Sur les permutations strictes et les coïncidences

Certaines questions de probabilité conduisent à envisager des permutations strictes. Nous allons définir cette notion et en étudier quelques propriétés. Puis, comme application, nous résoudrons *élémentairement* le problème des coïncidences, problème classique important que l'on n'aborde habituellement qu'au niveau de la propédeutique [1].

• DÉFINITION. — Étant donné un ensemble fini rangé P, on appelle *permutation stricte de P* toute permutation [2] de ses éléments, telle que tous changent de rang.

• PROPRIÉTÉS DU NOMBRE u_n DES PERMUTATIONS STRICTES DE n ÉLÉMENTS.

1) *Les nombres u_n vérifient la relation de récurrence* :

(1) $$u_n = (n-1)(u_{n-1}+u_{n-2});$$

Les 10 premières valeurs sont donc :

$$0,\ 1,\ 2,\ 9,\ 44,\ 265,\ 1\,854,\ 14\,833,\ 133\,496,\ 1\,334\,961.$$

Soit

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n$$

la permutation initiale P. Par raison de symétrie il y a autant de permutations strictes de P commençant par a_2 que par $a_3, a_4, \dots, a_n$. Il suffit donc de montrer que le nombre de permutations strictes P_2, de premier terme a_2, est égal à $u_{n-2}+u_{n-1}$.

Distinguons dans les P_2 les permutations P'_2 et P''_2, où le rang de a_1 est respectivement égal à 2 ou supérieur à 2. Dans une permutation P'_2 les termes $a_3, a_4, a_5, \dots, a_n$ occupent donc les rangs 3, 4, 5, ..., n, dans un ordre tel que pour chacun son rang diffère de son indice. Le nombre des P'_2 est donc u_{n-2}. Si dans une permutation P''_2 on remplaçait a_1 par a_2, les rangs 2, 3, 4, ..., n seraient occupés par $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$, dans un ordre tel que pour chacun de ces termes son rang diffère de son indice. Le nombre des P''_2 est donc u_{n-1} et le nombre des P_2 est bien $u_{n-2}+u_{n-1}$.

2) *Les nombres u_n vérifient la relation de récurrence*

(2) $$u_n = nu_{n-1}+(-1)^n.$$

Notons sa ressemblance avec

$$v_n = nv_{n-1}$$

que vérifie le nombre v_n des permutations classiques de n éléments.

Raisonnons par récurrence. La relation (2) est bien satisfaite pour $n = 3$. Si elle l'est pour n, on en tire :

$$nu_{n-1} = u_n+(-1)^{n+1}.$$

En portant cette valeur dans

$$u_{n+1} = n(u_n+u_{n-1}),$$

---

(1) Nous pensons que cette note est directement utilisable au lycée, aussi bien dans les classes préparatoires que dans les terminales D ou B et même partiellement en A.

(2) *N.D.L.R.* Notre collègue emploie le mot *permutation* dans le sens, « ensemble rangé ».

on obtient

$$u_{n+1} = nu_n + u_n + (-1)^{n+1} = (n+1)u_n + (-1)^{n+1}$$

et (2) est donc vérifiée pour $n+1$.

3) *L'expression explicite de u_n est*

(3) $$u_n = n!\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

En désignant par A_n^p le nombre des arrangements à p éléments pris dans un ensemble de n éléments, *on peut encore écrire cette formule sous la forme*

(4) $$u_n = A_n^{n-2} - A_n^{n-3} + A_n^{n-4} + \ldots + (-1)^{n-1}A_n^1 + (-1)^n.$$

Écrivons la relation (2) pour les indices inférieurs ou égaux à n :

$$\begin{array}{l|l}
u_n = nu_{n-1} + (-1)^n & \\
u_{n-1} = (n-1)u_{n-2} + (-1)^{n-1} & n \\
u_{n-2} = (n-2)u_{n-3} + (-1)^{n-2} & n(n-1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
u_3 = 2u_2 + (-1)^3 & n(n-1)(n-2)\ldots 3 \\
u_2 = 1 & n(n-1)(n-2)\ldots 3.2
\end{array}$$

Après multiplication des deux membres de chaque égalité par le facteur indiqué à sa droite, on obtient par addition (4), puis (3) par la mise en facteur de $n!$.

On peut aussi démontrer (4) directement, mais de manière moins élémentaire, comme suit :

Désignons par $N_{i,j}$ $(j \neq i)$ le nombre de permutations (y compris P) où figurent aux rangs i et j les mêmes éléments que dans P. Comme les autres éléments occupent les $(n-2)$ rangs restants,

$$N_{i,j} = (n-2)!.$$

La somme N_2 de tous les $N_{i,j}$ est donc

$$N_2 = (n-2)!C_n^2 = A_n^{n-2}.$$

Remarquons que N_2 est plus grand que le nombre de permutations présentant deux coïncidences au moins, car celles qui en présentent plus de deux y sont comptées plusieurs fois. On définit de même $N_p = A_n^{n-p}$. Si N est le nombre de toutes les permutations de n éléments, un théorème classique sur les cardinaux d'ensembles [1] donne alors :

$$N = N_0 + N_1 - N_2 + N_3 + \ldots + (-1)^{n-1}N_n.$$

En y portant $N_1 = n!$, $N_0 = u_n$, $N_n = 1$ et $N_p = A_n^{n-p}$, on obtient (4).

4) *Les nombres u_n vérifient la relation*

(5) $$(1+u)^{(n)} = n!$$

la puissance symbolique (n) signifiant que dans le développement de $(1+u)^n$, il faut remplacer u^i par u_i.

(1) Voir par exemple dans la Revue de Mathématiques Spéciales (février 1963) « Sur un théorème relatif aux ensembles » par E. Ehrhart.

Désignons cette fois par N_i le nombre de permutations qui présentent juste i coïncidences avec P, de sorte que

(6) $$N_0+N_1+N_2+\ldots+N_{n-1}=n!.$$

N_n ne figure pas dans cette somme, car si $n-1$ éléments d'une permutation y occupent le même rang que dans P, il en est évidemment de même pour l'élément restant. Or

$$N_i=u_{n-i}C_n^i=u_{n-i}C_n^{n-i},$$

car on peut choisir les i coïncidences de C_n^i façons, les autres $n-i$ éléments devant occuper les $n-i$ rangs restants, de manière que le rang de chacun diffère de son indice. Comme $N_0=u_n$, $N_{n-1}=1$ et que $u_1=0$, (6) s'écrit donc bien

$$u_n+u_{n-1}C_n^{n-1}+u_{n-2}C_n^{n-2}+\ldots+u_2C_n^2+u_1C_n^1+1=n!.$$

• Problème des coïncidences. — *On distribue deux fois les mêmes* n *objets à* n *personnes* (billets ou chapeaux par exemple, un objet par personne). *Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de coïncidence* (c'est-à-dire pour que personne ne reçoive deux fois le même objet)?

Cette probabilité est évidemment $\frac{u_n}{n!}$, ou

(7) $$p_n=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Les 7 premières valeurs de p_n sont donc à 0,0001 près :

n	p_n
1	0
2	0,5
3	0,333
4	0,375
5	0,3667
6	0,3680
7	0,3678

La suite p_n étant oscillante, les deux dernières valeurs du tableau montrent que *la probabilité p_n est pratiquement constante pour* $n>5$ *:*

$$p_n=0{,}368 \quad \text{(avec une erreur inférieure à 0,0002),}$$

soit $\frac{1}{3}$ en première approximation.

Remarquons encore que, au centième près, *p_n est de 37 % pour $n>3$*, et que

$$\lim_{n\to\infty} p_n=\frac{1}{e}\simeq 0{,}36788.$$

D'autre part *la probabilité pour qu'il y ait une coïncidence au moins est pratiquement 0,632 pour $n>5$*, car $p'_n=1-p_n$.

Ainsi si l'on distribue deux fois au hasard 100 000 billets numérotés à 100 000 personnes, un billet à chacune, une personne qui recevra deux fois le même numéro criera au miracle, et pourtant on peut parier à 2 contre 1 que le « miracle » arrivera à une personne au moins.

Ce problème peut être rapproché d'une autre question classique, très facile celle-là :

● Problème des coïncidences avec remise. — Chacune des n personnes prend deux fois au hasard l'un des n billets d'un ensemble numéroté, chaque billet étant remis tout de suite, en sorte que tout tirage porte sur l'ensemble plein. *Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de coïncidence?*

Pour chaque personne la probabilité de prendre la seconde fois un billet différent est $\frac{n-1}{n}$. La probabilité composée pour qu'il en soit ainsi pour toutes les personnes est donc

$$p_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Le tableau ci-dessous donne, au millième près, les 10 premières valeurs de p_n.

n	p_n
1	0
2	0,25
3	0,296
4	0,316
5	0,328
6	0,335
7	0,340
8	0,344
9	0,347
10	0,349

Cette probabilité a les propriétés suivantes :

1) p_n croît avec n, car

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^4}\right)^n < 1.$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{e} \simeq 0{,}368$, car $p_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ et l'on sait que $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$.

3) Pour $n \geqslant 24$, p_n est constant au centième près et vaut 37 %, car $p_{24} \simeq 0{,}3603$.

4) Donc, fait remarquable et difficilement prévisible, *pour $n \geqslant 24$ la probabilité de coïncidence est, au centième près, la même qu'il y ait remise ou non.*

Quelle est, par exemple, la probabilité pour que sur un ensemble de 365 personnes une au moins meure un jour qui est un anniversaire de sa naissance?

Cette probabilité est évidemment $1-p_{365}$, soit 63 %. Il serait vain de calculer cette probabilité au millième près, car d'une part on ne tient pas compte des années bissextiles, et d'autre part la probabilité de naître ou de mourir n'est qu'approximativement la même pour tous les jours de l'année, puisqu'il y a des mois de faible natalité (mai) ou de forte mortalité (mars).

A propos de coïncidence, je voudrais encore signaler le paradoxe des voitures, que j'appelle ainsi parce que la forte probabilité en question étonne tout le monde.

• PARADOXE DES VOITURES. — Appelons *terminal d'une voiture* le nombre formé par les deux derniers chiffres de son numéro minéralogique.

Au centième près, la probabilité pour que sur 20 voitures prises au hasard deux au moins aient le même terminal est de $\frac{7}{8}$.

En effet, comme il y a 100 terminaux également possibles (1), la probabilité pour que le second terminal diffère du premier est $\frac{99}{100}$. Ceci étant réalisé, la probabilité pour que le troisième terminal diffère des précédents est $\frac{98}{100}$ et ainsi de suite. La probabilité pour que les 20 terminaux soient tous différents est donc

$$\frac{99}{100} \times \frac{98}{100} \times \frac{97}{100} \times \dots \times \frac{81}{100}$$

et la probabilité cherchée est par suite :

$$p = 1 - \frac{A_{100}^{20}}{100^{20}} \simeq \frac{7}{8}.$$

En effet la table des log $n!$ (si utile et pourtant si rare) donne :

$$\log 100! = 157{,}97000$$

$$\log\ 80! = 118{,}85\,473$$

$$\log A_{100}^{20} = 39{,}11\,527$$

$$\log \frac{A_{100}^{20}}{100^{20}} = \bar{1}{,}11\,527$$

$$\frac{A_{200}^{20}}{100^{20}} = 0{,}13\,040 \simeq \frac{1}{8}.$$

---

(1) Rigoureusement tous les terminaux ne sont pas équiprobables car de 1 à 99, le terminal 00 ne figure pas, tandis que tout autre terminal y figure juste une fois. Comme dans une série-lettres les numéros vont, par département, de 1 à 9999, le 00 figure dans une telle série 99 fois, contre 100 pour tout autre terminal. Mais la probabilité au centième près n'en est pas affectée.

On objectera peut-être aussi, que si l'on prend les 20 premières voitures d'un stationnement public, la probabilité pour que le terminal de la quatrième, par exemple, diffère des terminaux distincts précédents n'est pas rigoureusement $\frac{97}{100}$, puisque les trois premières étant enlevées de l'ensemble des voitures en circulation, il s'agit d'une probabilité « sans remise ». Mais on expliquera facilement le fait classique et utile, que si l'échantillon est faible par rapport aux parties d'une population, on commet une erreur négligeable en remplaçant, pour simplifier, le tirage *sans* remise par le tirage *avec* remise. Or le nombre de voitures de terminal donné est en France de l'ordre de 100 000. Même si, dans le stationnement, les voitures de son département sont prédominantes, l'approximation $\frac{7}{8}$ reste bien justifiée. On voit qu'elle l'est encore plus, si l'on prend les 20 premières voitures passant devant nous sur une autoroute.

En classe on pourra, à cette occasion, insister sur le fait que le modèle mathématique par lequel on traduit une situation *concrète* (physique, économique, etc.) est en général *nécessairement* approximatif; il serait donc absurde de conserver dans le résultat des décimales abusives.

On trouve de même que la probabilité pour que deux élèves au moins d'une classe de 50 aient le même jour anniversaire de naissance est

$$1 - \frac{A_{365}^{50}}{365^{50}},$$

soit 97 %.

Terminons par une réflexion générale un peu vague. Contrairement à ce qui se passe dans les exemples précédents, une coïncidence — « rencontre fortuite » dit mon dictionnaire — est ordinairement rare dans un domaine donné, mais les domaines où une coïncidence peut se produire sont nombreux. La fréquence d'une coïncidence se présente donc un peu comme une forme indéterminée zéro multiplié par l'infini. On peut en conclure qu'*il est normal qu'il vous soit arrivé ou qu'il vous arrivera une fois une chose extraordinaire*. Par exemple je ne risque pas d'oublier le numéro de mon livret de Caisse d'Épargne : c'est ma date de naissance.

E. EHRHART,
(*École Militaire, Strasbourg*).