Le nombre d'or à Notre-Dame-du-Port

Guy MOURLEVAT,
professeur de lettres (C.R.D.P. Clermont).

Introduction et Analyse.

« Après toutes les belles études publiées sur Notre-Dame du Port, il semble vain de vouloir, une fois de plus, analyser ce monument. Nombreux sont, en effet, les auteurs qui l'ont décrit et parmi eux des maîtres de la science archéologique. »

Voilà les termes par lesquels H. et E. Du Ranquet présentaient leur ouvrage en 1932.

Nous pourrions aujourd'hui les reprendre à notre compte; mais il nous semble plus vrai de dire que l'inépuisable richesse de la basilique n'a sans doute pas encore livré tous ses secrets et qu'il reste beaucoup à faire.

Certes, les archives ont été inventoriées et dépouillées; le hasard seul révèlerait aujourd'hui un texte inconnu. Les estampes anciennes ont été examinées. L'histoire du bâtiment, des dévastations, des reconstructions, des remaniements est faite. Les costumes, les armes des personnages sculptés aux chapiteaux ont été analysés et leur datation établie. Les inscriptions ont été déchiffrées, les particularités du roman auvergnat soulignées, le plan et ses désaxements soigneusement établis.

Que reste-t-il alors?

Sensible à l'extraordinaire impression d'équilibre qui se dégage de la basilique, l'amateur que je suis fut conduit à se demander si la cause n'en serait pas une géométrie particulièrement harmonieuse. Or, on sait que, depuis Pythagore jusqu'à la Renaissance, construire selon le Nombre d'Or, c'est-à-dire 1,618 par rapport à l'unité, était un secret assez jalousement gardé par les maçons et les artistes. Il était donc séduisant de vérifier si cette proportion se retrouvait à Notre-Dame du Port. Par ailleurs, il était intéressant d'y chercher aussi les unités de mesures médiévales, en particulier le pied de 0,324 m.

La méthode de travail fut la suivante : l'étude d'un bon plan (tel qu'on en trouve dans les notices et dans les albums d'art), au compas de proportions convenablement réglé, révèle un certain nombre de combinaisons du Nombre d'Or. Il est facile alors, sur ces hypothèses, d'établir un modèle théorique du plan et d'obtenir, uniquement par le calcul, la mesure idéale des différents éléments. En second lieu, les mesures réelles sont effectuées, dans la basilique, de la façon la plus rigoureuse possible : les angles à l'aide d'un théodolite, les longueurs à l'aide d'un décamètre. Enfin, les chiffres théoriques sont comparés aux chiffres réels. La coïncidence est souvent bouleversante, toujours suggestive; et, lorsque parfois cette coïncidence semble disparaître, on s'aperçoit qu'un ensemble de « corrections » rend le mystère des mesures de la basilique plus troublant encore.

Au cours de cette étude, il apparut également qu'une équerre de 4 pieds sur 10 pieds et une corde de 20 pieds, situées aux points-clés du tracé directeur, commandaient, d'une façon aussi simple que nécessaire, le développement du plan dans le sanctuaire, aujourd'hui sur le papier comme autrefois sur le terrain. Elles déterminent en particulier le cercle des colonnes du déambulatoire et le lieu des centres des absidioles.

C'est ainsi que ce travail permit, non seulement de vérifier l'hypothèse du Nombre d'Or à Notre-Dame du Port, mais encore de montrer que, malgré les reconstructions, une indiscutable unité d'ensemble s'est conservée à travers les siècles. De plus, et ce ne fut pas la moindre surprise, nous espérons avoir deviné comment, sans autre moyen qu'un cordeau et des piquets, l'architecte médiéval et ses aides purent tisser, dans le chevet, une véritable dentelle trigonométrique.

Il est réellement surprenant que de telles investigations, même si l'on rejette le Nombre d'Or, n'aient jamais été tentées à Notre-Dame du Port. Pourtant les dessins d'un gâble et d'un arc-boutant, gravés en grandeur d'exécution sur les dalles des terrasses de la Cathédrale, pouvaient alerter l'esprit. Quelle magnifique table de dessin à même le chantier! On ne peut guère reprocher aux architectes modernes qui dressèrent les plans de la basilique d'avoir utilisé le système métrique et de ne s'être jamais tellement préoccupés de savoir comment, au Moyen-Age, on pouvait faire passer les épures sur le terrain. Mais il est rassurant de constater que ce genre de recherches est, tout à fait paradoxalement, à la portée de quiconque veut bien y consacrer un peu de son temps et c'est ce qui nous laisse espérer qu'en face des spécialistes, nous ne sommes jamais sorti des limites de la modestie.

Les considérations sur le Nombre d'Or peuvent paraître plus étranges. Pourquoi donc ces expressions qui heurtent notre mentalité? Le Nombre d'Or, la Section Dorée, la Divine Proportion! Elles datent de la Renaissance, époque où l'enthousiasme intellectuel permettait ce lyrisme exalté. PACCIOLI écrivait son traité *De Divina Proportione;* Alberti découvrait que la perspective obéissait à la géométrie. L'esprit humain dominait progressivement les lois qui régissent la pensée algébrique et celles qui permettent de reproduire fidèlement le macrocosme dans le microcosme de toute œuvre d'art. Il est donc très regrettable que, de nos jours, un certain discrédit ait frappé pendant longtemps les études sur le Nombre d'Or. Ceux qui s'y livraient ne les faisaient pas connaître et passaient souvent pour des adeptes des sciences occultes! Cela s'explique, sans doute, dans la mesure où l'on prétend donner une interprétation ésotérique qui dépasse les pures données mathématiques.

Cet ésotérisme a profondément marqué tout un aspect de la pensée antique, médiévale et même moderne. Mais, dans notre travail sur le Nombre d'Or, nous nous sommes volontairement arrêté à ce qu'il offre d'indiscutable : des mesures positives et des calculs vérifiables. Nous ne présentons pas autre chose, ici, que des chiffres et des figures de géométrie et nous prions le lecteur de nous excuser du caractère nécessairement austère et abstrait de cette étude qu'il convient de lire lentement et, si nous osons nous permettre cette recommandation, le crayon à la main.

1. Le nombre d'or.

Exposé sommaire de ses propriétés.

1. — La recherche du rectangle le plus harmonieux, ni trop carré, ni trop étiré en longueur, a conduit à poser que « le petit côté est au grand ce que le grand est à la somme des deux ». Les notations modernes permettent d'écrire :

$$\frac{b}{a}=\frac{a+b}{b}$$

soit, en multipliant les deux membres par $\frac{b}{a}$:

$$\frac{b^2}{a^2}=1+\frac{b}{a}$$

le rapport $\Phi=\frac{b}{a}$ est donc la racine positive de l'équation du 2e degré :

$$x^2-x-1=0 \qquad (1)$$

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618\ldots \qquad (2)$$

C'est le Nombre d'Or dont la figure 1 présente la construction géométrique.

2. — Soit M le milieu de AB $= a$, côté du carré de base.

Alors AD $= a\Phi$. En effet, puisque MA $=$ MB $=\frac{\text{BC}}{2}=\frac{a}{2}$ et MBC rectangle en B, MC $=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

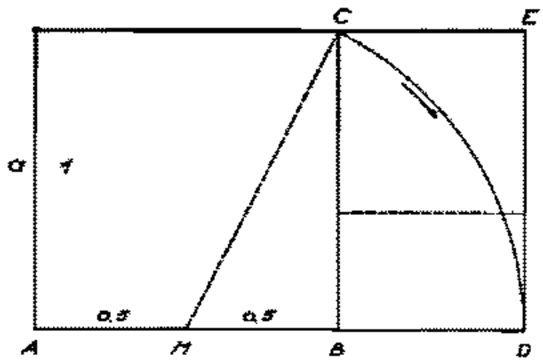


FIG. 1.

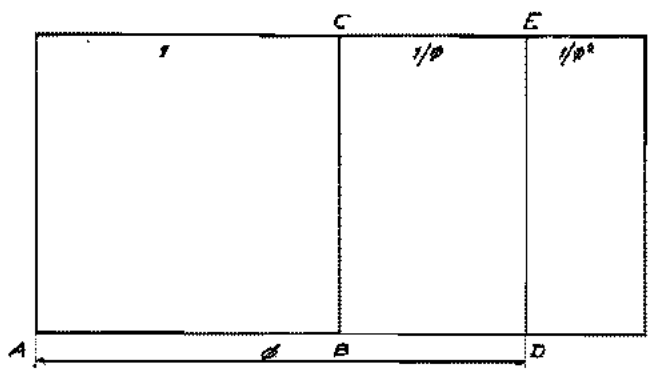


FIG. 2.

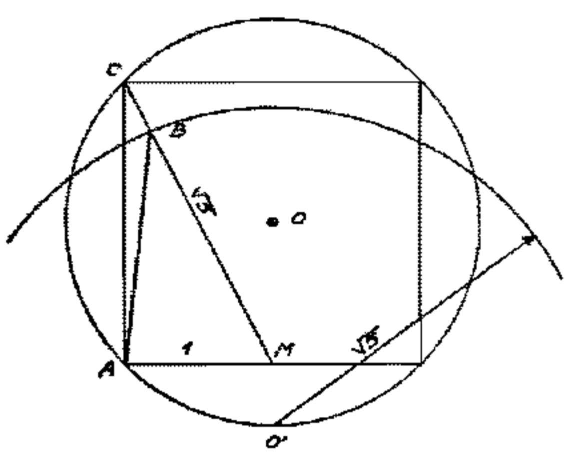


FIG. 3.

Donc : $AD = AM+MD = AM+MC = a\,\dfrac{(1+\sqrt{5})}{2} = a\Phi$.

On démontre que le petit rectangle CEBD a les mêmes propriétés que le grand et la Section Dorée est une structure qui peut se développer de l'infiniment petit à l'infiniment grand.

Pour l'étude de la nef de Notre-Dame-du-Port, il est indispensable de voir ce qui se passe lorsqu'on ajoute au petit rectangle d'Or CEBD la surface nécessaire pour avoir un second carré accolé au premier. Le calcul permet d'établir la valeur des divers éléments de la figure 2 et l'on obtient les puissances négatives de Φ.

3. — En multipliant les deux membres de l'égalité (1) en Φ, à l'aide de Φ^n, on trouve :

$$\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi \qquad (3)$$

Il est intéressant de noter que la relation (3) demeure vraie si $n \in \mathbb{Z}$.

4. — Si l'on recherche une expression de Φ^n en fonction affine de Φ (à coefficients fonctions de n, $n \in \mathbb{Z}$) on est conduit à d'autres propriétés intéressantes de Φ.

Supposons

$$\Phi^n = \alpha_n\Phi + \beta_n \qquad (4)$$

avec, bien sûr, pour $n = 1$, $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 0$.

Alors en multipliant (4) par Φ :

$$\Phi^{n+1} = \alpha_n\Phi^2 + \beta_n\Phi$$

ce qui donne, grâce à (1) :

$$\begin{aligned}\Phi^{n+1} &= \alpha_n(\Phi+1)+\beta_n\Phi\\ &= (\alpha_n+\beta_n)\Phi+\alpha_n\\ &= \alpha_{n+1}\Phi+\beta_{n+1}.\end{aligned}$$

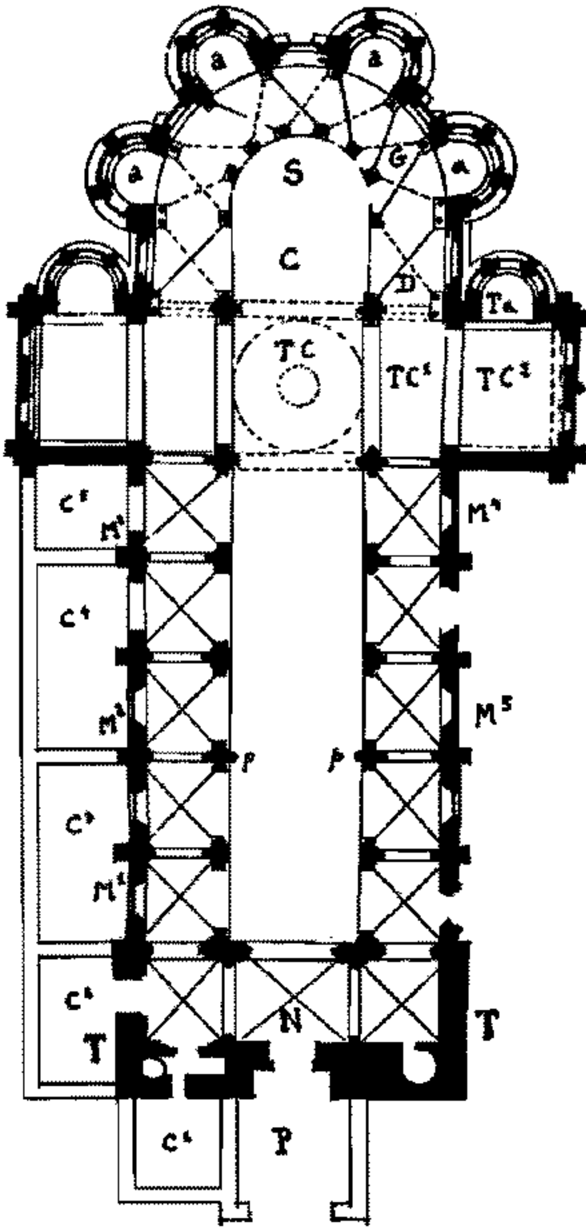
Les deux suites associées, α_n et β_n sont donc déterminées par $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 0$ par les relations de recurrence :

$$\begin{cases}\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n\\ \beta_{n+1} = \alpha_n \qquad \text{avec} \qquad n \in \mathbb{Z}.\end{cases} \qquad (5)$$

Il est facile de voir que, α_1 et β_1 étant entiers, il en est de même, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, de α_n et β_n.

5. — Il y a plus : si l'on forme, pour $n > 1$, la suite $\theta_{n-1} = \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$, on obtient la suite de Fibonacci :

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{8}{5}, \quad \frac{13}{8}, \quad \frac{21}{13}, \quad \ldots$$



P : Porche XVI^e siècle.

C1 : Anc. chapelle XV^e siècle.

TT : Tours de la façade ouest VI^e au X^e siècles.

N : Narthex IX^e-X^e siècles.

M1, M2, M3 : Sur goutterau nord. Segments d'époques différentes VI^e(?) IX^e et X^e siècles.

M4 : Partie X^e siècle du mur sud.

M5 : Mur gouttereau sud, reconstruit fin XII^e siècle.

C2, C3, C4, C5 : Chapelles édifiées aux dépens du cloître du chapitre XIV^e-XV^e siècles.

p.p$'$: Piliers de la nef avec colonnes à chapiteaux libres.

TC : Croisée ou carré du transept et coupole, XI^e siècle.

TC1 : Collatéral du transept.

TC2 : Croisillon.

Ta : Chapelle du croisillon.

C : Chœur, XI^e siècle.

D : Déambulatoire, XI^e siècle.

S : Sanctuaire, XI^e siècle.

G : Galerie tournante, XI^e siècle.

a : Absidioles du chevet, XI^e siècle.

Ce plan établi en grande partie d'après celui de MM. H. et E. du Ranquet, montre la divergence des murs de la nef par rapport à l'alignement de ses piliers, ainsi que la légère désaxation sud du transept et du chevet.

(Extrait du guide *Notre-Dame du Port* de la collection « Le Touriste en Auvergne », n° 3, du docteur Balme et du chanoine Crégut.)

A partir de (5), on forme la relation de recurrence $\theta_{n+1} = \dfrac{1+\theta_n}{\theta_n}$ dont la suite de Fibonacci est la solution obtenue pour $\theta_0 = 1$.

On vérifie aussitôt, par un raisonnement classique, que si la suite est à termes positifs, sa limite est nécessairement $l>0$, telle que $l^2 = l+1$; c'est encore le nombre Φ.

La démonstration de la convergence de la suite, si l'on veut bien noter que tous les Φ sont supérieurs à 1, se fait très simplement car :

$$\theta_{n+1}-\Phi = \frac{1}{\theta_n}+1-\Phi = \frac{1}{\theta_n}-\frac{1}{\Phi} = \frac{\Phi-\theta_n}{\theta_n\Phi}.$$

Avec $\theta_n\Phi > \dfrac{3}{2}$ pour $n>1$, on obtient :

$$(\theta_{n+1}-\Phi) < \frac{2}{3}(\theta_n-\Phi)$$

et par recurrence :

$$(\theta_{n+1}-\Phi) < \left(\frac{2}{3}\right)^n(\theta_1-\Phi)$$

qui tend bien vers zéro, si n tend vers l'infini.

Dans le domaine du concret, certains chercheurs ont retrouvé le Nombre d'Or dans les multiples et sous-multiples des mesures égyptiennes, dans les temples grecs, dans les mosaïques anciennes, dans les différents éléments du corps des êtres vivants, l'homme, la coquille, le végétal, et dans le système solaire.

Pour de plus amples détails, nous renvoyons aux ouvrages spécialisés, en soulignant qu'en 1962, s'est créée aux États-Unis la *Fibonacci Association of America* qui diffuse un périodique trimestriel où les membres publient les propriétés qu'ils découvrent sur le Nombre d'Or.

2. Subdivision de cette étude.

L'examen, même superficiel, du plan de la basilique permet de distinguer trois centres d'intérêt.

1° La nef et le transept dessinés avec des lignes droites et des angles droitse ils sont composés de carrés et de rectangles. Nous appellerons cette partie : Système I.

2° Le déambulatoire, la galerie tournante, l'abside, les absidioles qui sont des cercles. Ce sera le Système II.

3° Une curieuse interpénétration des deux Systèmes : le carré du transept peut évidemment comporter un cercle circonscrit et la travée de chœur prolonge le Système orthogonal et le raccorde au Système circulaire.

Les résultats obtenus sur les deux premiers points peuvent être considérés comme définitifs sous réserve, bien entendu, des améliorations de détail.

Mais les difficultés du troisième sont loin d'être toutes résolues. Les teintes du plan de Du Ranquet indiquent immédiatement que c'est autour du transept qu'il a fallu raccorder la partie ancienne et la partie nouvelle de la construction. C'est là que se décèlent leur désaxement, le décalage des murs et nous aurons à examiner l'hypothèse du carré du transept remanié.

3. La nef.

Étudions tout d'abord le Système I.

C'est la nef qui, la première, attira notre attention. Une simple manipulation du compas de proportions montre tout de suite que la nef et le narthex forment un ensemble de deux carrés, que la nef sans le narthex est un rectangle d'Or. Nous avons donc la figure 2. Le portail latéral est situé exactement au milieu du côté sud du carré fondamental qui comporte trois travées (1). Les limites de ce dernier sont nettement marquées par les deux étranges colonnes engagées dans les piliers, pourvues d'un chapiteau mais sans arc doubleau. Leur présence inutile reste mystérieuse. Sans prétendre donner la seule explication possible, nous pensons qu'elles manifestent assez clairement une intention de l'architecte médiéval : montrer concrètement une articulation essentielle du rectangle d'Or dans la nef pour signaler silencieusement sa connaissance du secret. Si l'on observe encore, d'après la coupe établie par Du Ranquet et reproduite dans bien des monographies, que la hauteur du fût et la largeur de la nef sont dans le rapport Φ, à la verticale, notre impression est solidement confirmée. C'est pourquoi nous les appellerions volontiers les « colonnes Phi ».

Toujours avec le compas de proportions manipulé simplement, on constate que le carré du transept et la travée de chœur forment également un deuxième rectangle d'Or plus petit. A cet emplacement, en opérant sur le plan de nombreuses églises romanes dont la nef est visiblement de proportions différentes, on retrouve très souvent ce petit rectangle-là, par exemple à Orcival. La figure 4 montre tous ces détails.

Plaçons maintenant une des pointes de la petite ouverture du compas au centre O_1 du carré du transept, également centre de son cercle circonscrit, et prenons pour unité de départ le rayon de ce cercle, qui est encore la 1/2 diagonale du carré, jusqu'au centre du pilier. Nous savons que la grande ouverture donne Φ. Retournons le compas, une pointe au centre O_1, l'autre tombe au

(1) Cet emplacement, dans une telle géométrie, est très satisfaisant pour l'esprit. Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que le portail se compose d'un linteau en bâtière sous un arc de décharge. Il ne doit pas être confondu avec un portail en plein cintre que nous verrions plutôt réservé à la façade principale. De plus, le thème iconographique du linteau n'est pas de ceux que la tradition romane répète habituellement aux portails en plein cintre. Nous avons plusieurs fois trouvé le linteau en bâtière latéralement, mais de façon très imparfaite. Il y a peut-être là un petit problème archéologique.

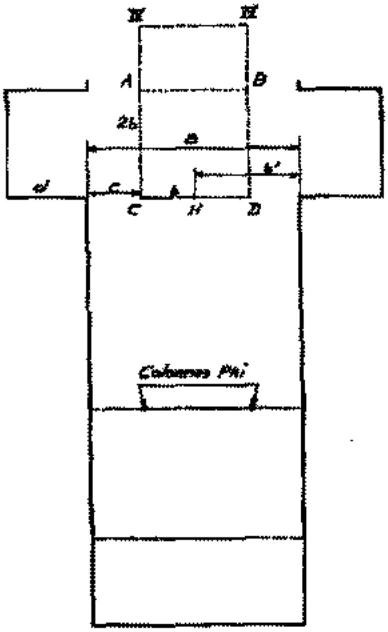


FIG. 4.

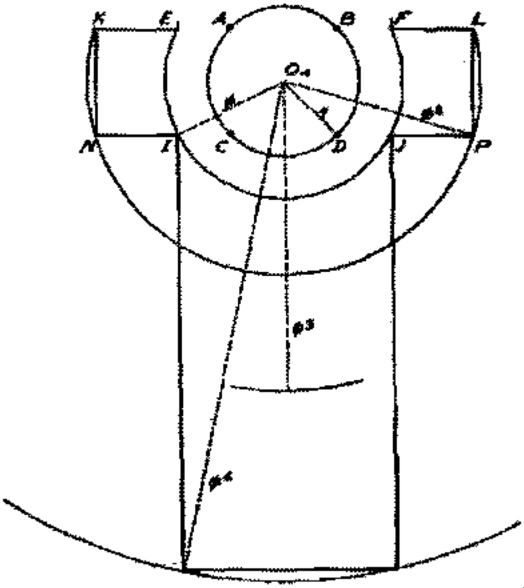


FIG. 5.

coin rentrant I ou J du croisillon, à l'intérieur du mur. Si nous ajustons maintenant la petite ouverture sur O_1 I, la grande donnera Φ^2 et tombera sur N ou P depuis O_1. Répétant encore l'opération de retournement, Φ^2 ne donnera rien, à notre connaissance du moins, après les essais les plus variés. Mais Φ^3 servira de repère pour trouver Φ^4 qui tombera au coin du narthex, englobant ainsi toute l'église dans les puissances successives de Φ, selon la figure 5. Cette observation révèle déjà une unité certaine du bâtiment à partir d'un point-clé. Toutefois, nous ne retiendrons ni Φ^3, ni Φ^4, et nous étudierons plus à fond l'équerre de la figure 6.

C'est ici que nous allons exposer avec rigueur notre méthode de travail et nous la soumettrons sans arrière-pensée à la critique bienveillante du lecteur attentif.

1° Hypothèse de départ : le Nombre d'Or.

a) les puissances positives croissantes du Nombre d'Or, 1, Φ, Φ^2, à partir du centre O_1 et selon l'hypoténuse des triangles rectangles qui se déploient en éventail, déterminent indirectement les éléments *b*, *c*, *d*, du transept. Dans cette série, l'unité est le rayon du cercle circonscrit au carré du transept.

b) les puissances négatives 1, $1/\Phi$, $1/\Phi^2$ déterminent directement les éléments B, C, *n*, de la nef, sur toute sa longueur. Dans cette série, l'unité est la largeur de la nef ou encore la distance entre le centre C du pilier du transept et le centre de la colonne Phi.

2° Le plan idéal : l'hypothèse ci-dessus et ses exigences nous permettent d'établir un plan idéal, ou modèle, dont tous les éléments sont coefficientés à partir d'un élément de base arbitrairement mais commodément choisi qui unifie les deux séries ci-dessus (bien observer qu'elles n'ont pas la même unité) et les rend, par conséquent, comparables. La nouvelle unité, fondamentale et définitive cette fois, sera le $1/2$ côté du carré du transept, HC $= b = 1$. La lettre *b* est l'initiale de « base ». Le calcul des coefficients se fera, soit en appliquant le théorème de Pythagore, soit en multipliant par la puissance de Φ qui convient, soit en additionnant les éléments qui s'ajoutent, selon la figure 6. Il y a parfois de petites différences dues aux décimales négligées ou arrondies.

3° Mesures idéales : lorsque nous aurons donné une valeur numérique à l'unité de base, nous aurons immédiatement la valeur numérique de tous les éléments.

4° Les mesures réelles, effectuées avec le plus grand soin, seront alors comparées aux mesures idéales. L'analyse critique de cette comparaison condamnera ou confirmera notre hypothèse.

Remarquons tout d'abord que l'écriture mathématique des puissances successives de Φ, positives ou négatives, ne doit effrayer personne. D'une part, elle fait ressortir avec netteté un parallélisme assez curieux. D'autre part, il est trop évident que les hommes du Moyen Age n'ont jamais eu à faire de tels calculs, sous cette forme. Un cordeau et des piquets leur suffisaient pour obtenir les mêmes résultats pratiques.

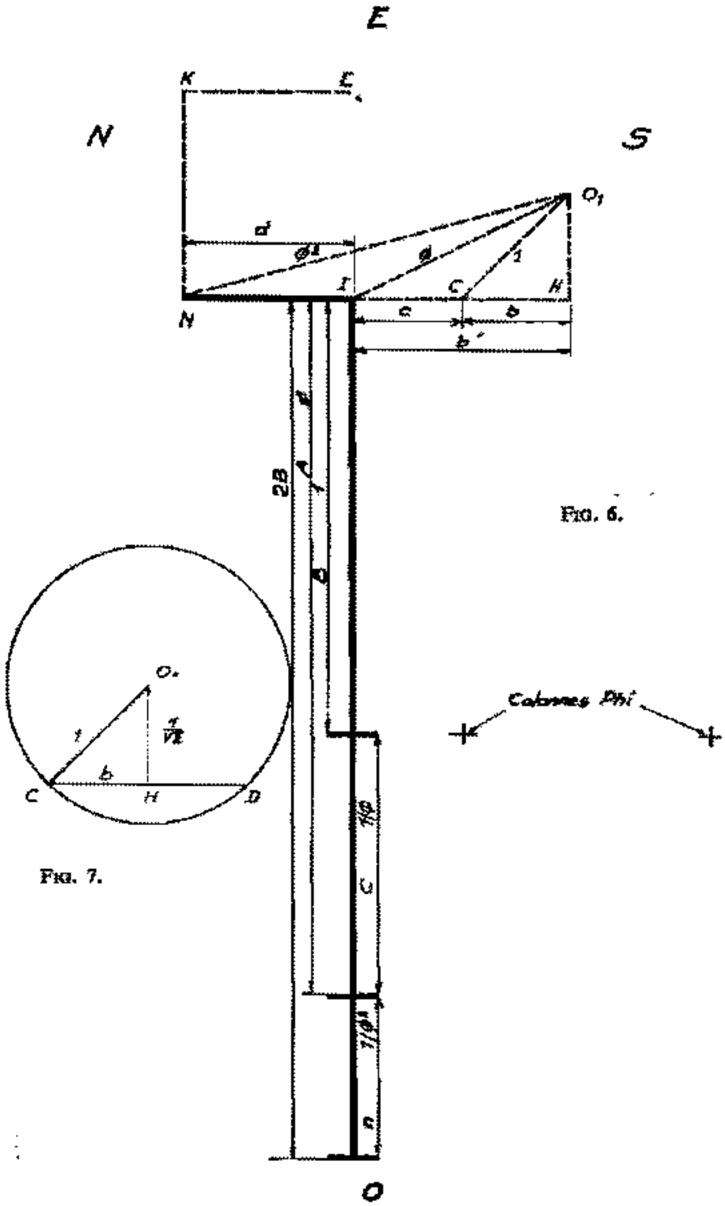


FIG. 6.

FIG. 7.

Le premier point du plan de travail ci-dessus étant admis, les calculs du second point permettent de dresser le tableau II. Nous ne craignons pas de le présenter très complet. Mais nous n'y choisirons chaque fois que le coefficient utile.

TABLEAU II. — LES COEFFICIENTS

b	$=$ 1/2 côté du carré du transept	$=$ 1
c	$=$ largeur du bas-côté	$=$ 1,058
d	$=$ largeur du croisillon	$=$ 1,506
b'	$= b+c =$ 1/2 largeur de la nef	$=$ 2,058
B	$= 2\,b' =$ largeur de la nef	$=$ 4,116
A	$= \mathrm{B} \times \Phi =$ longueur de la nef seule	$=$ 6,659
n	$= \mathrm{B} \times 1/\Phi^2 =$ largeur du narthex	$=$ 1,572
2B	$=$ longueur de toute la nef y compris le narthex	$=$ 8,232
C	$= \mathrm{B} \times 1/\Phi =$ entre colonnes Phi et narthex	$=$ 2,544
NH	$=$ 1/2 longueur du transept $= b+c+d$	$=$ 3,563

Il est maintenant extrêmement intéressant de voir comment nous avons été amené à choisir la valeur numérique de l'élément de base « b ».

Sur le plan des notices, nous avions commencé le travail au compas par la nef; mais lorsque nous nous attaquâmes au bâtiment lui-même, le hasard a fait que nous commençâmes par le Système circulaire II, ce qui nous conduisit à la découverte du pied de 0,324 m. Une fois en possession de cette donnée de première importance, il est évident que nous avons cherché tout de suite à retrouver une mesure en pieds à d'autres points-clés de la basilique. Le transept s'imposait. Passant sur les inévitables et fastidieux tâtonnements, nous retiendrons 15 pieds = 486 cm (2) comme rayon du cercle circonscrit au carré du transept. C'est pour le moment très simple, mais les faits nous imposeront de compliquer un peu les choses par la suite.

Selon la figure 7, nous écrivons :

$$O_1C = 486; \quad HC = b = 486 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 486 \times 0{,}707 = 343{,}6.$$

Voilà le nombre cherché qui nous donnera les dimensions idéales.

Au cours de notre travail, nous nous sommes aperçus que les points importants du plan modèle tombaient dans l'épaisseur de la maçonnerie, par exemple au centre des colonnes et des piliers, au milieu des murs, etc. Il est parfois possible de faire les estimations avec une bonne approximation. Dans le

(2) Désormais, dans cette étude, toutes les dimensions seront données en centimètres, la décimale sera le millimètre et l'on fera l'économie de l'abréviation « cm ». Dans les calculs, le coefficient non-dimensionnel et la mesure qu'il affecte ont donc la même apparence, mais leur distinction est évidente.

cas de la nef, l'énorme mur du fond ne le permet pas. De plus, il faut tenir compte de la forme curieuse des piliers du narthex.

Nous proposons alors la comparaison suivante.

TABLEAU III. — MESURES RÉELLES

	Droite	Gauche	Reprise dans la nef	Moyenne arrondie
1re travée	470	471	472	471
2e travée	465	469	468	467
3e travée	470	473	471	472
Total = B	1 405	1 413	1 411	1 410
Mesure directe	1 404		1 417	1 410
4e travée	470	469	472	470
5e travée	475	471	469	472
Total = A	2 349	2 353	2 358	2 353
n (base du mur)			443	443
Total général				2 796

Ce tableau est reproduit sans aucune retouche et révèle l'extrême difficulté des mesures précises au centimètre, avec un décamètre, sur des dalles irrégulières. Nous nous sommes arrêtés, naturellement, à la base du mur du fond du narthex.

Le calcul des distances idéales par les coefficients donnera :

$$\begin{array}{rcl} A = 343{,}6\times 6{,}659 & = & 2\,288 \\ +n = 343{,}6\times 1{,}572 & = & +\ \ 540 \\ \hline 2B = 343{,}6\times 8{,}231 & = & 2\,828 \end{array}$$

Donc B = 1 414. Moyenne pour une travée :

$$1\,414 : 3 = 471{,}3.$$

L'examen critique d'un tel tableau doit être conduit avec le plus grand soin.

Tout d'abord, nous retiendrons la correspondance extrêmement précise entre les mesures réelles et les dimensions idéales sur la longueur d'une travée et sur l'élément B. Nous sommes à quelques centimètres près.

Nous devons nous attendre à une différence sur l'élément 2B, puisqu'il faut envisager une certaine épaisseur de mur. Procédons par soustraction :

$$2\,828 - 2\,796 = 32.$$

Petite surprise : cela nous donne 1 pied (32,4).

Ou bien nous admettons que cette valeur de 1 pied est intéressante en elle-même et nous la prenons telle qu'elle est; ou bien nous la comparons avec la 1/2 épaisseur de 43 que nous trouverons par la suite pour les murs du transept et nous conviendrons que la différence est insignifiante.

Dans les deux cas, la coïncidence est entièrement satisfaisante.

Nous devons aussi voir ce qui se passe dans la masse des gros piliers du narthex :

$$2\,353 - 2\,288 = 65, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2 \text{ pieds } (64{,}8).$$

Dans ces conditions, la mesure du narthex jusqu'à la base du mur du fond doit accuser une différence de 3 pieds (97,2) :

$$540 - 443 = 97,$$

ce qui équivaut à une différence de 2 pieds, si nous gagnons 1 pied dans l'épaisseur du mur au lieu de nous arrêter à sa base.

Nous résumons tous ces ajustements dans la figure 8 et dans le décompte suivant qui se lit verticalement et horizontalement.

$$\begin{array}{rcrcr}
A + 2 \text{ pieds} & = & 2\,288 + 65 & = & 2\,353 \\
+ n - 3 \text{ pieds} & = & + 540 - 97 & = & + 443 \\
\hline
2B - 1 \text{ pied} & = & 2\,828 - 32 & = & 2\,796.
\end{array}$$

Autrement dit, pour être parfaitement clair, dans le cadre rigoureux du double carré, la nef seule a, en trop, les 2 pieds qui manquent au narthex.

Libre à chacun de penser que, puisqu'il faut apporter « un coup de pouce », l'hypothèse est infirmée. Nous ne le croyons sincèrement pas.

Dans le cas présent de la nef, nous avons signalé que la masse des gros piliers du narthex faisait difficulté. Il faudrait les étudier de très très et peut-être y découvrir un repère plus intéressant que celui que nous avons choisi.

Il faut bien dire aussi que nous sommes déjà devenu très exigeant. Jusqu'aux colonnes Phi et pour l'ensemble des deux carrés, nous avons des mesures à quelques centimètres près. Il ne serait pas tellement désinvolte de déclarer que le coup de pouce de 65 sur la longueur de la nef est négligeable et ne peut raisonnablement pas tuer notre hypothèse. L'erreur relative serait de :

$$\frac{65}{2\,288} = 2{,}8\ \%.$$

Les normes actuelles tolèrent 1 %.

Enfin, il est assez naturel de penser que, dans la nef, l'architecte n'a pas eu les mêmes scrupules que dans la partie supérieure de la basilique, beaucoup plus raffinée.

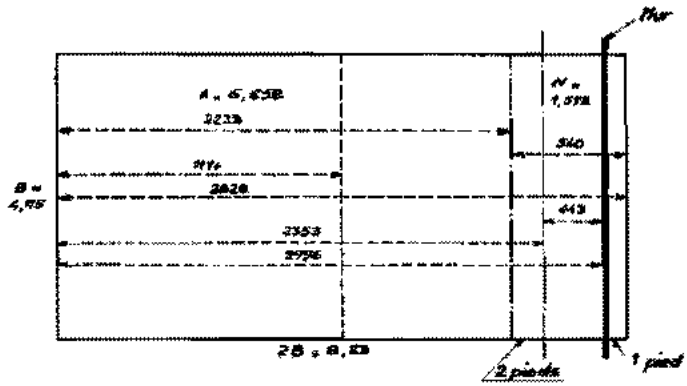


FIG. 8.

Mais, après ces réflexions de simple bon sens, nous ne voudrions pas en rester là. Le premier carré et l'ensemble des deux carrés coïncidant au mieux avec les mesures idéales (compte tenu de la nécessaire épaisseur de maçonnerie), tout se passe comme si, à la limite du rectangle d'Or, les énormes piliers du narthex avaient « glissé » de 2 pieds, ce que perd l'élément n étant exactement compensé par ce que gagne l'élément A.

Voilà la première fois que nous nous trouvons confronté avec cette compensation. Faut-il en être déçu? En vérité, ce que nous appelions tout à l'heure un coup de pouce nous apparaît maintenant sous un jour nouveau, plutôt excitant pour l'esprit.

Pourquoi, comme nous allons le voir, ce fait se répétera-t-il constamment, de la façon la plus surprenante, et toujours avec une rigueur qui nous laissera confondu? Ces corrections sont-elles volontaires de la part de l'architecte médiéval? A-t-il été gêné par le remploi de pans de maçonnerie déjà existants? Il est encore trop tôt pour tenter une réponse.

4. Le transept.

Nous allons maintenant étudier la partie N-S de l'équerre de la figure 6, ainsi que le carré du transept.

Le choix du rayon de 15 pieds = 486 fut arrêté pour un certain nombre de raisons qui se sont révélées solidaires :

1° C'est un chiffre rond. Certes, l'argument est de peu de poids, mais n'est pas totalement négligeable. A contrario, un nombre de pieds qui ne serait pas au moins entier serait inacceptable.

2° La valeur de b = 343,6 aboutit à des résultats positifs dans la nef et va se retrouver doublée sur la corde de 687 qui relie les colonnes IV du déambulatoire.

3° Si le carré du transept et la travée de chœur forment bien un rectangle d'Or, nous aurions pour cette dernière :

$$(343{,}6\times 2)\times 0{,}618 = 424{,}7.$$

Or, la mesure réelle est 420.

4° Ce chiffre sert de base aux « remaniements » assez élégants qui aboutissent aux mesures réelles du transept.

En effet, la première constatation qui s'impose est que le carré du transept n'est pas un carré, mais un rectangle qui mesure exactement :

— dans la direction E-W : $720 = 360\times 2$;

— dans la direction N-S : $703 = 351{,}5\times 2$.

Or, on voit facilement que :

$(343{,}6\times 2)+1$ pied $(32{,}4) = 719{,}6$

$(343{,}6\times 2)+1/2$ pied $(16{,}2) = 703{,}4$.

La précision est de l'ordre de quelques millimètres.

Le plan de Du Ranquet montre que les murs gouttereaux de la nef s'écartent sensiblement l'un de l'autre au niveau du transept. Donc le côté B du premier grand carré de la nef est plus petit dans le sens E-W que dans le sens N-S. Précisément, nous allons voir que toutes les dimensions N-S du transept s'expliquent par la nouvelle valeur numérique que nous allons donner à b : $359{,}8 = 343{,}6+16{,}2$.

Ceci nous permet de dresser le tableau IV qui se lit avec la figure 9.

TABLEAU IV

			b	c	b'	d	NH	$B=2b'$
Mesures idéales	359,8 × Coefficient		359,8	381,6	741,4	541,8	1 282,3	1 482,8
	Ajustement de 3 pouces		359,8 — 8,1	381,6 + 8,1				
			351,7	389,7				
Mesures réelles	Côté chœur	D Moyenne G	351,5	390 388 386	739,5	525 537,5 550	1 266,5 1 277 1 287,5	1 479
	Côté nef	D Moyenne G	351,5	404 388,5 373	740	529 539,5 550	1 284,5 1 279,5 1 274,5	1 480

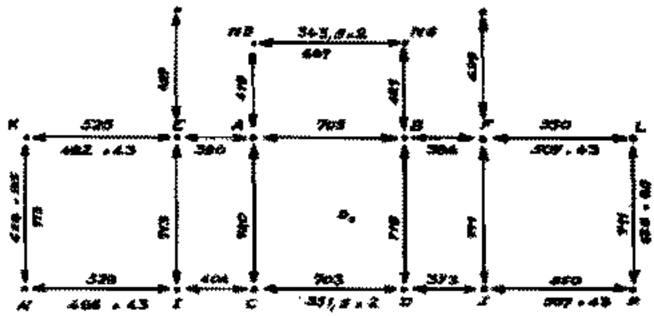


FIG. 9.

L'ajustement envisagé dans ce tableau doit être parfaitement compris et nous croyons indispensable de le décrire en détail, même si nous sommes conduit à nous répéter.

Le rayon de 15 pieds donnait un carré « primitif » de 687,2 de côté, donc une base de 687,2 : 2 = 343,6.

Puis nous admettons un carré « récent » dont le côté est majoré de 1 pied : 687,2+32,4 = 719,6; ce qui donne une base de 719,6 : 2 = 359,8.

Ce carré est rendu barlong en diminuant les côtés N-S de 1/2 pied :

$$719,6-16,2 = 703,4.$$

Cette opération revient à diminuer les 1/2 côtés N-S de 1/4 de pied, soit 3 pouces, c'est-à-dire 8,1. Mais, pour la seconde fois, comme nous l'avons déjà constaté ci-dessus dans le narthex, le pilier ne fait que « glisser » et ce que perd l'élément *b* est regagné par l'élément *c*, tandis que la somme des deux, soit l'élément *b'*, reste inchangée. Alors l'élément *b* ne coïncide évidemment plus avec la base idéale, qui reste fixée au chiffre de 359,8 ci-dessus.

Les mots « primitif » et « récent » correspondent peut-être à la vérité historique. Il nous est impossible de le prouver et nous leur donnons plutôt une valeur logique que chronologique.

Le cheminement de cette description a pu paraître exagérément minutieux. Il est pourtant nécessaire et ne doit pas être pris à contresens.

Cette analyse n'est pas un essai de reconstitution archéologique, et même si une autre théorie doit être proposée, il faudra bien, de toutes façons, retomber sur les faits, à savoir :

— le carré du transept n'est pas carré,
— la base de 343,6 rend compte de la nef,
— la base de 359,8 rend compte du transept.

Nous verrons plus loin que les deux derniers points sont totalement confirmés.

La partie supérieure du tableau IV donne les mesures idéales; la partie inférieure, les mesures réelles. La comparaison est extraordinaire. Les écarts vont en s'accentuant légèrement, quand on lit le tableau de gauche à droite; c'est naturel, certaines erreurs peuvent s'additionner; de plus, il ne faut pas oublier la demi-épaisseur des murs dont l'estimation ne peut être rigoureuse. Nous avons admis 43 dans le transept. Nous nous sommes fondé, pour adopter ce chiffre arrondi, sur la base carrée des gros piliers et sur les tranches de mur des coins rentrants du transept qui ont la même dimension, soit 85 ou 86.

L'examen de la première colonne « *b* » est particulièrement saisissant. L'écart est de deux millimètres. C'est à peine un grain de sable du mortier, une anfractuosité de la pierre. Il n'est donc pas possible d'en faire état absolument. Il n'en reste pas moins que la précision est parfaite.

Quoi qu'il en soit, un dernier détail, troublant mais incontestable, est le calcul des moyennes dans les colonnes suivantes du tableau.

La figure 9 présente le relevé des mesures réelles. Tout semble incohérent, et pourtant les moyennes tombent juste et coïncident au mieux avec les mesures du modèle idéal.

Tout cela est tellement surprenant qu'il convient de se demander si l'incohérence des mesures réelles n'est pas, comme nous l'avons suggéré séjà, délibérement voulue. La parfaite régularité de la construction ne nous semble pas au-dessus des possibilités de l'architecte médiéval, au contraire. La maladresse et la négligence ne semblent pas être des objections recevables. Même si l'on admet, avec Du Ranquet, que le chevet est du XI^e siècle et que la nef est du X^e siècle, les nécessités du raccordement ne semblent pas tout justifier.

Il y a peut-être un rapport entre le jeu des moyennes et le désaxement. Mais ce n'est pas démontrable, du moins dans l'état actuel de nos travaux. Le problème est confus et nous avons dû renoncer à le chiffrer. Si ce rapport existe bien, alors il est permis de se demander si l'intention de réaliser un désaxement, en vertu d'un éventuel symbolisme, a provoqué le jeu des moyennes ou si l'intention évidente mais obscure de ne retrouver le Nombre d'Or qu'à travers les moyennes a provoqué le désaxement.

Le maître d'œuvre a-t-il fait exprès de cacher sous ce désordre le secret de son grand principe directeur? Cela nous paraîtrait une naïveté aujourd'hui. Mais au XI^e siècle? Nous craignons fort que toute hypothèse de ce genre ne soit aussi facile à formuler qu'à contester. C'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas. Mais il faut poser la question, car il n'est pas possible d'admettre qu'on se trouve, chaque fois, devant une simple coïncidence.

5. Le chevet.

Du transept, nous allons passer au chevet, qui nous réservera bien des surprises.

Au premier coup d'œil, il est évident qu'il existe un centre commun O_2 du

Système II. Encore faut-il le prouver. Ce centre était autrefois sous l'autel et il était impossible d'y placer notre théodolite. Cette situation compliqua fortement nos calculs mais se révéla par la suite avoir été une chance extraordinaire. C'est l'obligation de disposer notre instrument au point M_3 de la figure 10 qui nous permit de découvrir l'équerre fondamentale de 4 pieds sur 10 pieds. Sans cela, nous craignons fort que cette découverte ne nous ait toujours échappé. Cette équerre est clairement indiquée sur les figures 13, 15 et 16.

Nous avons mesuré l'azimut des centres des huit colonnes du déambulatoire et des quatre absidioles. Pour éviter absolument toute erreur d'appréciation personnelle, nous avons aligné le réticule sur les deux bords visibles du cylindre de chaque colonne et nous avons pris la moyenne. Pour le centre des absidioles, il a fallu procéder autrement. En grattant le sol avec un canif, nous avons trouvé au centre de chacune d'elles une petite cheville de bois, invisible au milieu des dalles, à force d'avoir été piétinée. Par parenthèse, la mesure du rayon en fut facilitée et nous trouvâmes une moyenne de 129, c'est-à-dire 4 pieds. Un premier opérateur tenait un cierge prolongé d'un fil à plomb juste au-dessus de la cheville. Un second opérateur se tenait auprès de l'instrument. La visée était considérée comme correcte lorsque, bien entendu, le réticule était sur la flamme, mais aussi lorsque le premier opérateur, ayant vérifié l'aplomb, apercevait, à travers la flamme même du cierge, le reflet de cette dernière dans la lentille de l'objectif.

Nous procédâmes ensuite aux mesures linéaires, en particulier celles des cordes entre les colonnes et la distance de leur centre au point M_3, désignée par la lettre ρ sur la figure 11. La circonférence des colonnes nous permit de calculer leur rayon qui se trouva être de 32 pour les colonnes IV et de 31 pour les autres; c'est-à-dire pratiquement un pied.

Enfin, une troisième opération nous permit de mettre en évidence l'alignement à peu près parfait des points :

S—III D—M_3—III G—T.

Un montage assez pittoresque de cierges et de réglettes fut nécessaire pour la mener à bien, car il fallut surmonter l'obstacle que nous opposait le fût de la colonne III, bouchant la vue de l'opérateur en S ou en T.

Tout cela nous conduisit à un tableau de chiffres assez compliqué qui fut notre instrument de travail constant mais qu'il est inutile de publier. Nous n'en retiendrons que le détail capital. Un jour, par hasard, la distance 324 du point M_3 au centre de la colonne III nous sauta aux yeux. C'étaient 10 pieds. Et il est important de souligner qu'il s'agit bien du centre, point précis. La peine que nous avions prise à mesurer le rayon des colonnes n'était donc pas inutile. Par ailleurs, il fallait ramener en O_2 les angles mesurés en M_3. Ce calcul fit apparaître la distance M_3O_2 de 129 à 130, c'est-à-dire 4 pieds. On s'aperçut enfin que la distance M_3M_2 était égale à O_2M_3 donc à 4 pieds.

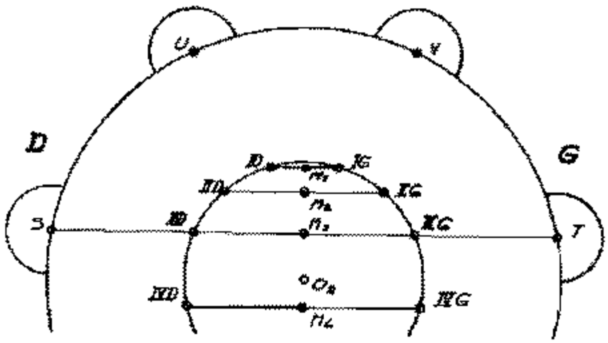


Fig. 10.

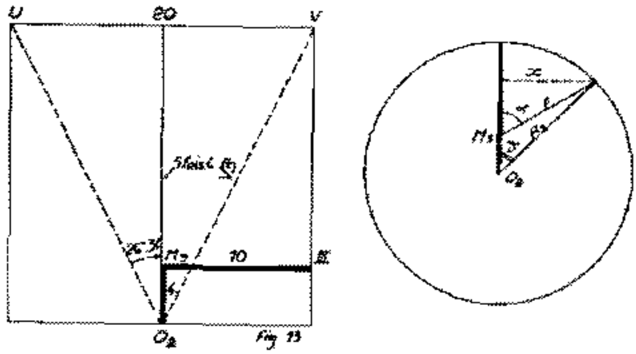


Fig. 11.

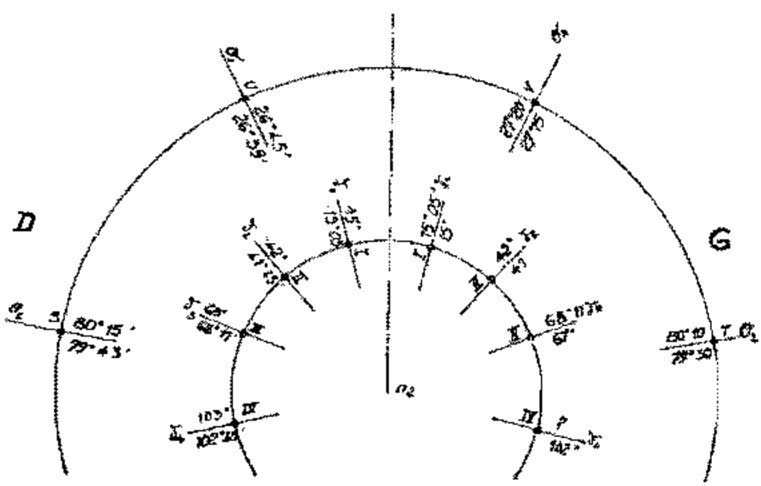


Fig. 12.

Pour calculer les conversions, on se servit de la formule établie sur la figure 11.

$$\sin\alpha = \frac{x}{\rho} \qquad x = \rho \,.\, \sin\alpha$$

$$\sin\delta = \frac{x}{R} = \frac{\rho \,.\, \sin\alpha}{R}.$$

Puis on exécuta un schéma très soigné au 1/50 et l'on mesura les angles au rapporteur.

Toutes ces données sont donc bien obtenues à partir des mesures réelles.

La figure 12 doit se lire ainsi : les angles Θ sont réservés aux centres des absidioles; les angles δ, aux centres des colonnes. Un observateur supposé, situé en O_2, qui dirige son regard selon le trait de chaque angle, verra à sa gauche les valeurs obtenues par réduction de M_3 en O_2 et à sa droite les valeurs mesurées au rapporteur sur le schéma à l'échelle.

Les différences sont inévitables. Parfois, lorsqu'une faible variation de la valeur trigonométrique donnait une forte variation de l'angle, le résultat du calcul a été soumis à un examen attentif. Il conviendrait de refaire toutes les mesures à partir du centre O_2 maintenant qu'il est accessible et toutes ces difficultés seraient levées. Inutile de dire que c'est un travail énorme. La mise en place *rigoureuse* du théodolite, par exemple, peut demander plusieurs heures.

La méthode étant maintenant bien connue, nous passons tout de suite à l'établissement du modèle idéal de la figure 15, selon les diverses hypothèses de base.

1° L'équerre de 4 pieds sur 10 pieds donne : tg $\delta_3 = 10/4 = 2{,}5$; donc $\delta_3 = 68°\ 12'$.

La correspondance avec les mesures réelles est frappante. Mais il est encore plus important de remarquer que la colonne est mise en place sur le chantier avec la dernière précision et sans aucune difficulté.

2° La même équerre permet de calculer le rayon du cercle déférent des colonnes par le théorème de Pythagore.

$$R_2 = 348{,}9.$$

Mais elle permet aussi à l'architecte médiéval de tracer ce cercle sans calcul et sans erreur sur le terrain.

3° Sachant que $O_2M_3 = M_3M_2 = 4$ pieds $= 129{,}6$; on aura

$$O_2M_2 = 259{,}2.$$

$\cos\delta_2 = 259{,}2/348{,}9 = 0{,}7429$; donc $\delta_2 = 42°\ 01'$ à comparer avec le chiffre de la figure 12.

4° Voici sans doute le point le plus curieux, celui des angles Θ. Passant, là encore, sur les tâtonnements et les échecs parfois bien décourageants, nous dirons que ce fut la table trigonométrique qui provoqua cette fois l'étincelle. Tg 26° 34′ = 1/2. Or, nous avons pour les angles Θ_1, à droite et à gauche, les valeurs suivantes : 26° 39′; 26° 45′; 27° 20′; 27° 15′! Dès lors, il est facile de construire sur la base de 10 pieds un carré de 20 pieds de côté, selon la figure 13, et cette construction, élémentaire pourtant, permet une exploitation intéressante. On retrouve la diagonale $\sqrt{5}$ du demi-carré. On peut encore considérer que, dans le triangle isocèle U O_2 V, la base et la hauteur sont égales à 20 pieds et l'angle au sommet : 26° 34′×2 = 53° 08′. On peut aussi bien constater que tg 53° 08′ = 4/3 et que l'on peut facilement la construire par le triangle de Pythagore 3-4-5 bien connu, conformément à la figure 14.

La mise en place sur le terrain est d'une désarmante simplicité. On trace le cercle déférent des absidioles en prenant un rayon O_2 V = $\sqrt{5}$ comme si on voulait construire le rectangle d'Or, mais en prolongeant la courbe. A partir du point S obtenu à l'aide de l'alignement fondamental passant par les colonnes III et le point M_2, on porte trois fois une corde de 20 pieds, de S en U, de U en V, et de V on retrouve T.

Nous aurons donc une ouverture totale de l'angle S O_2 T : 53° 08′×3 = 159° 24′; ce qui donnerait une valeur Θ_2 de 159° 24′ : 2 = 79° 42′. La comparaison avec les chiffres de la figure 12 est éloquente et l'angle de 53° 08′ se révèle être une des clés de cette trigonométrie.

5° Le cas de la colonne I est également surprenant et pose un problème. On a vu que la corde de 20 pieds sous-tend un angle de 53° 08′ et que δ_2 = 68° 12′ Or, on constate que 68° 12′—53° 08′ = 15° 04′. Une minute d'écart!

Cela revient à dire qu'il faudrait prolonger l'hypoténuse de l'équerre 4 pieds-10 pieds jusqu'au déférent des absidioles en Y, porter la corde de 20 pieds sur ce déférent à partir de Y, joindre la deuxième extrémité X de la corde au centre O_2 et trouver la colonne I à l'intersection sur le déférent des colonnes. Pourquoi passer d'un cercle à l'autre? Nous ne proposons aucune réponse.

La figure 15 résume toutes ces constructions.

6° Le déférent des absidioles circonscrit encore un pentagone très intéressant. Nous pensons avoir établi que la longueur du côté est égale au rayon augmenté du segment O_2M_2 selon la figure 16.

Le rayon étant l'unité, le côté du pentagone étant égal à deux fois le sinus de 36° et O_2M_2 étant égal à cos Θ_2, nous aurions, si l'hypothèse ci-dessus est exacte :

$$\begin{aligned} \cos \Theta_2 &= 2 \sin 36^\circ - 1 \\ &= (2 \times 0{,}58779) - 1 = 0{,}17558 \end{aligned}$$

ce qui donne pour Θ_2 la valeur de 79° 53′, chiffre supérieur de 11′ à 79° 42′. Cette différence est insignifiante. En effet, une minute d'angle sur le déférent des colonnes vaut 0,1 et 0,22 sur le déférent des absidioles. Le calcul à l'aide d'une table trigonométrique permet de le révéler; mais nous pensons qu'un écart de 1 centimètre sur une circonférence de 350 de rayon, ou bien de 2,5

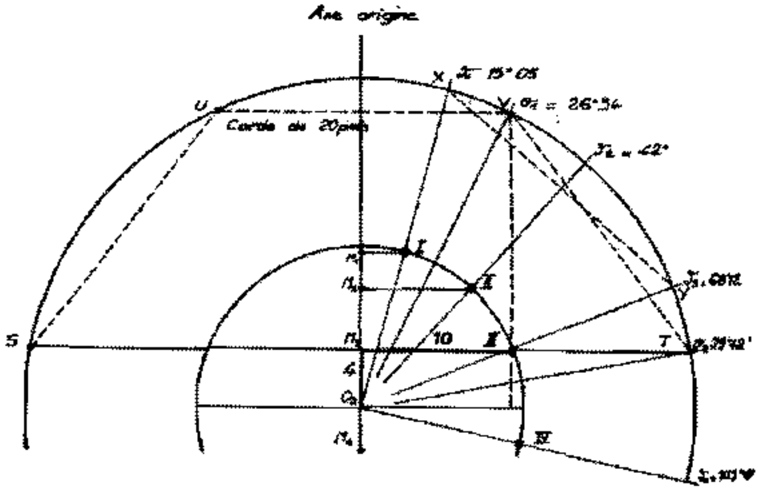


FIG. 15.

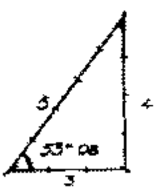


FIG. 14.

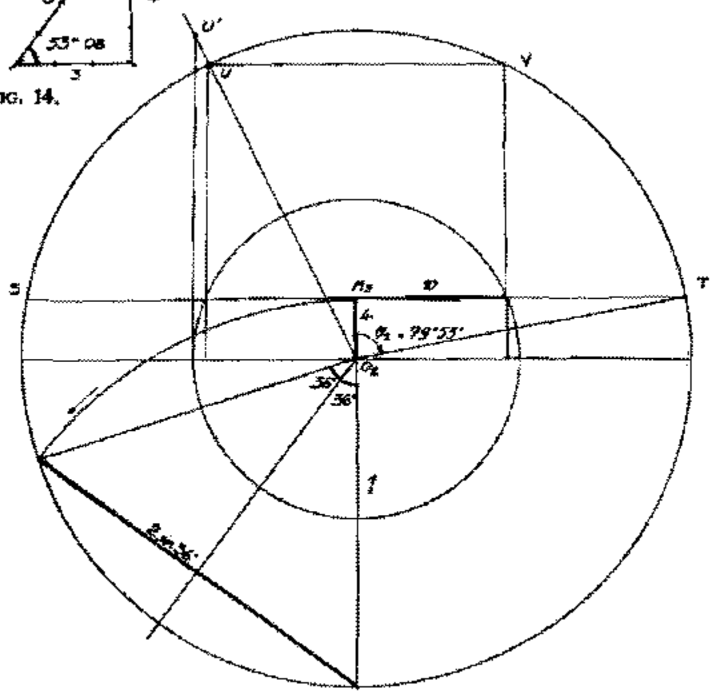


FIG. 16.

sur une circonférence 724 de rayon est indécelable sur le chantier médiéval. Il est donc raisonnable de penser que l'architecte a vu là une coïncidence parfaite. De plus, si l'on prend la moyenne des valeurs réelles, nous avons :

$$\frac{80^\circ\,15' + 79^\circ\,30'}{2} = 79^\circ\,52',5.$$

Nous sommes tellement surpris par cette impossible précision que nous n'osons la retenir comme telle, n'oubliant pas que nos mesures ne sont pas directes.

De toutes façons, il est encore plus bouleversant de noter que tous les éléments de cette construction géométrique sont indissociables et que ses différentes propriétés :

— l'alignement S—III D—M_3—III G—T,

— les trois reports de la corde de 20 pieds qui retombent exactement sur S et sur T,

— le carré de 20 pieds,

— les tangentes 1/2 et 10/4,

— le côté du pentagone,

sont toutes commandées par l'équerre de 4 sur 10 et elle seule, quelle que soit l'échelle de la figure.

Par ailleurs, l'angle de 26° 34′ mesure également l'écart entre les colonnes I, II et III.

$$\text{I—II} : \quad 42^\circ - 15^\circ\,05' = 26^\circ\,55'$$

$$\text{II—III} : \quad 68^\circ\,12' - 42^\circ = 26^\circ\,12'$$

et la moyenne :

$$\frac{26^\circ\,55' + 26^\circ\,12'}{2} = 26^\circ\,33',5$$

est à une demi-minute près.

Tous ces recoupements, s'ajoutant à ceux que nous venons d'étudier ci-dessus, donnent à la construction géométrique, même aux yeux de qui n'est pas mathématicien, une cohésion prodigieuse.

7° Le schéma de la figure 15 rend compte des angles d'une façon tellement précise et la mise en place sur le terrain est tellement élégante que nous le tenons pour indiscutable. Toutefois, il ne rend pas compte des mesures linéaires et il faudra donc admettre un remaniement.

Le rayon idéal du déférent des absidioles sera donné par la formule :

$$O_2V = R = 324 \times \sqrt{5} = 724,5$$

ou bien :

$$R = \frac{324}{\sin 26^\circ\,34'}$$

Or, en calculant O_2S, O_2U, O_2V, et O_2T par M_3S, M_3U, M_3V et M_3T qui ont été mesurés directement, on obtient :

$$O_2S = O_2T = 748$$
$$O_2U = 777$$
$$O_2V = 785.$$

La différence est sensible. Toutefois, on s'aperçoit que si l'on prend pour base des calculs, non plus 324 (c'est-à-dire les 10 pieds de l'équerre selon la figure 15) mais le rayon du déférent des colonnes, soit 348,9, on obtient :

$$348{,}9 \times \sqrt{5} = 780{,}4$$
$$348{,}9 \times \sin 26^\circ 34' = 781.$$

Et l'on constate, encore une fois, que la moyenne des mesures réelles longues est de :

$$\frac{777+785}{2} = 781$$

et que $748 + 32{,}4 = 780{,}4$. On peut difficilement trouver mieux.

Ainsi, comme pour le transept, l'incohérence apparente des mesures réelles s'efface par la moyenne et par un ajustement de 1 pied.

Tout se passe comme si on avait construit un autre carré, non sur l'extrémité des 10 pieds mais sur l'extrémité du rayon, comme nous l'indiquons sur la figure 16. Là encore, nous ne voyons aucune explication.

Remarquons enfin une certaine symétrie, respectivement entre les absidioles U et V, les plus proches de l'axe, et les deux qui s'en écartent, S et T. Cette disposition donnerait au chevet une allure un peu « dolichocéphale ».

6. Rapport entre les systèmes I et II.

Il reste maintenant à étudier le raccordement entre la nef prolongée de la travée de chœur et la galerie tournante, c'est-à-dire entre le cercle et le rectangle. Il est évident que c'est une source de difficultés, tant du point de vue de l'artiste que du maçon.

Il faut ajuster les murs extérieurs sur le déférent des absidioles et la colonnade intérieure de la nef et du transept sur le déférent des colonnes du sanctuaire.

1° Commençons par l'intérieur, c'est-à-dire l'ensemble des colonnes et des piliers considéré particulièrement au point de jonction entre la partie rectiligne et la partie circulaire, au niveau des colonnes IV.

Les plans des monographies sont insuffisants, mais la figure 17 montre que la ligne qui relie les colonnes IV est une corde du déférent, ce qui donne au dessin l'aspect d'un arc très légèrement outrepassé.

A la simple observation, le visiteur peut s'apercevoir que les colonnes IV occupent une place à part, assez loin des autres. Un peu comme les colonnes Phi dans la nef, elles marquent une articulation très importante : elles appartiennent à la travée de chœur, donc au petit rectangle d'Or de la figure 4, c'est-à-dire au Système I; mais elles appartiennent aussi au cercle des huit colonnes du sanctuaire, donc au Système II.

L'examen de la partie supérieure de la figure 17 montre encore que tout le problème dépend de leur emplacement donc de l'angle δ_4 et de la mesure du petit segment O_2M_4.

S'il est vrai que l'angle brut mesuré au théodolite en M_3 est connu exactement, la réduction en O_2 ne peut se faire qu'à l'aide de la mesure des éléments linéaires, comme les autres d'ailleurs; mais c'est ici qu'une très faible variation des valeurs trigonométriques a une forte répercussion sur la valeur de l'angle et la mesure directe du segment O_2M_4 nous est interdite, à moins de recourir à des artifices que nous n'imaginons guère pour le moment.

Nous en sommes donc réduit aux hypothèses. Mais elles conduisent à des résultats curieux.

En appliquant le Nombre d'Or sur la flèche selon la direction E-W et sur la corde selon la direction N-S, nous montrons que $O_2M = O_3M_3 \times 1/\Phi$ et que $M_4IV = O_3M_3 \times \Phi_2$.

Ce qui permet d'écrire, selon la figure 18 :

$$\operatorname{tg}(\delta_4 - 90^0) = 1/\Phi^3 = 0{,}236; \quad \delta_4 = 103^0\,17'.$$

Mais on s'aperçoit tout de suite que :

$$103^0\,17' - 90^0 = 13^0\,17' \qquad (3)$$

Nous retrouvons la bissection de l'angle de $53^0\,08'$ (4).

Tout ceci est, une fois de plus, inattendu et nous adopterons bien volontiers l'hypothèse du Nombre d'Or en croix pour situer la colonne IV, ce qui la rapproche de la colonne Phi, comme nous l'avons signalé, mais d'une façon plus compliquée et plus riche.

Que nous retenions la valeur moyenne de $102^0\,45'$ obtenue par le traitement des mesures réelles ou la valeur idéale de $103^0\,17'$, nous pouvons main-

---

(3) Nous nous permettons ici de faire connaître, pour cette unique fois, une de nos multiples impasses. Nous avions admis l'égalité de δ_1 et de $\delta_4 - 90^0$, soit $13^0\,17'$. Certes, l'hypothèse était tellement séduisante qu'elle nous a longtemps bloqué. Nous aurions eu, selon la figure 18, $O_2M_3 = M_3M_2 = 1$; $O_2M_4 = M_2M_1 = 1/\Phi$; $O_2M_1 = M_4IV = \Phi^2$ et par conséquent l'égalité des triangles O_2M_1I' et O_2M_4IV. Alors l'angle $I'O_2IV$ est droit. Mais il faut s'incliner devant les faits : $\delta_1 = 15^0$ et non $13^0\,17'$. La colonne I est très bien située et il est impossible de commettre une telle erreur au théodolite. Il se peut que ce schéma corresponde à la mise en place « primitive » et que la colonne I ait été « corrigée » selon le procédé exposé au chapitre V, 5°. Nous ne voyons toujours dans ces mots qu'une description et non une reconstitution.

(4) Nous regroupons ici l'ensemble des propriétés curieuses de cet angle privilégié $\alpha = 53^0\,08'$ ($\operatorname{tg}\alpha = 4/3$)

$\alpha/2 = 26^0\,34'$ ($\operatorname{tg}\alpha/2 = 1/2$; $\sin\alpha/2 = 1/\sqrt{5}$; $\cos\alpha/2 = 2\sin\alpha/2$)

$\alpha/4 = 13^0\,17'$ ($\operatorname{tg}\alpha/4 = 1/\Phi^3$).

Les tables trigonométriques modernes ne donnent évidemment pas ces valeurs sous cette forme qui, pourtant, ne manque ni d'originalité, ni d'applications ingénieuses.

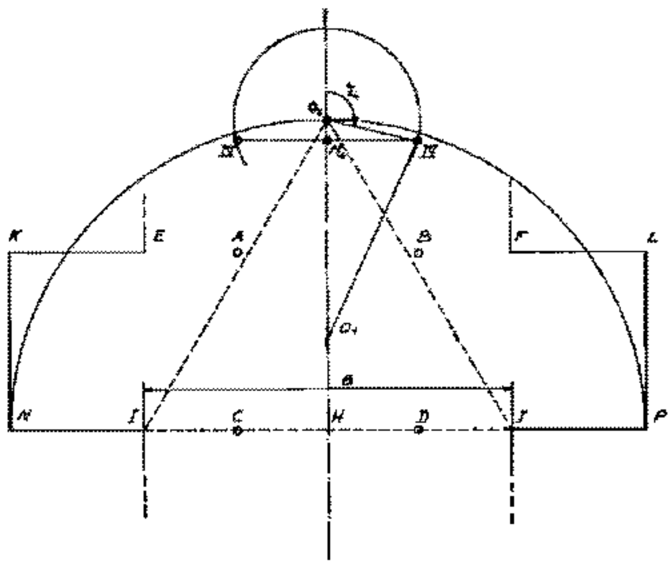


Fig. 17.

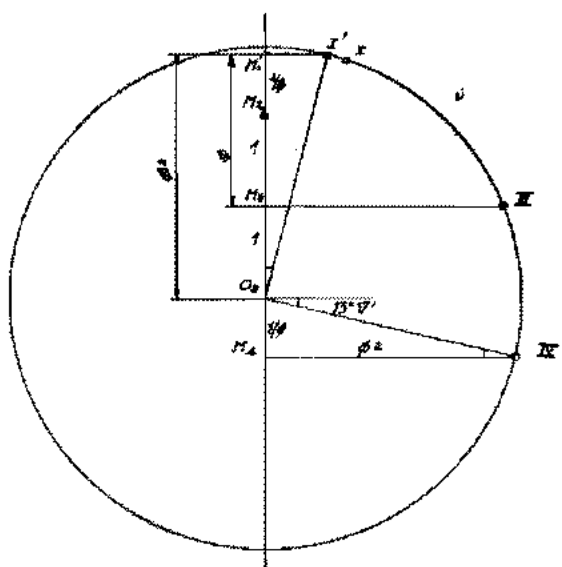


Fig. 18.

tenant calculer el petit élément O_2M_4 et par conséquent la distance O_2H.

— Par le sinus de 12° 45', nous trouvons 77.

— Par le sinus de 13° 17', nous trouvons 80,2.

Selon les mesures directes, la dimension E-W de la travée de chœur est de 420.

Si nous appliquons $1/\Phi$ à la base primitive de 343,6 pour former le petit rectangle d'Or nous obtenons :

$$(343{,}6\times 2)\times 0{,}618 = 424{,}7 \qquad (5)$$

Le côté E-W du transept étant de 720, la somme de ces éléments nous donne la hauteur O_2H.

— La mesure « courte », réelle, sera :

$$720+420+77 = 1\,217.$$

— La mesure « longue », idéale :

$$720+424{,}7+80{,}2 = 1\,224{,}9.$$

Or, on peut démontrer sur la figure 17 que si O_2 est le sommet du triangle équilatéral construit sur B, largeur de la nef, sa hauteur O_2H est égale à la demi-longueur HN du transept, le coefficient étant de 3,563. Les points N, O_2, P sont alors sur un demi-cercle de centre H.

Dans ces conditions, et toujours sur la base de 343,6, la dimension idéale est de : $343{,}6\times 3{,}563 = 1\,224$. L'accord est parfait avec la deuxième mesure, évidemment, puisque elle aussi est idéale et nous nous sommes longtemps tenu pour satisfait. Voilà une propriété de plus dans l'inépuisable série que permet le tracé directeur fondé sur le Nombre d'Or et, surtout, une construction extrêmement facile sur le terrain.

Mais une autre hypothèse nous a paru s'imposer avec plus de force. Nous avons trouvé que la distance des centres O_1O_2 et la largeur B de la nef sont dans le rapport Φ.

$$B = O_1O_2\times\Phi.$$

Pour nous, maintenant, la vérification ne peut se faire que dans le sens :

$$O_1O_2 = B\times 1/\Phi.$$

Nous savons que la base de 343,6 donne pour B la valeur 1 414.

$$1\,414\times 0{,}618 = 873{,}8.$$

Il faut ajouter O_1H du transept « primitif » pour avoir O_2H.

$$873{,}8+343{,}6 = 1\,217{,}4.$$

---

(5) On peut encore remarquer que les 4 pieds de notre équerre nous donneraient un résultat excellent : $(129{,}6\times 2)\times 1{,}618 = 419{,}4$.

coïncidence des deux constructions sur le terrain.

Le carré du transept remanié nous donnera les mêmes chiffres. En effet, si le côté AC est augmenté de 1 pied, O_1 est remonté de 1/2 pied, soit : 873,8—16,2 = 857,6; mais alors on ajoute la grande base 343,6+16,2 = 359,8 et l'on aura toujours : 857,6+359,8 = 1 217,4. Nous n'entrons dans ces détails que pour préciser jusqu'à l'évidence le rôle de la base 343,6 dans le calcul fondamental.

Ainsi donc, comme nous l'avons annoncé au chapitre IV, la base « primitive » de 343,6 commande toutes les dimensions sur l'axe E-W, de l'abside jusqu'au narthex, et la base « récente » de 359,8 commande toutes les dimensions du transept sur l'axe N-S!

Cet état de fait détruit l'égalité théorique NH = O_3H, telle que nous l'avons montrée sur la figure 17. Il ne faut donc pas songer à comparer le chiffre de 1 282 donné pour NH dans le tableau IV et celui de 1 217 à 1 225 que nous venons de calculer. Ils n'ont rien de commun puisqu'ils sont obtenus à partir de deux bases différentes. Pourtant, l'on ne peut pas manquer d'être surpris en constatant que :

$$1\,282{,}3 - 1\,217{,}4 = 64{,}9 \quad (2 \text{ pieds} = 64{,}8).$$

Pour achever cette analyse des données qui dépendent de la colonne IV, on observe que la distance O_1IV, obtenue par le théorème de Pythagore sur le triangle O_1 M_4IV de la figure 17, est de 852,4.

Or, le côté du pentagone calculé sur le rayon idéal du déférent des absidioles est de :

$$724{,}5 \times 2 \sin 36^\circ = 851{,}7.$$

Si c'est une coïncidence, ignorée même de l'architecte médiéval, elle prouve que les propriétés de toute figure fondée sur le Nombre d'Or sont complexes et inextricablement liées. Si cette mise en place a été consciente, elle prouve un dessein bien arrêté et bien conçu.

D'une façon générale, il nous appartient aujourd'hui de savoir déduire toutes ces propriétés les unes des autres à partir d'une donnée initiale qui les porte en elle-même; mais il n'est pas forcé que le maître d'œuvre les ait toutes envisagées. Il est assez vraisemblable, au contraire, d'admettre qu'il ait pu simplement constater le développement impeccable de son tracé directeur.

2° L'étude du raccordement des murs extérieurs rectilignes et circulaires ne permet pas d'aboutir à des résultats absolument précis, parce que, faute de points de repère bien concrets, il est à peu près impossible de situer la ligne sur laquelle le 1/2 cercle s'accole au rectangle.

On est, en effet, en droit d'hésiter entre :

— l'alignement S—III D—M_3sIII G—T,
— le diamètre (passant donc par O_2),
— le prolongement de la corde IV.

C'est le diamètre qui satisfait le mieux l'esprit.

On devrait retrouver la longueur de l'élément B, calculée sur la grande base de 359,8, soit 1 483, présentés par le tableau IV et confirmée de très près par les mesures réelles.

Ce chiffre peut être comparé avec les données suivantes :

— Diamètre idéal : $(324 \times \sqrt{5}) \times 2 = 1\,449$
— 2 rayons O_2V : $(348{,}5 \times \sqrt{5}) \times 2 = 1\,562$
— 2 rayons O_2S : $748 \times 2 = 1\,496$
— Alignement S—T : $(324+413) \times 2 = 1\,474$
— Corde IV prolongée jusqu'à la 1/2 épaisseur des murs = 1 435.

Ce tableau de comparaison permet de situer 1 483 entre 1 496 et 1 474 sans qu'on puisse en tirer davantage.

Mais on peut tenter une autre approche.

La mesure réelle entre les arêtes extrêmes des piédestals des colonnes géminées accolées aux murs rectilignes de la travée de chœur est de 542, à droite et à gauche. Ramenée à l'alignement sur les centres A et B des piliers du transept, elle sera de : 542—43 = 499, selon la figure 9.

Or, la hauteur du triangle AO_2B, calculée selon les indications exposées un peu plus haut est de :

$$420+77 = 497$$

ou :

$$420+80{,}2 = 500{,}2.$$

Ces chiffres, au plus près des mesures réelles, compte tenu de l'incertitude entre 77 et 80,2, permettent d'affirmer raisonnablement que l'ajustement du Système I et du Système II se fait sur le diamètre N-S. C'était tout à fait vraisemblable, mais il s'agissait de le prouver.

7. A travers le plan.

Enfin, dans une envolée plutôt débridée, nous en convenons sans peine en souriant, nous invitons le lecteur qui possède ce précieux instrument qu'est le compas à quatre pointes réglé sur le Nombre d'Or à « s'amuser » à travers un plan de la basilique.

Il peut reprendre avec plus d'intérêt les puissances successives de Φ de la figure 5, telles qu'elles sont expliquées au chapitre III. Il eût été vain, à ce moment-là, de poursuivre au petit bonheur, sans preuves chiffrées. Mais maintenant que le lecteur s'est familiarisé avec ses manipulations, c'est lui qui, comme nous, peut les poursuivre, sans autre initiation que celle de savoir retourner le compas.

Par exemple : soit l'unité entre les colonnes Phi et les colonnes IV, les deux points-clés; la valeur Φ donnera la distance du centre O_2 au pied de l'escalier du portail de la façade W. La valeur $1/\Phi$ donnera la distance de O_1 jusqu'au point supérieur où l'axe E-W coupe le mur circulaire du chevet; elle donnera encore, en diagonale, la distance d'un pilier W du transept à la colonne Phi opposée.

Délaissant maintenant le compas pour la règle, on peut voir que les points K, I et la colonne Phi opposée sont alignés, déterminant ainsi une suite de deux triangles 3-4-5. On peut prolonger le mur du fond du narthex et le mur E-W du croisillon; le point d'intersection de ces prolongements sera sur l'alignement, créant ainsi un troisième triangle 3-4-5.

D'après le tableau II des coefficients, la vérification est immédiate. Pour le premier : $KN = 2b = 2$; $NI = d = 1{,}506$; en doublant nous avons 4 et 3,012 sur les côtés de l'angle droit. Pour le second : le côté E-W du triangle = côté du carré = $B = 4{,}116$; le côté N-S $= B - c = 4{,}116 - 1{,}058 = 3{,}058$.

Il est fort probable que toutes ces étranges constatations ne sont pas les dernières et que de nouvelles recherches en révéleraient encore bien d'autres. Même incomplètes, elles prouvent l'unité totale du bâtiment par les rapports étroits qui existent entre le Nombre d'Or, le triangle 3-4-5 et la bissection de l'angle 53° 08′.

Conclusion.

Nous remercions vivement le lecteur qui a bien voulu nous suivre jusqu'au bout sans se laisser décourager par l'aridité des démonstrations.

Si, maintenant, approchant du terme de ce travail, il veut bien en faire le récolement attentif, il s'apercevra qu'*aucun* point du plan (colonnes, piliers, coins de mur, centres), *aucune* mesure (rayons, distances), *aucun* rapport, etc. n'ont été négligés.

Nous avons longtemps reculé devant les difficultés d'une telle rédaction que nous souhaiterions ni trop technique, ni trop bavarde; mais surtout devant la publication de résultats que nous jugeons encore insuffisants.

L'excitant problème de la moyenne rigoureusement exacte et des ajustements était inattendu au départ et quelque peu déconcertant. A nos yeux, la répétition presque systématique des compensations, qui dissimule le Nombre d'Or sans le défigurer, le rend plus mystérieux encore.

C'est alors, peut-être, qu'il convient d'élargir les bases du problème. L'on nous a objecté que le Nombre d'Or n'a pas l'exclusivité de l'harmonie et que, sans lui, bien des monuments suscitent une émotion esthétique indiscutable. Des proportions franchement différentes de celles qu'il détermine peuvent aussi bien conduire à une architecture parfaite. Certes, et nous l'admettons sans réserve. Mais, justement, il faut voir au delà : si le Nombre d'Or est respecté (et nous espérons avoir montré qu'il l'est), ce ne peut être que scrupuleusement et non d'une façon fantaisiste. Il est respecté ou il ne l'est pas, et nous espérons également avoir montré que les ajustements et les corrections sont loin d'être une fantaisie compromettante. Alors, une telle rigueur, tout aussi bien que les procédés destinés à brouiller son secret, ne peuvent provenir que d'une intention affirmée de l'architecte médiéval, sûr d'obtenir une harmonie d'une perfection absolue, mais qui la dépasse et la soumet à une conception plus forte. Nous nous défendons de rejoindre, par ce biais, l'interprétation et ses emballements; mais nous voudrions bien montrer que le Nombre d'Or, sinon lui seul (nous n'oserions être aussi intransigeant), du moins d'une façon extraordinairement privilégiée, compte tenu de ses propriétés mathématiques et des données les plus nobles de la tradition des maçons, permet de tenter l'esquisse d'une unification généralisée, sans laquelle tous les développements de cette étude risquent de manquer d'une pensée suprême.

Il est permis d'imaginer le maître d'œuvre sur l'esplanade choisie, occupé à fixer l'orientation par l'ombre du gnomon à midi; à disposer la croix des axes, c'est-à-dire l'angle droit, par la chaîne d'arpenteur fermée à douze éléments, disposée par les aides selon le triangle 3-4-5 aux côtés bien tendus. Le « cœur » de l'église est le centre du « templum » constitué par le carré du transept, sous la coupole, à l'origine des trois axes, nef, transept, clocher (6), selon les trois dimensions de l'espace des mathématiciens. C'est là qu'était l'autel dans les temps primitifs; l'abside, plus intellectuelle, était occupée par les choristes, les clercs, les prélats. Le carré, inscrit dans le cercle de 15 pieds de rayon, étant mis en place, une première application du Nombre d'Or détermine la distance entre les centres O_1, le « cœur », et O_2, « l'intellect », ainsi que la largeur B de la nef, la « foule » (7). Sur O_2, d'une part, on construit l'équerre fondamentale de 4 sur 10, qui règle, en chaîne, l'emplacement de tous les autres points du chevet. Depuis l'élément B, d'autre part, la nef est structurée, en particulier par les colonnes Phi, jusqu'au narthex.

Ainsi, à partir d'un centre unique, cœur du templum, l'église se développe en une belle unité, à l'aide de mesures et de rapports assez surprenants pour notre époque, mais faciles à arpenter par des procédés simples, lorsqu'on en connaît le secret. Personnellement, nous estimons que c'est là l'essentiel et nous en sommes émerveillé.

En développant ces vues de synthèse, nous ne croyons pas avoir enfreint la règle, toute de rigueur, que nous nous étions imposée, mais il est hors de

---

(6) Malgré le décalage qui existe à Notre-Dame du Port, on peut considérer l'axe vertical « clocher-puits ». L'axe du clocher passe par le sommet de la coupole et par le centre O_1. Il serait intéressant de vérifier que le puits est peut-être sous le centre O_2. Mais comment faire?

(7) Les documents médiévaux insistent sur la comparaison du bâtiment avec l'Homme (et non le Christ, comme on le dit trop souvent), étendu sur le dos, le crâne dans l'abside, la poitrine dans le carré du transept et les membres dans les bras de la croix, indiquant ainsi la droite et la gauche du bâtiment, à l'opposé de la situation du visiteur entrant par le portail central.

doute que cette unité dynamique de l'église conçue comme un microcosme est à la base même de toutes les considérations ésotériques auxquelles nous avons fait allusion dans l'introduction et que nous avons délibérément écartées.

Nous pensons avoir dégagé un acquis substantiel, mais nous sommes quelque peu écrasé par l'ampleur des travaux qu'il faudrait conduire à bien pour que tout soit au point. Non seulement il faudrait, comme nous l'avons indiqué, reprendre toutes les mesures depuis le centre de l'abside exactement situé, achever les vérifications, s'attaquer aux dimensions verticales; mais surtout il faudrait élargir l'enquête pour savoir si Notre-Dame du Port est une exception ou si d'autres églises romanes admettent une telle disposition, s'il existe une trigonométrie analogue pour un chevet à trois ou cinq absidioles et enfin pour savoir si nous n'aurions pas là *une formule portée à sa perfection*.

G. Mourlevat.