2

Échanges

A propos du complémentaire et de la notion d'ensemble

Josette Adda,
I.R.E.M., Paris.

• Dans le *Bulletin* n° 269, on peut lire page 349 la brève remarque suivante :

« 2.3. La différence ensembliste, la différence symétrique, le complémentaire ne sont pas explicitement au programme; leurs notations respectives les plus usuelles sont : $\setminus$ (de préférence à — pour éviter toute confusion avec la soustraction), $\triangle$, et $\complement$ ou le surlignage : $A \setminus B$, $A \triangle B$, $\complement A$ ou $\bar{A}$. (On croit parfois devoir préciser $\complement$ en $\complement_E$: ce n'est pas absolument recommandable si l'on veut garder le parallélisme entre la complémentarité ensembliste et la négation logique; on dispose d'ailleurs de $E \setminus A$ pour la nuance qu'on souhaite exprimer ainsi.) »

Après en avoir parlé avec notre collègue Chevallier et sur sa demande, je vous envoie ces quelques réflexions car il me semble devoir préciser ces points un peu plus.

Rappelons d'abord, comme le fait M. Dumont, page 385 du même bulletin que le complémentaire... dépend de l'univers U' choisi. On peut alors choisir un autre sous-univers U'' contenant U' et faire constater que la partie $\bar{A}'$ qui complète A dans U' n'est pas la même que la partie $\bar{A}''$ qui complète A dans U''.

Je n'entrerai pas dans les polémiques sur les notations ($\bar{A}$ ou $\complement A$ ou $\complement_E A$); ce qui me semble indispensable, c'est que le contexte précise toujours, d'une manière ou d'une autre, par rapport à quel ensemble « référentiel » on opère la complémentation. Je pense qu'il faut surtout prendre garde aux limites de ce qui est appelé dans l'article en question « le parallélisme entre la complémentarité ensembliste et la négation logique » et ne pas risquer de faire une identification entre les deux notions.

Ce danger est réel : en effet, l'an dernier, lors d'un stage d'expérimentateurs nous avons pu discuter avec de nombreux professeurs qui avaient ainsi identifié les deux notions dans leur enseignement et qui reconnaissaient que leurs élèves ne comprenaient pas la notion de complémentarité et par suite, disaient-ils alors, la notion de négation. Or tout le monde sait bien que les enfants disent « non » très tôt et même savent nier très clairement des propositions. Un autre professeur de classe expérimentale nous a dit alors avoir très bien fait comprendre l'opération monadique de négation par la manipulation d'un interrupteur électrique; voilà en fait une interprétation excellente de l'opération négation : application d'un ensemble à deux éléments sur lui-même telle que l'image de chacun des deux éléments est l'autre élément. Par contre, l'opération de complémentation par rapport à un ensemble E est une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ qui, à tout ensemble A $(A \in \mathcal{P}(E))$ fait correspondre l'ensemble $\complement_E A$ des éléments de E qui ne sont pas éléments de A. Si l'on note « $P(x)$ » l'expression « $x \in A$ » alors les énoncés suivants sont vrais :

$$(\forall x \in E)[x \in A \Leftrightarrow P(x)]$$

$$(\forall x \in E)[x \in \complement_E A \Leftrightarrow \neg P(x)]$$

où

$$\neg P(x) \text{ est la négation de } P(x).$$

On notera que la quantification universelle qui précède le crochet est essentielle car, pour chaque x de E, « $x \in A$ » prend une et une seule des deux valeurs de vérité ainsi que $P(x)$, mais ce qui est caractéristique de A c'est qu'elles sont égales pour tous les x éléments de A.

Donc, pour exprimer la complèmentarité, on a besoin d'utiliser non seulement le connecteur de négation mais aussi le quantificateur universel.

Si j'ai tenu à écrire ces précisions, c'est parce que la confusion entre langage du calcul des propositions et langage du calcul des prédicats que l'on risque de faire ici se retrouve de façon très générale dans l'enseignement secondaire. Je pense que cela est dû, en grande partie, au fait que, malencontreusement, les programmes de Sixième introduisent les opérations sur les parties d'un ensemble avant que ceux de Cinquième n'introduisent le calcul propositionnel et certains (enseignants, manuels, etc.) sont tentés de considérer que le calcul des « attributs » est exactement identique à celui des propositions. En fait, le premier *contient* le second de la même façon que, par exemple, le calcul sur les fonctions numériques sur $\mathbb{R}$ contient en particulier le calcul sur les éléments de $\mathbb{R}$ (les réels étant alors considérés comme des fonctions constantes) mais personne ne songerait dans ce cas à faire une identification alors que, malheureusement, pour ce qui est de la logique, on se permet de ces libertés !...

D. Lacombe (cours polycopiés de maîtrise - Chapitre I section C et chapitre II section A-21) montre comment la négation peut être considérée comme complémentation dans le cas d'un ensemble à deux éléments, l'ensemble des valeurs de vérité qu'il identifie à $\mathcal{P}(\{\varnothing\})$.

• Après ces remarques sur les parties d'un ensemble particulier (donné, fixé, etc.), je voudrais aussi dire un mot au sujet du préambule de l'article de M^me^ Touyarot sur les relations page 363; je crains que la phrase :

... « personne n'oserait définir la notion d'ensemble, mais chacun conçoit bien quel genre d'objet est désigné sous ce nom, et tout le monde le conçoit semble-t-il de la même façon (depuis que la crise des paradoxes est passée) », ne soit mal interprétée.

Certes il serait, je le pense aussi, aberrant de *définir* la notion d'ensemble en classe de Sixième mais je crois qu'il est bon que les professeurs, eux, sachent que les ensembles qu'utilisent les mathématiciens sont définis axiomatiquement. Certes tous ne choisissent pas de se placer dans la même théorie, ils n'adoptent pas tous exactement le même système d'axiomes (la situation est la même que pour les différentes géométries, par ex., euclidienne, hyperbolique, etc.).

Le système le plus simple et dans lequel on peut interpréter tous les résultats utilisés par les élèves du secondaire est le système (dit de Zermelo) :

1. *Axiome d'extensionnalité :* Si deux ensembles ont les mêmes éléments, ils sont égaux.
2. *Axiome des parties :* Pour tout ensemble E, il existe un ensemble dont les éléments sont les parties de E.
3. *Axiome de la réunion :* Si E est un ensemble, il existe un ensemble dont les éléments sont des éléments de E.
4. *Axiome de compréhension :* Pour tout ensemble E, il existe un ensemble dont les éléments sont les éléments de E satisfaisant une « propriété » donnée (l'expression « propriété » étant elle aussi définie avec rigueur).
5. *Axiome de l'infini :* Il existe au moins un ensemble infini.

Si j'ai cité ces axiomes, c'est, en particulier, pour que les enseignants ne soient pas tentés d'en faire des « *démonstrations* » comme on le voit quelquefois pour l'axiome d'extensionnalité qui est d'ailleurs pris, d'autres fois, comme « *définition* » de l'égalité des ensembles alors qu'il s'agit d'un *axiome* reliant les deux « relations » d'égalité et d'appartenance (il s'agit là, évidemment, de « relations » sur la collection de tous les ensembles).

Il me paraît, d'autre part, important que les enseignants sachent bien que toute collection n'est pas un ensemble (1) (exemples de collections qu'on ne doit pas considérer comme des ensembles : la collection de tous les ensembles, la collection de toutes les situations, la collection de tous les poissons...). En fait, la plupart des exemples « concrets » que l'on cite dans les cours récents constituent des collections qui ne sont pas des ensembles. Ils sont, en somme trop « vagues ». N'oublions pas que c'est pour les mathématiques que la notion d'ensemble a été introduite. Il me paraît important que les maîtres ne répugnent pas à employer le mot de « collection » dans les cas imprécis ou douteux, comme il s'en présente dans toute approche intuitive, en particulier dans l'enseignement primaire.

L'enseignement des mathématiques ne doit pas céder au snobisme des mots, il doit être, en particulier, un apprentissage de la rigueur de pensée.

Josette Adda,
(I.R.E.M., Paris).

(1) Cf. l'article « Ensembles » de la brochure « Remarques sur les programmes de Sixième » de l'I.R.E.M. de Paris.