Parenthèses et associativité

1. On voit souvent écrit, même dans de bons ouvrages : « Soit une loi de composition interne, définie sur un ensemble E, notée L. Lorsque L est associative, l'égalité :

$$a\mathrm{L}(b\mathrm{L}c) = (a\mathrm{L}b)\mathrm{L}c$$

est vraie quels que soient les éléments a, b, c de E. *On peut donc* supprimer les parenthèses, et représenter par $a\mathrm{L}b\mathrm{L}c$ l'élément $(a\mathrm{L}b)\mathrm{L}c$. »

Il en résulterait (cf. ①) que l'écriture $a\mathrm{L}b\mathrm{L}c$ ne peut avoir de sens que si L est associative.

2. Et pourtant tout le monde écrit, dans $\mathbb{Z}$ (par exemple) :

$$a-b-c$$

et chacun en comprend le sens, bien que la soustraction dans $\mathbb{Z}$ ne soit pas associative.

Alors?

3. Reprenons les choses en amont de l'associativité.

Soit L une loi de composition interne sur E (ne nous occupons pas de savoir si elle est, ou non, associative).

$a\mathrm{L}b$ a un sens; *a priori*, $a\mathrm{L}b\mathrm{L}c$ n'en a pas. Mais il n'est pas interdit de lui en donner un!

Une première convention consiste à décider que $(a\mathrm{L}b)\mathrm{L}c$ s'écrira $a\mathrm{L}b\mathrm{L}c$. Alors $[(a\mathrm{L}b)\mathrm{L}c]\,\mathrm{L}d$ s'écrira de même $a\mathrm{L}b\mathrm{L}c\mathrm{L}d$, etc.

Cette convention paraît naturelle dans les pays où on écrit de gauche à droite. (Il serait intéressant de proposer à des élèves ignorant encore les « règles de priorité » de calculer $3+5\times7$ et de voir combien d'entre eux trouveraient 56 parce que, spontanément, ils auraient effectué les opérations « de gauche à droite » au fur et à mesure qu'elles se présentent.)

Elle le paraîtrait moins aux Chinois, qui écrivent verticalement. Et peut-être des Arabes, qui écrivent de droite à gauche, opteraient-ils plutôt pour une deuxième convention :

$$a\mathrm{L}(b\mathrm{L}c) \quad \text{s'écrit} \quad a\mathrm{L}b\mathrm{L}c.$$

Dans le cas de la soustraction dans $\mathbb{Z}$, c'est la première convention qui est adoptée : $a-b-c$ signifie $(a-b)-c$ [avec la deuxième convention, il signifierait $a-(b-c)$, c'est-à-dire $(a-b)+c$].

4. La loi (dite « exponentiation »?) définie sur $\mathbb{N}^*$, qui au couple (a, b) associe a , n'est pas associative.

Que signifie :

$$a^{b^c} ?$$

Pour les uns, rien; ils se privent de cette écriture.

Les autres font remarquer que $(a^b)^c$ est égal à $a^{(bc)}$, qui peut s'écrire sans ambiguïté a^{bc}; il est donc logique de convenir que l'écriture, disponible, a^{b^c} représentera $a^{(b^c)}$.

Remarque. Si on notait a^b sous la forme aEb (E symbolisant la loi « exponentiation »), la convention $a^{b^c} = a^{(b^c)}$ serait la deuxième convention du paragraphe 3. Mais si on notait a^b sous la forme bEa, ce serait la première.

5. Enfin, si la loi est associative; les deux conventions se confondent en une seule.

Si, *avant* de savoir que L est associative, on a adopté la première convention, l'associativité *peut* s'énoncer de la façon suivante :

Quels que soient les éléments a, b, c de E, $a\text{L}b\text{L}c = a\text{L}(b\text{L}c)$ (et si on a adopté la deuxième convention : $(a\text{L}b)\text{L}c = a\text{L}b\text{L}c$).

6. Conclusion sur le plan pédagogique : tant qu'on se borne à des lois associatives, il serait dommage de se priver de l'écriture $a\text{L}b\text{L}c$ (cf. ②); mais il est absurde de la présenter comme une *conséquence* de l'associativité, semblant ainsi la rejeter par avance pour une loi non-associative (par ex. la soustraction dans $\mathbb{Z}$).

①. Objection de Jean Sargent : De l'énoncé « la loi est associative, donc on peut supprimer les parenthèses », on ne peut pas déduire l'énoncé « on peut supprimer les parenthèses, donc la loi est associative ».

Oui; mais certains élèves seraient tentés de croire le contraire, confondant $p \to q$ et $q \to p$. Cette confusion est parfois facilitée par le *donc* du langage courant qui n'est pas toujours la traduction du signe de la déduction logique; par exemple, la phrase « Je suis guéri, donc vous pouvez venir me voir » laisse entendre que « si je n'avais pas été guéri, vous n'auriez pas pu venir me voir ».

②. Du moins lorsque l'élève est prêt à supprimer les parenthèses; voir à ce propos l'article de Jacquemier, Bulletin n° 263-264, page 333.

L. Duvert.