En effet, si e est un vecteur unitaire orthogonal à e_1, x est déterminé par les conditions :

$$x = \lambda e_1 + \mu e \qquad e_1.x = \lambda = \alpha \qquad \|x\| = \alpha^2 + \mu^2 = 1$$

Cela dit, désignons par e_1, e_2, e'_1, e'_2 les vecteurs

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}, \quad \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|}, \quad \frac{\overrightarrow{AB'}}{\|\overrightarrow{AB'}\|}, \quad \frac{\overrightarrow{AC'}}{\|\overrightarrow{AC'}\|} \qquad (A' = A).$$

L'isométrie f définie en *a*) envoie B′ en B puisque $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB'}\|$, la demi-droite AC′ sur la demi-droite AC, et, vu *b*), la demi-droite B′C′ sur la demi-droite BC ou sur sa symétrique Bz par rapport à AB; mais le second cas est exclu, car les deux demi-plans limités par AB n'ont en commun que AB, et $f(C')$ est sur les images des demi-droites AC′ et B′C′. Donc $f(C') = C$, *cqfd.*

Remarque. — Sauf erreur, c'est seulement dans ce n° IV qu'il était indispensable de supposer le corps de base ordonné — hypothèse sans laquelle on ne peut même pas *énoncer* le théorème 1 de (L).

2° J'ai voulu donner une démonstration « géométrique » du 1er cas d'égalité des triangles. La démonstration par le calcul est plus courte. Esquissons la. Considérons, dans le plan ABC un repère orthonormal $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et soient (x, y) les coordonnées de C dans ce repère. On peut, de plus, supposer sans diminuer la généralité $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ et $y < 0$ (quitte à changer e_2 en $-\vec{e}_2$); x et y sont alors déterminés par :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \widehat{A}, \qquad \frac{1 - x}{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}} = \widehat{B}, \qquad y < 0$$

ce qui équivaut à

$$y^2 = \frac{1 - \widehat{A}^2}{\widehat{A}^2}\, x^2 = \frac{1 - \widehat{B}^2}{\widehat{B}^2}\,(1 - x)^2, \qquad \widehat{A}x > 0, \qquad \widehat{B}(1 - x) > 0, \qquad y > 0$$

Donc nécessairement $\dfrac{x}{1 - x}$ est du signe de $\dfrac{\widehat{A}}{\widehat{B}}$, d'où *au plus* une solution (x, y). Soit alors $(A'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ le repère analogue lié au triangle A′B′C′, et $\overrightarrow{A'C'} = x'e'_1 + y'e'_2$. On a $(x', y') = (x, y)$, donc *la* transformation affine envoyant le deuxième repère sur le premier (qui est une isométrie) envoie A′, B′, C′ sur A, B, C respectivement.