Notes de géométrie

Suggestions en vue des nouveaux programmes.

M[me] LELONG-FERRAND
Faculté des Sciences, Paris

Il y a, actuellement, une tendance à vouloir réduire la géométrie élémentaire à l'étude de quelques propriétés de $\mathbb{R}^2$ *facilement accessibles par le calcul; et cet abus de « géométrie analytique » risque de masquer le sens et la portée des résultats.*

Un des grands avantages du raisonnement dit « géométrique » (qui, dans ma pensée, englobe aussi bien le calcul vectoriel que la topologie) est d'être, souvent, indépendant du nombre de dimensions de l'espace considéré et valable en dimension infinie. Il serait donc bien regrettable qu'une modernisation mal comprise de l'enseignement mathématique aboutisse à un rétrécissement et à une perte de puissance. De plus, les calculs d'algèbre linéaire à 2 ou 3 dimensions ne sont pas toujours attractifs, et risquent de décourager les bons élèves comme les mauvais: en mathématiques, la beauté d'un raisonnement est liée assez étroitement à sa généralité et à son efficacité. Mais cela ne veut pas dire que l'on se place nécessairement dans le cadre le plus général, celui-ci devant être soumis à la cohérence de l'exposé, et adapté au niveau de l'auditoire.

Pour illustrer ces idées, je vais donner quelques exemples.

1.

Un théorème général de géométrie affine (admettant le théorème de Thalès pour corollaire)

Théorème 1. — *Soit* E *un espace affine, sur* $\mathbb{R}$ *ou sur un sous-corps* K *de* $\mathbb{R}$; *et soit* f *une application de* E *dans* E *satisfaisant aux conditions suivantes :*

a) *Quels que soient les points alignés* A, B, C *leurs images* par f *sont alignées ou confondues.*

b) *Si* A, B, C *sont alignés et si* C *est entre* A *et* B, *alors* f(C) *est entre* f(A) *et* f(B).

c) *Si* A, B, C *sont alignés* et *si* C *est le milieu de* [A, B], *alors* f(C) *est le milieu de* [f(A), f(B)].

Alors f *est une application affine, i.e. il existe une application* f_o, *de l'espace vectoriel* E_o *associé à* E, *dans lui-même, satisfaisant à*

a') quels que soient A, $B \in E$, $f_o(\overrightarrow{AB}) = f(B) - f(A)$

b') quels que soient $\vec{u}$, $\vec{v} \in E_o$, $f_o(\vec{u} + \vec{v}) = f_o(\vec{u}) + f_o(\vec{v})$

c') quels que soient $\vec{u} \in E_o$ et $\lambda \in K$, $f_o(\lambda\vec{u}) = \lambda f_o(\vec{u})$.

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, précisons quelques notations :

1) Tout d'abord je trouve commode de désigner par [AB] le segment d'extrémités A, B, c'est-à-dire l'ensemble des points de la droite AB compris entre A et B (au sens large); si B = A, ce segment se réduit au point A.

2) Puisqu'aucune notation cohérente ne s'est imposée pour noter les « vecteurs liés », je désignerai simplement par (A, B) le vecteur lié d'origine A et d'extrémité B; ce n'est, en effet, pas autre chose qu'un couple de points — et je dirai que *le couple* (A, B) est *équipollent au couple* (C, D) si ces couples représentent le même vecteur libre, autrement dit si [A D] et [BC] ont même milieu. Le vecteur libre représenté par le couple (A, B) sera noté $\overrightarrow{AB}$ ou B — A.

3) Si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ ne sont pas indépendants, et si $\vec{u} \neq 0$, le rapport $\dfrac{\vec{v}}{\vec{u}}$ est le nombre λ défini par $\vec{v} = \lambda\vec{u}$; cette notation est commode lorsque nous avons à écrire des égalités ou inégalités entre rapports de vecteurs, mais elle doit être utilisée avec précautions.

Cela étant, la démonstration se fera en plusieurs étapes :

1° Il résulte immédiatement de l'hypothèse *c*) que les images de deux couples équipollents sont deux couples équipollents.

Soient en effet A, B, C, D quatre points de E, et soient A', B', C', D' leurs images respectives par f. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, les segments [AB] et [BC] ont même milieu I (1); donc [A'D'] et [B'C'] ont même milieu $I' = f(I)$ et on a $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

(1) Dans certaines axiomatiques cette propriété est prise comme définition de l'équipollence des couples (A, B) et (C, D); dans les autres théories c'est une conséquence immédiate de cette définition (propriétés caractéristiques du parallélogramme).

Il en résulte que le vecteur $\overrightarrow{A'B'} = f(B) - f(A)$ ne dépend que du vecteur $\overrightarrow{AB} = B - A$, et non du choix particulier des points A, B. Si on pose $f(B) - f(A) = f_o(B - A)$, on obtient ainsi une application f_o de l'espace E_o des vecteurs de E, dans lui-même. C'est cette application que nous allons étudier.

2° Quels que soient $\vec{u}, \vec{v} \in E_o$, on a

$$f_o(\vec{u} + \vec{v}) = f_o(\vec{u}) + f_o(\vec{v}) \tag{1}$$

Démonstration. — La relation (1) est évidente si on prend des représentants convenables de $\vec{u}$, $\vec{v}$: choisissons A quelconque dans E, et définissons les points B, C par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. On a alors $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$; et si A', B', C' sont les images de A, B, C, on a :

$$f_o(\vec{u} + \vec{v}) = f_o(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = f_o(\vec{u}) + f_o(\vec{v}).$$

3° Quels que soient l'entier n et le vecteur $\vec{u}$ on a

$$f_o(n\vec{u}) = n\,f_o(\vec{u}).$$

Cela résulte immédiatement de 2° par récurrence sur n.

4° Quels que soient le nombre rationnel $\frac{p}{n}$ $(n \neq 0)$ et le vecteur $\vec{u}$, on a $f_o\left(\frac{p}{n}\,\vec{u}\right) = \frac{p}{n} f_o(\vec{u})$

D'après 3°, en remplaçant $\vec{u}$ par $\frac{\vec{u}}{n}$ on a en effet $f_o\left(\frac{\vec{u}}{n}\right) = \frac{1}{n} f_o(\vec{u})$, d'où le résultat voulu, par une nouvelle utilisation du 3°.

5° Quels que soient le nombre $\lambda \in K$ et le vecteur $\vec{u}$, on a $f_o(\lambda\vec{u}) = \lambda f_o(\vec{u})$.

Démonstration. D'après le 3° nous pouvons nous limiter au cas $\lambda > 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, désignons par p_n l'entier défini par

$$10^{-n} p_n \leqslant \lambda < 10^{-n}(1 + p_n) \text{ et posons}$$
$$\lambda_n = 10^{-n} p_n, \quad \mu_n = 10^{-n}(1 + p_n)$$

(λ_n est la valeur décimale approchée d'ordre n de λ).
Le point A étant quelconque, posons

$$\vec{u} = \overrightarrow{AU}, \quad \lambda\vec{u} = \overrightarrow{AV}, \quad \lambda_n\vec{u} = \overrightarrow{AV_n}, \quad \mu_n\vec{u} = \overrightarrow{AW_n}.$$

Les points A, U, V, V_n, W_n étant alignés, leurs images A', U', V', V'_n, W'_n sont alignées, dans le même ordre relatif, précisé par le schéma suivant :

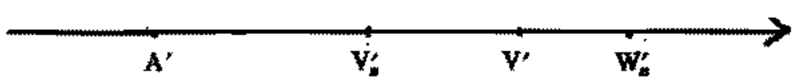

Fig. 1.

(le point U' étant un point quelconque de la demi-droite A'V').

On a donc les inégalités

$$\frac{\overrightarrow{A'V'_n}}{\overrightarrow{A'U'}} < \frac{\overrightarrow{A'V'}}{\overrightarrow{A'U'}} < \frac{\overrightarrow{A'W'_n}}{\overrightarrow{A'U'}},$$

soit :

$$\frac{f_0(\lambda_n \vec{u})}{f_0(\vec{u})} < \frac{f_0(\lambda\vec{u})}{f_0(\vec{u})} < \frac{f_0(\mu_n\vec{u})}{f_0(\vec{u})},$$

ou, d'après le 4° :

$$10^{-n} p_n < \frac{f_0(\lambda\vec{u})}{f_0(\vec{u})} < 10^{-n}(1 + p_n).$$

Les nombres $\frac{f_0(\lambda\vec{u})}{f_0(\vec{u})}$ et λ ont une même valeur décimale approchée à 10^{-n} près quel que soit $n \in \mathbb{N}$: ils sont égaux.

Les trois propositions a') b') c') sont donc entièrement établies.

Remarque. Bien que dans l'énoncé du théorème 1, nous ayons parlé d'espace « affine », nous n'avons en fait utilisé que les propriétés établies ou admises dans les débuts de la géométrie (et dont le lecteur pourra lui-même faire la liste). Cette démonstration s'applique, sans aménagement, au cas où E est le « plan » ou l'« espace » de la géométrie élémentaire — mais elle s'applique aussi au cas où E est un espace affine de dimension infinie sur un sous-corps quelconque de $\mathbb{R}$ (on remarquera à ce propos que le corps de la géométrie élémentaire n'est pas précisé : tant qu'on reste en géométrie affine, en étudiant les propriétés des droites et plans parallèles, les raisonnements sont valables pour la géométrie construite sur un sous-corps quelconque de $\mathbb{R}$. Par contre, en géométrie métrique, on se place dans un corps K tel que tout nombre positif ait une racine carrée).

Application. — Théorème de Thalès.

Nous énoncerons ce théorème sous la forme suivante :

Dans l'espace à trois dimensions, la projection sur un plan parallèlement à une droite sécante [*resp. sur une droite, parallèlement à un plan sécant*] *sont des applications affines de l'espace sur ce plan* [*resp. sur cette droite*].

Pour l'établir, il suffit de prouver que toute projection vérifie les hypothèses du théorème 1 : la démonstration est élémentaire et classique.

Nous allons voir maintenant une autre application du théorème 1, dans l'étude des isométries.

2. Isométries.

Les données. — Soit E_0 un espace préhilbertien réel, c'est-à-dire un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ sur lequel on a défini un *produit scalaire* que nous noterons $x.y$.

Rappelons que, par définition, ce produit scalaire est une application bilinéaire symétrique de $E_o \times E_o$ dans $\mathbb{R}$, assujettie aux conditions : 1) $x.x \geqslant 0$. 2) $x.x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, et qu'en conséquence il satisfait à 3) quels que soient x, $y \in E_o$, $|x.y| \leqslant \sqrt{x.x}\ \sqrt{y.y}$.

A ce produit scalaire est associée la norme $\|x\| = \sqrt{x.x}$, et on réserve le nom d'espace de Hilbert aux espaces préhilbertiens complets pour cette norme.

Dans l'espace affine E associé à E_o, on définit la distance de deux points x, y quelconques par $d(x, y) = \|y - x\|$; et on dit qu'une application f de E dans E est une *isométrie* si, quels que soient x, $y \in$ E, on a

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

Une telle application f est évidemment *injective* ($f(x) = f(y)$ entraîne $x = y$); mais elle n'est pas nécessairement surjective, à moins que E_o ne soit de dimension finie (voir plus loin) : dans l'espace de Hilbert l^2 constitué par les suites $x = (x_n)$ de nombres réels satisfaisant à $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, muni du produit scalaire $x.y = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$, on obtient une isométrie non surjective f en associant à chaque suite x la suite $y = f(x)$ définie par $y_o = 0$ et $y_n = x_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

D'autre part nous n'avons pas supposé f affine, car nous allons voir que c'est une conséquence de nos hypothèses.

Théorème 3. — *Dans l'espace affine* E *associé à un espace préhilbertien réel, toute isométrie est affine.*

Pour démontrer ce théorème, il nous suffit de prouver qu'une isométrie vérifie les hypothèses du théorème 1 ci-dessus. Ce sera une conséquence immédiate du lemme suivant.

Lemme 1. — *Quels que soient les points* A, B, C *de* E, *la relation* (1) d(A, B) = d(A, C) + d(B, C) *équivaut à* : « *les points* A, B, C *sont alignés et* C *est entre* A *et* B ».

Démonstration. — *Posons* $u = \overrightarrow{AC}$, $v = \overrightarrow{CB}$; *la relation* (1) *équivaut à* $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$. Or on a

$$\|u + v\|^2 = (u + v).(u + v) = \|u\|^2 + 2\,u.v + \|v\|^2$$

de sorte que la relation (1) équivaut à

$$u.v = \|u\|\ \|v\| \tag{2}$$

Supposons d'abord que les points A, B, C soient alignés. C étant entre A et B. Si C = A, on a $u = 0$ et la relation (2) est vérifiée. Si C $\neq$ A, le vecteur $\overrightarrow{CB}$ est nul, ou parallèle à $\overrightarrow{AC}$ et de même sens; il existe donc un nombre $\lambda \geqslant 0$ tel que $v = \lambda u$, et on a $u.v = \lambda\|u\|^2$, $\|v\| = \lambda\|u\|$ d'où (2).

Inversement, supposons que la relation (2) soit vraie. Si $u = 0$, on a $C = A$. Si $u \neq 0$ le nombre positif $\lambda = \frac{\|v\|}{\|u\|}$ satisfait à

$$\|v - \lambda u\|^2 = \|v\|^2 - 2\lambda u.v + \lambda^2 \|u\|^2 = 0, \text{ soit } v = \lambda u.$$

Dans les deux cas les points A, B, C sont alignés, le point C étant entre A et B (au sens large).

L'équivalence annoncée est donc bien établie.

Démonstration du théorème 3.

Désignons par f une isométrie de E, par A, B, C trois points quelconques de E, et par $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ leurs images.

Si A, B, C sont alignés et si, pour fixer les idées, on suppose C entre A et B, on a $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$ donc (puisque f est une isométrie) :

$$d(A', B') = d(A', C') + d(C', B')$$

ce qui prouve que A', B', C' sont alignés et que C' est entre A' et B'.

Si on suppose de plus que C est le milieu de [AB], on a $d(A, C) = d(C, B)$ donc aussi $d(A', C') = d(C', B')$, ce qui prouve que C' est le milieu de (A' B')'

Il en résulte que f vérifie les hypothèses du théorème 1.

Plan d'étude des isométries.

Le théorème central (3) étant établi, on démontre successivement les propositions qui suivent.

Théorème 4. — *Si f est une isométrie, l'application linéaire f_o associée à f conserve le produit scalaire, soit :*

quels que soient $u, v \in E_o$, *on a* $f_o(u).f_o(v) = u.v$.

Démonstration. — D'après le théorème 1, on a $f_o(\overrightarrow{AB}) = f(B) - f(A)$,

donc $$\|f_o(\overrightarrow{AB})\| = d[f(A), f(B)] = d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

ce qui prouve que f_o conserve la norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ quelconque.

Or le produit scalaire $u.v$ s'exprime au moyen de normes par

$$4\, u.v = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2$$

La conservation des normes entraîne donc celle du produit scalaire.

Théorème 5. — *Si f est une isométrie, l'image par f_o d'un système libre de vecteurs est un système libre de vecteurs.*

Supposons en effet que les vecteurs $f_o(u_1) f_o(u_2)\ldots f_o(u_n)$ soient liés par $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_o(u_i) = 0$, les nombres λ_i étant non tous nuls. On aurait alors (puisque f_o est linéaire) : $f_o(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i u^i) = 0$, donc

$$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\| = \|f_o(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i)\| = 0,$$

ce qui montre que les vecteurs u_i ne sont pas indépendants.

Corollaire. — Si E_o est de dimension finie n, l'image d'une base par f_o est une base.

En effet une base est un système libre de n vecteurs; son image par f_o est un système libre de n vecteurs, donc une base.

On en déduit :

Théorème 6. — *Si* E *est de dimension finie* n, *l'image par une isométrie d'un repère orthonormal de* E *est un repère orthonormal.*

Inversement, si $\{O; e_1\ldots e_n\}$ *et* $\{O'; e'_1\ldots e'_n\}$ *sont deux repères orthonormaux quelconques, il existe une isométrie* f *et une seule qui amène le premier sur le second, autrement dit telle que*

$$f(O) = O' \text{ et } f_o(e_i) = e'_i \text{ pour tout } i = 1, 2,\ldots n.$$

La première partie de ce théorème résulte de ce qui précède. Dans la seconde partie l'unicité de f provient du fait qu'une application affine f est entièrement déterminée par la donnée d'un repère et de son image, puisqu'on doit avoir :

$$(1) \qquad f(O + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = f(O) + \sum_{i=1}^{n} x_i f_o(e_i);$$

et l'existence de f se prouve en vérifiant que l'application f définie par

$$f(O + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = O' + \sum_{i=1}^{n} x_i e'_i$$

est bien une isométrie : cela résulte de ce que les repères sont orthonormaux.

Nous ne pousserons pas plus avant l'étude des isométries des espaces euclidiens de dimension finie, qui se poursuit par des procédés élémentaires, et nous bornerons à énoncer encore une propriété valable en dimension infinie.

Théorème 7. — *Une isométrie involutive de* E *se réduit à une symétrie par rapport à l'ensemble* H *de ses points doubles.*

Démonstration. — L'isométrie f étant involutive, le milieu du segment $[M, f(M)]$ est un point invariant, quel que soit $M \in E$ (puisqu'il doit se transformer en le milieu de $[f(M), f^2(M)]$); inversement, si M est un point invariant, il est le milieu du segment $[M, f(M)]$, puisque ce segment se réduit au point M. Il en résulte que l'ensemble H des points doubles de f est l'ensemble des points $\frac{1}{2}[M + f(M)]$ lorsque M parcourt E. De plus, puisque f est affine, H est un sous-espace affine de E (car si A et B sont deux points invariants, tout point de la droite AB est invariant).

Si H se réduit à un point, la proposition est évidente; sinon, désignons par M un point quelconque de E, par $M' = f(M)$ son image, par M_1 le milieu de $[M\,M']$ et par P un point quelconque de H distinct de M_1. On a

$$d(M', P) = d[f(M), f(P)] = d(M, P)$$

soit $$\overrightarrow{PM'}^2 - \overrightarrow{PM}^2 = (\overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{PM}).(\overrightarrow{PM'} - \overrightarrow{PM}) = 0.$$

Le point M_1, défini par

$\overrightarrow{PM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{PM})$ satisfait donc à $\overrightarrow{PM_1}.\overrightarrow{MM'} = 0$.

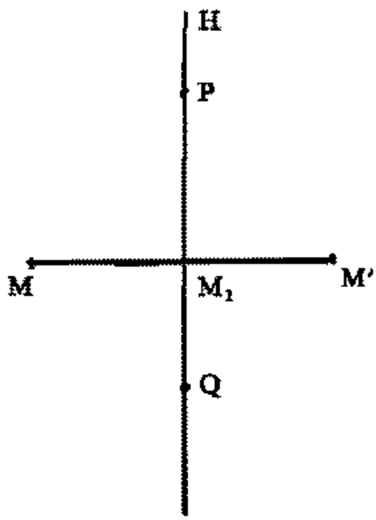

FIG. 2.

Si Q désigne un autre point de H, on a de même $\overrightarrow{QM_1}.\overrightarrow{MM'} = 0$, donc par différence : $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{MM'} = 0$: la droite MM_1M', perpendiculaire à toute droite de H, sera dite perpendiculaire à H; et nous allons voir que le point M_1 est entièrement caractérisé par les deux conditions :

(1) $$M_1 \in H \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MM_1} \perp H.$$

En effet, s'il existait un autre point M_2 satisfaisant aux mêmes conditions, on aurait $\overrightarrow{MM_1}.\overrightarrow{M_1M_2} = 0 = \overrightarrow{MM_2}.\overrightarrow{M_1M_2}$ donc (par différence) :

$\overrightarrow{M_1M_2}^2 = 0$, soit $M_1 = M_2$, contrairement à l'hypothèse.

Nous pouvons donc dire, sans ambiguïté, que M_1 est la *projection* de M sur H, et que M' est le *symétrique* de M par rapport à H.

Remarques. 1) Bien entendu, les démonstrations se simplifient lorsqu'on est dans l'espace euclidien usuel, car on n'a pas besoin de redémontrer, comme nous l'avons fait, les propriétés des perpendiculaires!

2) Pour avoir une réciproque, et pouvoir définir une isométrie à partir de la donnée d'un espace affine H, il faut, si l'on est dans un espace de dimension infinie, supposer que H est complet; sinon on ne peut affirmer l'existence de la projection de M sur H.

3. Triangles semblables, similitudes.

La théorie des triangles semblables, si décriée qu'elle soit, n'en est pas moins vraie dans les espaces préhilbertiens réels de dimension infinie, où on définit l'angle θ (non orienté) de deux vecteurs u, v quelconques par

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\ \|v\|}$$

Les cas de similitude résultent alors (1) des formules bien connues $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ etc... et des relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad A + B + C = \Pi$$

qui s'en déduisent par voie algébrique si l'on choisit les déterminations des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ (définis par leurs cosinus) comprises entre O et Π.

Comme application des cas de similitude, nous allons établir le théorème suivant, dont la démonstration algébrique est plutôt pénible.

Théorème 8. — *Pour qu'une transformation linéaire de l'espace préhilbertien* H_0 *soit conforme* (*i.e. qu'elle conserve l'angle de deux vecteurs quelconques*), *il faut et il suffit que ce soit le produit d'une isométrie et d'une homothétie.*

Précisons d'abord qu'une homothétie de H_0 est une application de la forme $u \mapsto \lambda u$, où λ est une constante, appelée rapport d'homothétie. On voit immédiatement qu'une telle application h commute avec toute transformation linéaire g de H_0; de plus, si g est une isométrie, l'application $f = g \circ h = h \circ g$ satisfait à

$$\|f(u)\| = \|h(u)\| = |\lambda|\ \|u\|,$$
$$\|f(v)\| = \|h(v)\| = |\lambda|\ \|v\|$$

(1) Je n'avais choisi cette démonstration « algébrique », critiquée par M. Frenkel, que pour abréger le présent exposé : je ne propose absolument pas de la substituer aux démonstrations usuelles. Il faut remarquer à ce propos que toute démonstration des cas d'égalité (ou de similitude) des triangles, valable dans le plan reste valable dans un espace préhilbertien quelconque : en effet, on peut toujours établir une correspondance isométrique entre deux « plans » quelconques de cet espace, donc entre les plans des triangles considérés. On trouvera les détails dans l'exposé de M. Frenkel.

et $f(u).f(v) = h(u).h(v) = \lambda^2\, u.v$, quels que soient u, $v \in H_o$. Donc l'angle des vecteurs $f(u)$, $f(v)$ est égal à l'angle des vecteurs u, v.

Inversement, soit f une transformation linéaire de H_o conservant les angles ; cette condition équivaut à :

(1) $$(\forall u, v \in H_o) \quad \frac{f(u).f(v)}{\|f(u)\|\ \|f(v)\|} = \frac{u.v}{\|u\|\ \|v\|}$$

et pour prouver que f est le produit d'une homothétie par une isométrie, il suffit de prouver que le rapport $\lambda = \dfrac{\|f(u)\|}{\|u\|}$ est indépendant du vecteur u : car si h désigne l'homothétie de rapport λ, et h^{-1} sa réciproque, le produit $h^{-1}\circ f$ sera une isométrie g et on aura $f = h\circ g$.

Supposons donc la condition (1) vérifiée;
posons $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$, $f(\vec{u}) = \overrightarrow{OA'}$, $f(\vec{v}) = \overrightarrow{OB'}$.

On a alors $\overrightarrow{A'B'} = f(\overrightarrow{AB})$ et d'après les hypothèses, les angles du triangle A'B'C' sont égaux aux angles correspondants du triangle ABC, ce qui entraîne

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}, \text{ soit } \frac{\|f(\vec{u})\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{f(\vec{v})}{\|\vec{v}\|}$$

En laissant $\vec{v}$ fixe et en faisant varier $\vec{u}$ dans H_o, on en déduit que le rapport $\dfrac{\|f(\vec{u})\|}{\|\vec{u}\|}$ est constant.

Le théorème 8 étant établi, on pourra appeler *similitude*, dans l'espace affine H, toute application affine de H dans H conservant l'angle de deux vecteurs quelconques; et on saura qu'une similitude est le produit d'une isométrie et d'une homothétie (de centre quelconque).

Conclusion. — Il y a d'autres théorèmes de géométrie élémentaire qui restent valables en dimension infinie : et le lecteur aura sans doute remarqué lui-même que la théorie des barycentres, ainsi que les applications métriques de cette théorie (ensemble des points satisfaisants à $\Sigma\lambda_i\, MA_i^2 = \text{cte}$) ne supposent nullement que notre espace soit de dimension finie. Chaque fois qu'il en est ainsi, il me semble préférable de donner la priorité aux démonstrations géométriques, sans avoir recours à la géométrie analytique.

Comme j'ai essayé de le montrer dans les pages qui précèdent, il n'est point nécessaire pour cela d'introduire explicitement les notions générales d'espace de Hilbert ou même d'espace affine — ni d'utiliser un langage au-dessus du niveau de la classe; mais il me semble essentiel que les auteurs de manuels aient présente à l'esprit la généralité des théorèmes qu'ils démontrent.

L'exposé en gagnera en simplicité, et peut-être, ainsi, pourrons-nous mieux encourager les vocations mathématiques.