Les mathématiques et leur enseignement

André LICHNEROWICZ

Dans le monde où nous vivons, la meilleure mesure du développement d'une société est sans doute fournie par l'éducation moyenne de ses membres et la répartition harmonieuse des thèmes de cette éducation, à travers disciplines, méthodes et techniques. Alors que naguère, il suffisait à un homme de pouvoir s'exprimer correctement dans sa langue, de savoir la lire et l'écrire, de savoir enfin effectuer sur les nombres décimaux quelques calculs élémentaires pour se sentir pleinement intégré à la société où il vivait, il n'en est plus de même aujourd'hui. L'éducation commune doit avoir désormais de plus hautes ambitions et nous assistons à une extension de ce que j'appellerai *les techniques primaires minima*. Pour se sentir citoyen de plein droit de la société des humains, un homme de la seconde moitié du XX^e siècle doit savoir se localiser dans l'espace et le temps, en plaçant sa civilisation à sa juste place parmi d'autres; il doit pouvoir communiquer dans leurs langues avec des communautés autres que la sienne; il doit surtout connaître et maîtriser quelques-unes des méthodes de pensée et d'action qui constituent *le savoir-faire* qu'est au vrai notre science et notre technique.

La mathématique joue là *un rôle privilégié* pour l'intelligence de ce que nous nommons le réel, réel physique comme réel social. Notre mathématique sécrète, par nature, l'économie de pensée et, par là, permet seule de classer, de dominer, de synthétiser parfois, en quelques brèves formules, un savoir qui, sans elle, finirait par ressembler à quelques fâcheux dictionnaire encyclopédique infiniment lourd. La mathématique a été, depuis toujours, discipline auxiliaire des sciences physiques et de l'art de l'ingénieur. Elle est devenue désormais, au même titre, discipline auxiliaire aussi bien d'une grande partie des sciences biologiques et médicales que de l'économie et des sciences humaines. Il n'est presque plus de branche qui n'ait recours à elle, soit comme outil, soit comme instrument véritable de pensée. Elle porte partout témoignage du fonctionnement même de notre esprit.

La mathématique apparaît donc comme l'une des principales clés pour l'intelligence du monde où nous vivons. Or l'une de nos graves difficultés est la suivante : cette clé reste, pour trop d'hommes, mystérieuse. Si pour être un mathématicien créateur, certains dons, une vocation affirmée, sont nécessaires, au contraire comprendre des mathématiques faites et, dans une certaine mesure, les maîtriser est en principe à la portée de tous, mais nécessite, hélas, beaucoup de travail, une immense patience, une certaine forme de rigueur morale aussi.

Pour voir comment s'est constituée cette mathématique contemporaine qui baigne la plus grande partie de notre science, un peu d'histoire est nécessaire.

I. — Histoire.

Je ne me dissimule pas combien ce que je vais dire sera partial et incomplet, mais j'essaierai de ne point déformer la perspective.

Chez les Chaldéens ou les Égyptiens, nous percevons la connaissance de l'angle de deux étoiles, de la surface d'un champ rectangulaire ou trapézoïdal, du volume d'un cube ou d'une pyramide régulière. Mais ce que nous nommons raisonnement est le plus souvent absent ou n'est qu'esquissé sur des exemples.

C'est avec les Grecs qu'apparaît consciemment la première ambition mathématique et la volonté de bâtir un type de discours, cohérent et contraignant pour l'autre, capable d'interdire le refus de son contenu. Mathématique, logique et philosophie naissent simultanément, s'entremêlent pour une part, usent d'un langage peu différencié, variant seulement selon la nature des objets. Dans la démarche mathématique grecque, deux obstacles graves cependant, qu'il faudra des siècles pour surmonter. Le discours n'est pas conçu comme *hypothétiquement contraignant*, même chez Euclide : les prémisses du raisonnement ne sont pas posées par un acte libre, mais se veulent douées de quelque évidence commune et préalable à l'activité mathématique. Il existe d'autre part un plan privilégié des « objets mathématiques », des « *êtres mathématiques* », objets idéalisés suggérés par la contemplation du ciel ou les problèmes de la terre, tout au moins ceux qui relèvent de l'architecture, du commerce ou de la navigation. Ces deux obstacles marqueront fortement le développement mathématique jusqu'au XIXᵉ siècle et d'abord celui de la mathématique grecque.

L'arithmétique grecque, science des nombres, ne reconnaît guère à ses débuts de statut mathématique qu'aux entiers et aux fractions ou proportions; mais elle a réussi à dégager une théorie des lois de composition élémentaires sur ces nombres. Cette arithmétique rudimentaire ne connaît point le zéro, « objet absence d'objet », et *a fortiori* elle ignore la numération de position.

La géométrie, science des figures planes ou spatiales, fut pour les Grecs, à juste titre, la reine des sciences. Basée sur une structure extrêmement riche

— si vous me pardonnez cet anachronisme — c'est avec elle que l'esprit humain va véritablement apprendre ce qu'est un raisonnement et acquérir l'expérience de bien des pièges qui peuvent se présenter. Elle aboutira à la présentation axiomatique d'Euclide — restée trop souvent la nôtre dans l'enseignement secondaire — et culminera dans la théorie des coniques.

Mais si le programme d'Euclide semble celui-même que nous souhaiterions, la réalisation du projet est bien loin d'aboutir, faute de fondements, à un corps de doctrine rigoureux. La moitié des « raisonnements » des premiers livres d'Euclide sont en vérité de « pseudo-raisonnements ». De simples retouches ne peuvent suffire à rendre à l'édifice sa solidité; la subtilité grecque a réussi à masquer le manque profond de rigueur sous des doses d'« évidence » judicieusement et subrepticement introduits; si nos enfants ne comprennent pas toujours la géométrie élémentaire, il y a quelque raison à cela.

D'autre part, tout ce qui concerne la mesure des grandeurs est déficient. Cela est lié au manque de statut mathématique des nombres réels. Il y avait conflit entre une arithmétique trop rudimentaire et une géométrie qui, dès ses premiers pas, introduisait nécessairement les réels, algébriques comme $\sqrt{2}$, mais aussi transcendants comme π. Les « irrationnels » reçurent un statut provisoire, mais qui dura des siècles : on travaillera avec eux, mais sans pouvoir en faire l'objet d'une théorie élaborée; ils se feront instrument heuristique nécessaire. A certaines périodes, la familiarité acquise masquera, là encore, la déficience, mais le problème restera présent à la conscience des mathématiciens et dans la seconde moitié du XIX^e^ siècle on verra surgir une, ou plutôt plusieurs théories équivalentes, des réels sur lesquelles fonder solidement toutes les mathématiques historiquement antérieures. Sur cet exemple privilégié des nombres réels, on voit que, pendant plus de vingt siècles, les différentes parties des mathématiques ont été bien loin d'avoir la même cohérence, situation qui a désormais disparu.

Les applications techniques de la mathématique grecque constituée ne sont pas très nombreuses : arpentage, astronomie appliquée à la navigation, statique des machines simples, optique des miroirs. Archimède, avec son œuvre mathématique et ses applications à la mécanique et à l'optique peut symboliser l'apogée de la science grecque.

La mathématique grecque ne comporte pas d'algèbre, au sens ordinaire du terme. Du VII^e^ au XII^e^ siècle, l'algèbre mûrit principalement en Perse et diffuse à travers l'empire arabe. Le zéro est apparu et avec lui la numération de position qui est la nôtre et qui facilitera l'élaboration d'une théorie des réels. A travers l'Espagne, cette algèbre et cette arithmétique perfectionnée conquièrent l'Occident.

Le prochain pas va venir de l'Occident, créateur simultané de l'*analyse* et de la *dynamique*. La géométrie elle-même, soit sous sa forme pure, soit sous sa forme analytique, s'intéresse désormais à des courbes fort différentes des coniques des Grecs et il importe de savoir déterminer leurs tangentes ou de calculer les aires qu'elles enserrent. De Buridan à Galilée, puis Descartes, la mécanique a mûri et sait au moins poser ses problèmes. Il se trouve qu'à toutes ces questions, recherche des tangentes et des vitesses, calcul des aires, détermination des mouvements, une même opération, la dérivation et l'opération inverse l'intégration apportent énoncés précis des problèmes ou leur solution. Avec les œuvres de Leibnitz et Newton commence l'ère moderne des mathématiques classiques.

Munie de cet étonnant outil de l'analyse, la science mathématique va d'abord se faire, pendant un siècle, principalement physique mathématique. On va assister au grand développement de la mécanique théorique, mécanique céleste d'abord, mais aussi mécanique terrestre et hydrodynamique, puis théorie de la chaleur et des vibrations, étude théorique de l'électricité enfin avec Ampère.

Mais, dès 1830, à côté de cette puissante école qui explique mathématiquement une large classe de phénomènes physiques et crée les instruments mathématiques correspondants, commence la réflexion systématique des mathématiques sur elles-mêmes qui va leur permettre d'assumer enfin leur ambition de cohérence et de connaître les limites de cette ambition. Galois, créateur de la notion de groupe, peut être pris comme symbole d'*un siècle d'efforts* qui va amener la disparition consciente et définitive des deux grands obstacles dont j'ai parlé. Il y a mutation de ce qu'on peut nommer « les mathématiques classiques » en une mathématique *une*, notre mathématique contemporaine; au lieu de subir les structures et de les reconnaître un peu au hasard, la mathématique va s'efforcer de les dominer.

II. — Situation actuelle.

Moins connu que le développement de la physique durant la même période, le développement mathématique des cent dernières années s'est révélé tout aussi explosif et peut-être encore plus important.

Les mathématiques se sont étudiées elles-mêmes et constituées en une sorte de meccano dont les pièces sont ce que nous nommons les structures élémentaires, c'est-à-dire celles où le nombre des axiomes est faible. Au lieu de commencer l'étude mathématique, selon l'histoire, par des structures riches comme celle de la géométrie euclidienne, avec sa multiplicité d'axiomes, on devra commencer, selon le bon ordre des mathématiques, par des pièces élémentaires, les structures pauvres qui doivent s'emboîter les unes avec les autres pour bâtir ces machineries complexes que sont les grandes théories.

Ce qui frappe tout d'abord, je crois, dans notre mathématique contemporaine, c'est l'absence de toute métaphysique de l'identité et de la chose en soi. En termes non techniques, il n'existe point de niveau privilégié des objets mathématiques sur lesquels on opère, mais des structures, par exemple, peuvent devenir à leur tour objets mathématiques pour une théorie située à un autre niveau. L'identité de nature entre les êtres mathématiques sur lesquels on raisonne importe peu. Ce qui importe, c'est la possibilité de « *dic-*

tionnaires parfaits » et l'isomorphisme correspondant des structures étudiées. L'identité, pour le mathématicien en action est remplacée par l'isomorphisme et, pour faciliter son langage, le mathématicien *identifie* parfois, sans scrupules, des objets d'origine différente lorsqu'un isomorphisme l'assure qu'il ne ferait que prononcer deux fois le même discours dans deux langues différentes.

Il m'est arrivé d'employer l'expression d'*être mathématique ;* cette expression n'a pas grand sens : un ensemble ou une catégorie est, si j'ose dire, un ensemble ou une catégorie de n'importe quoi. Par suite tout donné peut être considéré comme mathématifiable s'il consent à se soumettre au traitement des ensembles, catégories, morphismes, c'est-à-dire dans la mesure exacte où ce que nous négligeons ainsi — tout le contenu ontologique — ne nous importe pas. On peut dire que, par son discours même, la mathématique a un caractère *radicalement non-ontologique*, ou si vous préférez met l'ontologie entre parenthèses. Le discours mathématique apparaît comme un filet aux mailles arbitrairement serrées, mais qui laisse nécessairement s'écouler l'onde ontologique. Si les grands philosophes ne se font plus mathématiciens, c'est peut-être à la prise de conscience de ce fait que cela est dû.

Un autre caractère essentiel de la mathématique contemporaine est son unité. Elle a brisé les vieux cadres historiques qui auraient tendu, en se remplissant, à la fragmenter en des disciplines distinctes évoluant d'une manière divergente. La géométrie entre autres est morte en tant que branche autonome; elle s'est métamorphosée en l'étude de certaines structures algébricotopologiques particulièrement intéressantes. On voit combien le point de vue de la mathématique sur elle-même est éloignée du point de vue historique qui lui a donné naissance. Mais « dans le règne de la pensée scientifique, disait Bachelard, ce qui mérite le nom d'idée nouvelle est immédiatement réorganisation des idées anciennes ». L'autoréforme de soi qu'entraîne une idée scientifique nouvelle nous offre un passé nouveau, un passé renouvelé en même temps qu'un avenir à bâtir. Ce n'est nulle part plus vrai que dans cette mathématique qui se veut théorie unifiée au feu de l'esprit et non savoir accumulé couche par couche. Il est curieux de voir sous nos yeux se modifier complètement l'éclairage de notions premières ou l'importance de grands théorèmes. Ce qui était naguère presque le départ d'une voie de recherche se métamorphose en corollaire sans grandeur ou — suprême injure — en simple exercice, aux yeux d'une mathématique renouvelée.

L'effort proprement mathématique des cent dernières années a été extrêmement fructueux et il importe de noter que ce développement a été largement autonome et point du tout directement conditionné par les applications. C'est comme jeu libre de l'esprit, soumis seulement à ses propres contraintes, que la mathématique se conçoit : à ce point de vue, elle se veut science hors de la science. Si les applications ont été particulièrement riches, elles sont venues bien souvent par surcroît. Il est paradoxal de voir ce jeu en apparence gratuit des mathématiciens mordre de plus en plus profondément sur le réel et lui conférer son intelligibilité.

Je voudrais donner quelques exemples : la théorie des matrices née, avec

Cayley, Hermite, etc, de préoccupations purement algébriques a fourni son premier instrument à la mécanique quantique et a envahi la technique. La géométrie riemannienne, créée par Riemann, savamment élaborée dès 1900 par Ricci et Levi-Civita, a fourni à Einstein un cadre tout prêt à accueillir la relativité générale. La théorie des représentations des groupes, fille en ligne lointaine de Galois, de Lie et d'Élie Cartan nous sert aujourd'hui, selon Wigner, à décrire les particules élémentaires connues ou encore inconnues.

Ailleurs aussi, dans le domaine biologique comme dans le domaine social, les mathématiques progressent en raffinant les instruments plus anciens, en élaborant des outils nouveaux. Probabilités, statistique mathématique, théorie des jeux ont fourni à des problèmes importants, les plus importants peut-être pour notre vie sociale, des techniques communes et parfois un cadre unique de pensée. Prenons par exemple la théorie des jeux; elle a débuté vers 1935 avec les travaux systématiques de von Neumann et elle s'est révélée depuis lors, avec les concepts de stratégie, d'optimalisation, d'information qui se sont trouvés introduits, un extraordinaire instrument d'intelligence du réel et de l'action. Nous jouons tous, le physicien joue avec la nature, le chef de grandes entreprises ou l'auteur de plans quinquennaux joue avec les phénomènes économiques. Nous jouons tous et nous voulons élaborer des stratégies qui, compte-tenu de notre information à chaque instant, nous donnent le maximum de chances de gagner.

Nous commençons à disposer des éléments d'une analyse des conduites rationnelles et dans l'exploitation de cette analyse, les ordinateurs jouent leur rôle. Certes, et il convient d'y insister, cette approche ne dicte pas les solutions aux problèmes de l'action, mais elle indique les choix réellement possibles et leurs implications dans une prévision à court terme, de l'ordre de quelques années. Au delà, la recherche scientifique elle-même qui se révèle comme le plus important facteur de développement, mais aussi d'instabilité, de notre univers quotidien s'oppose à toute prévision sérieuse : sur trente ans, il nous est impossible de présumer avec succès les résultats de notre travail.

III. — Enseignement.

Ainsi, au cours du dernier demi-siècle, le paysage scientifique tout entier, certes, mais tout particulièrement le paysage mathématique se sont profondément modifiés. L'ambition des mathématiques, leur rigueur, leur puissance manifestée à travers l'étendue et la diversité des applications sont devenues radicalement différentes. Il s'agit là d'une véritable *mutation intellectuelle* qui s'est produite à un rythme dépassant de fort loin le renouvellement des générations humaines et, partout dans le monde, nous nous trouvons affrontés à *un problème fondamental* mais difficile : il nous faut désormais préparer nos enfants et nos étudiants à comprendre et à utiliser ce que sont devenues les mathématiques de notre temps.

Cela n'est pas nécessaire seulement pour les futurs mathématiciens, ce l'est aussi pour le futur ingénieur, économiste, chercheur en génétique ou en psychologie, ce l'est, dirai-je, pour les futurs citoyens quels qu'ils soient, si nous voulons qu'ils se meuvent avec naturel et sans méfiance dans le monde d'aujourd'hui, qu'ils se servent des instruments nouveaux et puissants mis à leur disposition, qu'ils recourent aux schèmes de pensée qui peuvent conduire utilement leurs démarches.

Le problème des mathématiques et de leur enseignement est devenu ainsi *le premier* peut-être, des problèmes mondiaux de l'éducation et ce n'est certes pas un hasard si, dans la plupart des pays, une évolution plus ou moins brutale du contenu et des méthodes de l'enseignement s'est développée au cours des dernières années et continue à se poursuivre. Cette évolution se trouve en étroite interaction avec un autre phénomène mondial qui atteste l'importance du rôle joué par les mathématiques dans la société contemporaine : il s'agit de ce qu'on a appelé *la pénurie mondiale de mathématiciens*, qui se manifeste quel que soit le sens large ou étroit que l'on donne au terme de mathématicien. L'acuité avec laquelle les nations ont pris conscience de ce phénomène et l'énergie qu'elles déploient pour le vaincre sont des indices sûrs de son importance. Élever le niveau mathématique moyen de ses membres et former suffisamment de mathématiciens qualifiés sont devenus des impératifs de toute société soucieuse de ses possibilités de développement.

Certains pourront dire : les mathématiques qui nous importent sont les mathématiques dites classiques qui suffisent bien aux applications. Il n'en est rien; nous avons vu que les mathématiques contemporaines sont *infiniment plus applicables*, plus riches d'applications dans le double domaine des sciences exactes et des sciences humaines que la démarche dite classique; en fait, dans les secteurs de pointe, ce sont elles qui sont utilisées. Mais une grosse difficulté se présente : beaucoup de nos collègues des autres disciplines, formés il y a quelque trente ans, ignorent tout des mathématiques contemporaines et de leurs ressources.

Il nous faut à la fois favoriser l'évolution au sein d'une génération et travailler à la mutation nécessaire d'une génération à l'autre. Apprendre aux non mathématiciens à se servir avec efficacité des différentes techniques mathématiques disponibles est devenu un véritable *service public*. Il importe de noter qu'il ne s'agit pas là pour les mathématiciens de défendre une sorte « *d'impérialisme* », que s'il y a peu de disciplines qui désormais ne font aucun recours aux mathématiques, les mathématiques ne suppléent jamais, à elles seules, aux pensées nécessaires. Savoir se servir correctement des mathématiques consiste aussi à ne pas leur faire dire plus qu'elles ne peuvent, à mettre en pleine lumière les présupposés, propres à chaque discipline, de leur intervention.

On voit quelle est l'urgence et quelles sont les difficultés du problème de l'enseignement des mathématiques. A l'échelon du second degré, presque partout dans le monde, l'enseignement a gardé un style trop historique : chaque partie des mathématiques est exposée en évoquant la conception qui fut contemporaine de sa naissance, ici renouvelée des grecs, là bénéficiaire de l'état d'esprit des XVIIe et XVIIIe siècles. Ces conceptions ne sont pas unifiées dans l'esprit de nos élèves qui se voient contraints à de douloureux déconditionnements. Il leur faut à plusieurs reprises repenser l'ensemble de leur acquis, à l'aide de concepts qui ne peuvent que leur sembler étranges, exprimés dans un langage autre, langage non seulement différent, mais portant une pensée neuve. L'obstacle fondamental à un enseignement de type historique semble être cette caractéristique des mathématiques dont j'ai parlé, de se repenser elles-mêmes tout entières à chaque instant. Il n'y a pas, il ne peut y avoir *une conception confortable et définitive des mathématiques dites élémentaires*, fin en soi, perfection fermée sur elles-mêmes, une conception qu'il suffirait d'affiner uniquement à la lumière d'expériences pédagogiques. Certaines branches naguère prestigieuses qui ne débouchent ni sur des concepts, ni sur des techniques des mathématiques contemporaines sont condamnées à disparaître partiellement de notre enseignement, ou à ne plus être que matière à exercices.

Il importe de noter la relativité de la notion de naturel ou de concept clair et distinct. Celle-ci est fonction de *toute notre expérience mentale antérieure*. Il faut bien souvent craindre de ne trouver naturel, ou proche de l'évidence, que ce à quoi, nous professeurs sommes habitués, ce à quoi nous avons nous-mêmes été partiellement conditionnés. Il y a un « naturel » du professeur qui ne coïncide, ni avec une évidence propre aux mathématiques, ni avec l'évidence de l'élève. Le simple, le clair ou le concret n'est trop souvent que le familier; mais à travers les mutations d'un enseignement, à travers l'expérience quotidienne aussi, le familier évolue. Il y a là une constatation somme toute réconfortante : elle nous assure que, dans notre enseignement, nous jouissons en fait d'une liberté plus grande qu'il n'apparaîtrait au premier abord. Et le caractère de naturel ou d'évident ne doit pas être décrété *a priori*, mais doit faire l'objet à chaque instant d'études expérimentales, patientes et détaillées.

La qualité d'un enseignement, la possibilité de mutation soigneusement élaborées repose en premier lieu sur les *maîtres* qui dispensent cet enseignement mathématiques. J'irais volontiers jusqu'à affirmer que désormais les maîtres de mathématiques ont pris place parmi les hommes les plus importants de notre société, ceux qui conditionnent étroitement son avenir. C'est de leur nombre, de leur qualité intellectuelle et morale, du sens profond qu'ils ont de leur vocation que beaucoup de choses dépendent. L'action de l'État doit partout porter d'une part sur la formation et le perfectionnement continu des maîtres, d'autre part sur l'exploration, à partir d'expériences, de nouvelles méthodes d'enseignement pour tous les degrés.

J'ai essayé de donner quelque idée de l'importance et de la complexité des problèmes posés par l'enseignement des mathématiques. Il est clair qu'à ces problèmes *il n'est point de solution miracle*. Seul un effort continu, s'étendant sur de nombreuses années, peut, étape par étape, modifier profondément la situation présente. Cette action systématique qui intéresse tous ceux qui, *du premier degré à l'université*, enseignent les mathématiques devrait être engagée partout sans retard, mais sans précipitation.