3

*dans nos classes*

# Initiation aux espaces vectoriels*

par Maurice Glaymann
*I.R.E.M. de Lyon*

## 1. Introduction.

L'enseignement de la géométrie au niveau de l'initiation (12 à 14 ans) pose un problème ardu. Nous connaissons tous les difficultés et les pièges qui se présentent dès que l'on aborde la géométrie traditionnelle, axée uniquement sur des concepts métriques. Pendant très longtemps, les professeurs ont pensé que c'étaient les seuls concepts que les jeunes enfants étaient capables de comprendre et d'utiliser. En fait, cette tendance a été érigée en dogme, et au sein de ce dogme « les cas d'égalité des triangles » se dressaient tels un des sept piliers de la sagesse.

Une bonne initiation à la géométrie consiste à partir de la notion d'*espace vectoriel sur le corps des réels*; les applications linéaires et le produit scalaire seront alors des outils efficaces pour construire les concepts fondamentaux de la géométrie. Ainsi, non seulement nous présenterons aux élèves de solides bases, mais en outre nous mettrons en évidence des idées qui pourront servir dans bien d'autres branches de la mathématique. Car en effet, ce qui importe ce n'est pas d'apprendre aux enfants à résoudre tel ou tel type de problème, mais de leur permettre d'utiliser des concepts suffisamment généraux et de leur préparer l'avenir.

Il est clair qu'il n'est pas possible de présenter de prime abord, la notion d'espace vectoriel sur le corps des réels, à des enfants de 12 ans. Cependant, des recherches récentes ont montré qu'il est tout à fait pensable d'initier entre 12 et 14 ans, les enfants aux concepts suivants :

1. Groupes finis et groupes opérant sur un ensemble.
   Groupes infinis (par exemple $(\mathbb{Z}, +)$).

(*) Cette étude a fait l'objet d'un exposé au cours des journées d'étude de l'A.P.M.E.P., à Besançon, en juin 1969.

2. Congruences modulo $n$.
Exemples d'anneaux et de corps finis.
Anneaux et corps infinis (par exemple $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et $(\mathbb{Q}, +, \times)$).

3. Exemples de modules (sur un anneau fini).
Exemples d'espaces vectoriels (sur un corps fini).

4. Introductinn à la notion d'application linéaire.

Je me propose de donner ici quelques exemples d'espaces vectoriels sur un corps fini.

## 2. Etude d'une situation.

G désigne l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Munissons l'ensemble G de l'addition modulo 5; $(G, +)$ est un groupe commutatif.

Formons alors le produit cartésien $G^2 = G \times G$, c'est l'ensemble des couples $(x, y)$ avec $x \in G$ et $y \in G$.

Représentons géométriquement $G^2$.

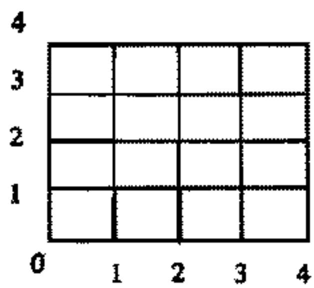


FIG. 1.

Nous pouvons considérer $G^2$ comme un ensemble de points.
$G^2$ est un plan *affine* qui contient 25 points.

Un point M de ce plan sera noté $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $a \in G$ et $b \in G$.

On écrira
$$M = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons alors définir des *applications* de $G^2$ dans $G^2$
$$\varphi : G^2 \to G^2$$
de la manière suivante :

$u$ et $v$ étant deux éléments de G, au point $M = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, l'application $\varphi$ fait correspondre le point $N = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$, avec :
$$\left| \begin{array}{l} a' = a + u \pmod 5 \\ b' = b + v \pmod 5 \end{array} \right.$$

soit :

$$\varphi : M \mapsto N$$

$$\varphi : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + u \\ b + v \end{pmatrix}.$$

Nous noterons

$$\varphi = (u, v).$$

Il est facile de démontrer que l'application $\varphi$ est une bijection de $G^2$; en effet :

1) Supposons

$$\varphi(P) = \varphi(Q)$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

il vient

$$\begin{cases} x + u = x' + u \\ y + v = y' + v \end{cases}$$

$(G, +)$ étant un groupe, les éléments $u$ et $v$ sont *réguliers*, donc

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad P = Q$$

Ainsi,

$$\varphi(P) = \varphi(Q)$$

entraine

$$P = Q$$

$\varphi$ est une *injection*.

2) Quel que soit le point $P = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, il existe un point $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que

$$\varphi(Q) = P$$

en effet,

$$\begin{cases} x + u = X \\ y + v = Y. \end{cases}$$

Chacune de ces deux équations possède une solution unique dans le groupe $(G, +)$; il en résulte que tout point P est l'image par $\varphi$ d'un point Q.

$\varphi$ est une *surjection*.

Ainsi, l'application $\varphi$ est une bijection de $G^2$; par analogie avec la géométrie traditionnelle nous dirons que $\varphi$ est une *translation* du plan affine $G^2$.

Désignons par $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations du plan affine $G^2$. Cet ensemble $\mathcal{T}$ possède 25 éléments.

Il est naturel de définir une loi de composition sur l'ensemble $\mathcal{T}$. Considérons deux translations :

$$T_1 = (u_1, v_1) \qquad \text{et} \qquad T_2 = (u_2, v_2)$$

$P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un point quelconque du plan affine;

$T_1$ transforme P en Q,
puis $T_2$ transforme Q en S.
Existe-t-il une translation $T_3$ qui transforme P en S?

S'il existe une telle translation $T_3 = (u_3, v_3)$, nous devons avoir, quels que soient $a$ et $b$ :

$$\begin{cases} (a + u_1) + u_2 = a + u_3 \\ (b + v_1) + v_2 = b + v_3. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "T_1"] \arrow[dr, "T_3"'] & Q \arrow[d, "T_2"] \\ & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \arrow[r, "T_1"] \arrow[dr, "T_3"'] & \begin{pmatrix} a + u_1 \\ b + v_1 \end{pmatrix} \arrow[d, "T_2"] \\ & \begin{pmatrix} (a + u_1) + u_2 \\ (b + v_1) + v_2 \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

FIG. 2.

L'addition dans G étant associative, et comme $a$ et $b$ sont réguliers, il vient :

$$\begin{cases} u_3 = u_1 + u_2 \\ v_3 = v_1 + v_2 \end{cases}$$

Ceci permet de définir une addition dans l'ensemble $\mathcal{T}$ :

$$\mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$$
$$(T_1, T_2) \mapsto T_3 = T_1 + T_2$$

En partant des propriétés du groupe $(G, +)$ il est facile de démontrer que $(\mathcal{T}, +)$ est aussi un groupe commutatif.

1. La loi + est associative : quels que soient $T_1$, $T_2$, $T_3$ éléments de $\mathcal{T}$

$$T_1 + (T_2 + T_3) = (T_1 + T_2) + T_3.$$

2. La translation $\mathcal{O} = (0, 0)$ est *neutre* :
Quel que soit T élément de $\mathcal{T}$

$$\mathcal{O} + T = T + \mathcal{O} = T.$$

3. Tout élément T de $\mathcal{T}$ possède un *symétrique* $T'$ :
si $T = (u, v)$ et si $u'$ et $v'$ sont les symétriques de $u$ et $v$ dans $(G, +)$

$$T + T' = T' + T = \mathcal{O}.$$

4. La loi + est *commutative* :
Quels que soient les éléments $T_1$ et $T_2$ de T

$$T_1 + T_2 = T_2 + T_1.$$

Le groupe $(\mathcal{T}, +)$ *opère transitivement et fidèlement* sur le plan affine $G^2$.

En effet, quels que soient les points A et B de $G^2$, il existe une translation unique T de $\mathcal{T}$ telle que :

$$T : A \mapsto B.$$

En posant $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, il existe un couple unique $(u, v)$ tel que :

$$\begin{cases} x + u = x' \\ y + v = y'. \end{cases}$$

Ceci résulte une fois encore des propriétés du groupe $(G, +)$.

Avant d'aller plus loin, il est très important d'inciter les enfants à utiliser et à découvrir des propriétés du groupe ($\mathcal{C}$, +). Dans ce but, nous pouvons adapter à cette situation « *le golf mathématique* » de P. C. Rosembloom.

On se donne une translation $T_1$, par exemple $T_1 = (2, 3)$.

En partant du point $A = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et en utilisant plusieurs fois de suite la translation T, est-il possible d'atteindre le point $F = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$?

Ainsi :

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{T_1} \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \xrightarrow{T_1} \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \xrightarrow{T_1} \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{T_1} \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \xrightarrow{T_1} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

En partant du point A, la translation $T_1$ ne permet de passer que par les *cinq* points A, B, C, D et E, puis l'on revient en A.

Il est impossible d'aller de A en F en utilisant uniquement la translation $T_1$.

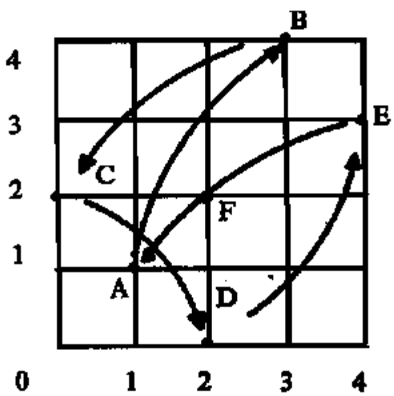


FIG. 2.

On peut demander aux enfants pourquoi on ne passe que par cinq points.

En sera-t-il toujours de même, en prenant un autre point de départ?

En sera-t-il toujours de même, en prenant une autre translation?

Partons du point $M = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et utilisons la translation $T = (u, v)$.

Nous avons successivement :

$$T : \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}a+u\\b+v\end{pmatrix}$$

$$T : \begin{pmatrix}a+u\\b+v\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}a+u+u\\b+v+u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+2u\\b+2v\end{pmatrix} \quad \text{en posant} \quad \begin{cases} u+u=2u\\ v+v=2v\end{cases}$$

$$T : \begin{pmatrix}a+2u\\b+2v\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}a+3u\\b+3v\end{pmatrix}$$

$$T : \begin{pmatrix}a+3u\\b+3v\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}a+4u\\b+4v\end{pmatrix}$$

$$T : \begin{pmatrix}a+4u\\b+4v\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}a+5u\\b+5v\end{pmatrix}$$

Or le groupe $(G, +)$ est *cyclique* d'ordre 5; quel que soit $u$ élément de $G_1(u \neq 0)$, $5u = 0$.

Il en résulte que :

$$T: \begin{pmatrix} a + 4u \\ b + 4v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ainsi, en partant d'un point quelconque M et en utilisant une translation quelconque (différente de $O$), on revient au point A en passant par cinq points différents.

En partant toujours du point $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et en utilisant cette fois la translation $T' = (4, 1)$, pouvons nous atteindre le point F?

Dans ce cas nous avons :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{T'} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{T'} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{T'} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{T'} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T'} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous repassons par les mêmes points que dans le cas précédent, mais pas dans le même ordre. Le point F ne peut pas être atteint.

Pourquoi repassons-nous par les mêmes points?

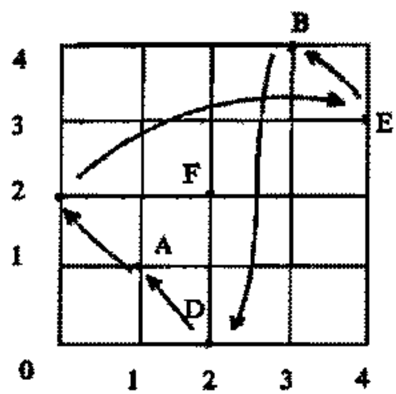


Fig. 3.

Composons la translation $T_1$ avec elle-même :

$$T_1 + T_1 = (2, 3) + (2, 3) = (4, 1).$$

Il s'ensuit que

$$T' = T_1 + T_1,$$

Les translations $T_1$ et $T'$ sont « *linéairement dépendantes* ».

Ceci nous permet d'écrire :

$$T' = 2T_1$$

d'où l'idée de définir une *loi de composition externe*

$$G \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$$
$$(\alpha, T) \mapsto \alpha . T.$$

Avant d'aller dans cette direction, reprenons le point $A = \binom{1}{1}$ et la translation $T_2 = (2, 4)$, peut-on atteindre le point $F = \binom{2}{2}$?

$$\binom{1}{1} \xrightarrow{T_2} \binom{3}{0} \xrightarrow{T_2} \binom{0}{4} \xrightarrow{T_2} \binom{2}{3} \xrightarrow{T_2} \binom{4}{2} \xrightarrow{T_2} \binom{1}{1}.$$

Nous passons par d'autres points que dans les cas précédents, mais nous n'atteignons toujours pas le point F!

Nous pouvons maintenant utiliser les deux translations $T_1$ et $T_2$; est-il possible en partant du point A d'atteindre le point F?

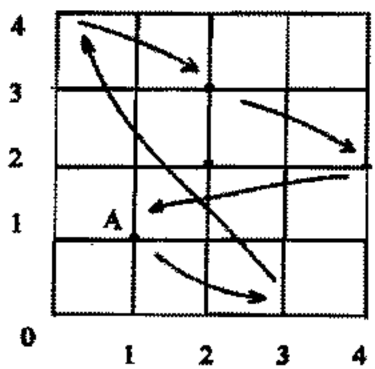


FIG. 4.

Cette fois nous obtenons le schéma suivant qui tient compte de la commutativité du groupe $(\mathcal{T}, +)$.

$$\begin{tikzcd}
\binom{1}{1} \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "T_2"'] & \binom{3}{4} \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "T_2"'] & \binom{0}{2} \arrow[r, "T_1"] \arrow[d] & \binom{2}{0} \arrow[r, "T_1"] \arrow[d] & \binom{4}{3} \arrow[r, "T_1"] \arrow[d] & \binom{1}{1} \arrow[d] \\
\binom{3}{0} \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "T_2"'] & \binom{0}{3} \arrow[r] \arrow[d, "T_2"'] & \binom{2}{1} \arrow[r] \arrow[d] & \binom{4}{4} \arrow[r] \arrow[d] & \binom{1}{2} \arrow[r] \arrow[d] & \binom{3}{0} \arrow[d] \\
\binom{0}{4} \arrow[r] \arrow[d, "T_2"'] & \binom{2}{2} \arrow[r] \arrow[d] & \binom{4}{0} \arrow[r] \arrow[d] & \binom{1}{3} \arrow[r] \arrow[d] & \binom{3}{1} \arrow[r] \arrow[d] & \binom{0}{4} \arrow[d] \\
\binom{2}{3} \arrow[r] \arrow[d, "T_2"'] & \binom{4}{1} \arrow[r] \arrow[d] & \binom{1}{4} \arrow[r] \arrow[d] & \binom{3}{2} \arrow[r] \arrow[d] & \binom{0}{0} \arrow[r] \arrow[d] & \binom{2}{3} \arrow[d] \\
\binom{4}{2} \arrow[r] \arrow[d, "T_2"'] & \binom{1}{0} \arrow[r] \arrow[d] & \binom{3}{3} \arrow[r] \arrow[d] & \binom{0}{1} \arrow[r] \arrow[d] & \binom{2}{4} \arrow[r] \arrow[d] & \binom{4}{2} \arrow[d] \\
\binom{1}{1} \arrow[r] & \binom{3}{4} \arrow[r] & \binom{0}{2} \arrow[r] & \binom{2}{0} \arrow[r] & \binom{4}{3} \arrow[r] & \binom{1}{1}
\end{tikzcd}$$

Nous constatons ici que :

$$\binom{1}{1} \xrightarrow{T_1} \binom{3}{4} \xrightarrow{T_2} \binom{0}{3} \xrightarrow{T_2} \binom{2}{2}$$

En partant du point A, nous pouvons atteindre le point F.
Il existe d'autres solutions, par exemple :

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{T_2} \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{T_1} \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \xrightarrow{T_2} \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{T_2} \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{T_2} \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \xrightarrow{T_1} \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \qquad \text{etc.}$$

Nous pouvons faire deux autres observations :

1° Tous les points du plan affine $G^2$, se trouvent sur le schéma. Il s'ensuit qu'en partant d'un point quelconque de $G^2$ nous pouvons atteindre un autre point quelconque de $G^2$ à l'aide de *combinaisons* des translations $T_1$ et $T_2$.

Comme le groupe $(\mathcal{T}, +)$ opère fidèlement et transitivement sur le plan affine $G^2$, il s'ensuit que tout élément de $\mathcal{T}$ est une combinaison de $T_1$ et $T_2$.

2° La première et la dernière ligne de ce schéma sont identiques; de même, la première et la dernière colonne sont identiques. Nous obtiendrons une représentation intéressante de cette situation en dessinant ce schéma sur un *tore*.

Nous pouvons maintenant revenir sur la loi de composition externe :

$$G \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$$
$$(\alpha, T) \mapsto \alpha . T$$

en posant $T = (u, v)$, $\alpha . T = (u', v')$ avec

$$u' = \alpha u (\text{mod } 5)$$
$$v' = \alpha v (\text{mod } 5).$$

C'est ici que va intervenir la seconde loi définie sur G, par conséquent le corps

$$(G, +, \times).$$

L'ensemble $\mathcal{T}$ muni de l'addition $(+)$ et de la loi de composition externe $(.)$ est un *espace vectoriel* sur le corps G.

Il est facile de vérifier les axiomes :

1° Quel que soit l'élément $\alpha$ de G et, quels que soient les éléments $T_1$ et $T_2$ de $\mathcal{T}$

$$\alpha . T(_1 + T_2) = \alpha . T_1 + \alpha . T_2.$$

2° Quels que soient les éléments $\alpha$ et $\beta$ de G et quel que soit l'élément T de G

$$(\alpha + \beta) . T = \alpha . T + \beta . T$$

3° Quels que soient les éléments $\alpha$ et $\beta$ de G et quel que soit l'élément T de $\mathcal{T}$

$$\alpha . (\beta . T) = (\alpha\beta) . T$$

4° Quel que soit l'élément T de $\mathcal{T}$

$$1 . T = T.$$

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont les *vecteurs* de l'espace vectoriel.

En prenant une origine dans le plan affine $G^2$, le point $0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ par exemple, nous obtenons l'espace pointé $(G^2, 0)$ qui est un espace vectoriel isomorphe à l'espace vectoriel $(\mathcal{T}, +, .)$.

Le golf mathématique nous a permis de préparer des notions importantes :

*a) Système générateur de vecteurs*

Tout vecteur T de $\mathcal{T}$ est une combinaison des vecteurs $T_1 = (2, 3)$ et $T_2 = (2, 4)$; ainsi par exemple pour $T = (0, 2)$, nous avons :

$$T = \alpha . T_1 + \beta . T_2$$

soit

$$(0, 2) = \alpha .(2, 3) + \beta .(2, 4)$$

et

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha + 2\beta \\ 2 = 3\alpha + 4\beta \end{cases}$$

on en déduit

$$\begin{cases} \alpha = 4\beta \\ 2 = 2\beta + 4\beta \end{cases}$$

soit

$$\beta = 2 \qquad \text{et} \qquad \alpha = 3$$

d'où

$$T = 3 . T_1 + 2 . T_2$$

Si pour un système $\{T_1, T_2\}$, tout vecteur T de $\mathcal{T}$ est une combinaison de ces vecteurs, le système est dit *générateur*.

*b) Système libre*

Reprenons les deux vecteurs :

$$T_1 = (2, 3) \qquad \text{et} \qquad T' = (4, 1)$$

nous avons vu que

$$T' = 2 . T_1$$

ou encore

$$T' + 3 . T_1 = 0.$$

Il existe deux éléments $\alpha$ et $\beta$ de G, non tous deux nuls, tels que :

$$\alpha . T' + \beta . T_1 = 0 \qquad (\text{avec } \alpha = 1,\ \beta = 3).$$

Le système de vecteurs $\{T', T_1\}$ est *lié*.

Par contre, pour les deux vecteurs :

$$T_1 = (2, 3) \qquad \text{et} \qquad T_2 = (2, 4)$$

l'égalité

$$\alpha . T_1 + \beta . T_2 = 0$$

conduit au système :

$$2\alpha + 2\beta = 0$$
$$3\alpha + 4\beta = 0$$

dont la solution est

$$\alpha = \beta = 0$$

Le système de vecteurs $\{T_1, T_2\}$ est tel que

$$\alpha . T_1 + \beta . T_2 = 0 \qquad \text{entraîne} \qquad \alpha = \beta = 0.$$

Ce système est *libre*.

c) *Base et dimension*

Nous venons de voir que le système de vecteurs $\{T_1, T_2\}$ est d'une part *générateur* et d'autre part *libre*.

Un tel système est une *base* de l'espace vectoriel.

Nous pouvons alors demander aux enfants d'essayer de trouver d'autres bases; ils découvriront en particulier la *base canonique* $\{I, J\}$ avec $I = (1, 0)$ et $J = (0, 1)$; les enfants vont ainsi constater que toute base de l'espace vectoriel ($\mathcal{C}$, +, .) possède *deux* éléments; ceci conduira à la notion de *dimension*. L'espace vectoriel ($\mathcal{C}$, +, .) est de dimension 2.

En étudiant maintenant les vecteurs engendrés par un vecteur nous conduirons les enfants au concept de *sous-espace* vectoriel de dimension 1 et par conséquent à la notion de *droite vectorielle*.

Ainsi, le vecteur $T_1 = (2, 3)$ engendre le sous-espace qui contient les vecteurs :

$$\begin{aligned}0.T_1 &= (0, 0)\\ 1.T_1 &= (2, 3)\\ 2.T_1 &= (4, 1)\\ 3.T_1 &= (1, 4)\\ 4.T1 &= (3, 2)\end{aligned}$$

de même, le vecteur $T_2 = (2, 4)$ engendre le sous-espace qui contient les vecteurs :

$$\begin{aligned}0.T_2 &= (0, 0)\\ 1.T_2 &= (2, 4)\\ 2.T_2 &= (4, 3)\\ 3.T_2 &= (1, 2)\\ 4.T_2 &= (3, 1).\end{aligned}$$

Les enfants vérifieront qu'il existe 6 sous-espaces vectoriels de dimension 1. Tous ces sous-espaces contiennent le vecteur $0 = (0, 0)$; c'est le *seul* vecteur commun à deux sous-espaces différents.

## 3. Conclusion.

Si nous voulons aller dans cette direction, notre rôle est de découvrir d'autres exemples d'espaces vectoriels accessibles à de jeunes enfants. Lorsqu'ils auront rencontré différents exemples, il sera alors possible de présenter le concept d'espace vectoriel par ses axiomes, dès lors nous pourrons construire sans difficulté une théorie solide de la géométrie.

M. G.

***Bibliographie.***


[1] Colomb et Glaymann. — « Jeux algébriques » (document pour la télévision; IPN, premier trimestre 1969).

[2] Duvert, Gauthier et Glaymann. — Travaux Pratiques de Mathématiques. Tome III : les lois de composition. OCDL, Janvier 1969.

[3] Glaymann. — Un modèle d'espace vectoriel et son utilisation pour coder et décoder un message. Journal of Structural Learning; janvier 1968 (Gordon and Breach).